Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко

C-АЛГЕБРЫ И АЛГЕБРЫ В ПЛАНШЕРЕЛЕВОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ

§1. Введение

В настоящей работе устанавливается связь между C-алгебрами, представляющими одно из основных понятий алгебраической комбинаторики, и важным классом биалгебр, а именно алгебрами в планшерелевой двойственности. Мы рассматриваем связь между этими понятиями в той их физике, в которой они были определены; дальнейшее усовершенствование как самих понятий, так и более полное изложение этих связей будет дано в другой работе.

Схемы отношений, изучаемые в алгебраической комбинаторике, приводят к алгебрам матриц с выделенным базисом со специальными свойствами. Этот базис фактически определяет коммутативное умножение (правильнее сказать – коумножение) и потому возникает биалгебра – пространство с умножением и коумножением, определённым образом согласованными между собой. Естественный вопрос – как описать эту структуру используя абстрактные алгебраические термины? Польза от такого описания состоит в возможности построения и последующего применения общей теории представлений. Возникающая при этом естественная категория может включать и такие объекты, которые не имеют вышеупомянутых матричных представлений, и тогда задача о существовании тех или иных комбинаторных объектов (таких как схемы отношений или блок-схемы) превращается в задачу об отыскании представлений определённого типа соответствующих алгебраических систем.

Попытки таких построений привели к понятию C-алгебры (см. [1] и §2 настояшей работы). Однако, как выясняется в данной статье, это понятие не является вполне адекватным в алгебраической комбинаторике: определяющие аксиомы C-алгебры не включают естественного требования *положительности*, которым обладают все комбинаторные алгебры. Если для коммутативных C-алгебр это дополнительное условие (положительность структурных констант и констант Крейна) легко выписывается (см. [1]), то в общем случае дело обстоит сложнее.

В 1972 году один из авторов (см. [3]), обобщая теорию двойственности Крейна-Танака, Хопфа и др., предложил новое, более слабое чем в определении алгебр Хопфа, согласование двух умножений в двойственных пространствах или, на другом языке, умножения и коумножения, а именно, понятие *алгебр в положительной двойственности*. С.В. Керов в [4,5] подробно изучил это понятие и, в частности, его конечномерный вариант (который в основном и нужен для комбинаторики). Аналог теории двойственности для групп с инвариантной мерой привёл его к понятию алгебр в планшерелевой двойственности, или планшерелевых троек (см. §3). Именно это понятие оказалось более адекватным объектам, возникающим в алгебраической комбинаторике. Имеется много примеров таких троек группового и алгебраического происхождения. Основной результат настоящей статьи заключается в следующем утверждении.

Теорема 1. *Категории положительных C-алгебр и пар алгебр в планшерелевой двойственности, одна из которых (например, вторая) коммутативна, эквивалентны.*

В связи с этим заметим, что аксиоматика алгебр в положительной двойственности не требует коммутативности ни одной из алгебр. Пока имеется немного интересных примеров дважды некоммутативного случая типа конечных квантовых групп, однако, можно предположить, что его изучение весьма содержательно: он может рассматриваться как квантовая деформация классической комбинаторики. Поэтому на наш взгляд алгебры в планшерелевой двойственности в самом общем (некоммутативном) варианте являются естественным алгебраическим эквивалентом комбинаторных схем.

Отметим, что одна из основных задач алгебраической комбинаторики состоит в характеризации C-алгебр, возникающих из схем отношений. Условие положительности C-алгебры, фигурирующее в теореме 1, и даёт необходимое условие существования. Действительно, алгебры смежности схем отношений являются частным случаем однородных клеточных алгебр (см. §2). Такой алгебре $A \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ поставим в соответствие тройку $(A, B, \langle,\rangle)$, где B – $*$-алгебра, совпадающая с A, как линейное пространство, с покоординатным умножением относительно стандартного базиса алгебры A и комплексным сопряжением в качестве инволюции, а билинейная форма $\langle,\rangle$ определяется формулой $\langle a,b\rangle = \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(ab^T)$. Доказательство следующего утверждения непосредственно следует из теоремы 1 и предложения 2.6 ниже.

Теорема 2. *Тройка $(A, B, \langle,\rangle)$ является планшерелевой для любой однородной клеточной алгебры A.*

Ещё одна связь обсуждаемых объектов, изученная в [2], относится к многозначным инволютивным группам.

§2. Положительные C-алгебры

Пусть A – ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$ с единицей 1, антилинейным инволютивным антиавтоморфизмом $*$ и выделенным линейным базисом $\mathcal{R}$. Структурные константы в базисе $\mathcal{R}$ определяются формулой $r \cdot s = \sum_{t\in\mathcal{R}} c_{r,s}^t \cdot t$ для $r,s\in\mathcal{R}$.

Определение 2.1. *Пара $(A,\mathcal{R})$ называется C-алгеброй,*[1] *если выполнены следующие условия:*

- (C1) $1\in\mathcal{R}$ *и* $\mathcal{R}^*=\mathcal{R}$.
- (C2) *Структурные константы $c_{r,s}^t$ алгебры A относительно базиса $\mathcal{R}$ вещественны.*
- (C3) *Для всех $r,s\in\mathcal{R}$ имеет место равенство $c_{r,s}^1 = d(r)\delta_{r^*,s}$, где $d(r)>0$ и δ – символ Кронекера.*
- (C4) *Линейный функционал на A, определяемый отображением $r\mapsto d(r)$, $r\in\mathcal{R}$, является одномерным $*$-представлением алгебры A. В частности, $d(r)=d(r^*)$ для всех $r\in\mathcal{R}$.*

Замечание 2.2. *В алгебраической комбинаторике (см.* [1]*) понятие C-алгебры используется в основном для коммутативных алгебр.*

Под изоморфизмом C-алгебр мы будем понимать $*$-изоморфизм соответствующих алгебр, сохраняющий базисы.

Определим в A покоординатное умножение $\circ$ относительно базиса $\mathcal{R}$, полагая

$$r\circ s = \delta_{r,s} r, \qquad r,s\in\mathcal{R}. \tag{1}$$

Очевидно, что относительно этого умножения A является коммутативной, ассоциативной алгеброй над $\mathbb{C}$ с единицей $J=\sum_{r\in\mathcal{R}} r$.

[1] К сожалению, терминология, использующая термин “C-алгебра” крайне неудачна, т.к. есть риск смешения с C^*-алгебрами и $\mathbb{C}$-алгебрами.

Определение 2.3. *Будем называть C-алгебру $\mathcal{A} = (A, \mathcal{R})$ положительной, если*

(P1) *все структурные константы $c_{r,s}^t$ алгебры A относительно базиса $\mathcal{R}$ неотрицательны,*
(P2) *конус $A^+ = \{aa^* : a \in A\}$ неотрицательных элементов алгебры A, как алгебры с инволюцией, замкнут относительно умножения $\circ$.*

Замечание 2.4. *Следующий пример показывает, что условие (P2) не вытекает из (P1). В коммутативной C-алгебре $(A, \{1, r, s\})$ с умножением*

$$r^2 = m \cdot 1 + (m-1) \cdot s$$

$$s^2 = m \cdot 1 + r + (m-2) \cdot s$$

$$rs = sr = (m-1) \cdot r + s$$

и инволюцией $r^* = r$, $s^* = s$ условие (P1) очевидно выполнено для всех $m \geq 2$. С другой стороны, условие (P2) нарушается для каждого $m > 2$. (Такие примеры были, по-видимому, известны и ранее.)

Действительно, прямым вычислением нетрудно показать, что коэффициент при p разложения элемента $p \circ p$ по базису из примитивных идемпотентов алгебры A строго меньше нуля для одного из её примитивных идемпотентов p. Отсюда следует, что $p \circ p \notin A^+$ (см. предложение 2.5).

Условие (P1) фактически означает замкнутость конуса неотрицательных элементов по отношению к базису $\mathcal{R}$ (т.е. октанта) относительно умножения в A; условие (P2) есть в точности дуальное условие замкнутости конуса неотрицательных элементов по отношению к коммутативной структуре алгебры A соответствующей второму (координатному) умножению. В использовании этой симметрии и состояла идея определения положительной двойственности в [3].

Проверка условия (P1) тривиальна. Проверка же (P2) для случая некоммутативной алгебры A представляет непростую задачу. Следует отметить, что для коммутативных C-алгебр это условие легко переписывается в терминах констант Крейна. Напомним, что константы Крейна коммутативной C-алгебры $\mathcal{A} =$

$(A,\mathcal{R})$ суть её двойственные структурные константы. Более точно, константы Крейна $c^p_{p_1,p_2}$, $p_1, p_2, p \in \mathrm{Spec}(A)$, определяются формулой

$$p_1 \circ p_2 = \frac{1}{n} \sum_{p \in \mathrm{Spec}(A)} c^p_{p_1,p_2} p,$$

где $n = \sum_{r \in \mathcal{R}} d(r)$, а $\mathrm{Spec}(A)$ – множество примитивных центральных идемпотентов алгебры A.

Предложение 2.5. *Положительность коммутативной C-алгебры равносильна неотрицательности её структурных констант и констант Крейна.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (A,\mathcal{R})$ коммутативная C-алгебра. Тогда легко видеть, что

$$A^+ = \{ \sum_{p \in \mathrm{Spec}(A)} \alpha_p p : \ \alpha_p \geq 0\}.$$

Однако, по определению констант Крейна их неотрицательность означает замкнутость A^+ относительно умножения $\circ$.

Для C-алгебр, возникающих из коммутативных схем отношений, константы Крейна неотрицательны (условие Крейна), что даёт необходимое условие существования таких схем. Условие (P2) фактически обобщает условие Крейна на некоммутативный случай (см. предложение 2.6 ниже). Примеры таких алгебр возникают из групповых рассмотрений: таковыми являются групповая алгебра и некоторые её подалгебры (см. [1], [3], [4]).

Содержательные примеры положительных C-алгебр поставляют *клеточные алгебры*, введённые в [6] как подагебры $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, замкнутые относительно адамарова (покомпонентного) умножения, эрмитова сопряжения и содержащие матрицу J_n из всех 1. Таками алгебрами являются, в частности, централизаторные алгебры групп перестановок и алгебры смежности когерентных конфигураций. В произвольной клеточной алгебре $A \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ имеется однозначно определённый линейный базис $\mathcal{R}(A)$, состоящий из $\{0,1\}$-матриц, в сумме дающих J_n, и замкнутый относительно транспонирования. Клеточная алгебра A называется *однородной*, если её стандартный базис $\mathcal{R}(A)$ содержит единичную матрицу. Примерами однородных клеточных алгебр являются централизаторные алгебры транзитивных групп перестановок и алгебры Боуза-Меснера схем отношений (не обязательно коммутативных).

Если A – однородная клеточная алгебра, то пара $(A,\mathcal{R}(A))$, как легко видеть, является C-алгеброй (возможно некоммутативной) с целыми $d(r)$, $r \in \mathcal{R}(A)$. С другой стороны, такая C-алгебра $(A,\mathcal{R})$ вместе с точным $*$-представлением

$$A \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \qquad n = \sum_{r\in\mathcal{R}} d(r),$$

при котором умножение $\circ$ в A (см. (1)) переходит в адамарово умножение матриц, может рассматриваться как однородная клеточная алгебра.

Предложение 2.6. *Если A – однородная клеточная алгебра, то C-алгебра $(A,\mathcal{R}(A))$ является положительной.*

Доказательство. Ясно, что структурные константы C-алгебры $(A,\mathcal{R}(A))$ суть неотрицательные целые числа. С другой стороны, легко видеть, что конус A^+ в этом случае состоит из неотрицательно определённых эрмитовых матриц, содержащихся в A. Поэтому условие (P2) вытекает из хорошо известного факта, что адамарово произведение неотрицательно определённых эрмитовых матриц является неотрицательно определённой эрмитовой матрицей (см., например, лемму 3.9 в [1]).

§3. Алгебры в планшерелевой двойственности

3.1. Пусть (A,B) – упорядоченная пара полупростых конечномерных $*$-алгебр с единицами и $\langle,\rangle$ – билинейная форма, приводящая их в невырожденную двойственность как векторные пространства над $\mathbb{C}$. Элементы алгебры A будут обозначаться через $x,y,z,\ldots$, а алгебры B – через $f,g,h,\ldots$; инволюции в обеих алгебрах обозначаются через $*$, для умножения мы также используем один и тот же символ, единицы алгебр обозначаются через 1_A и 1_B.

Следующее определение дано в [3] и изучено в [4].

Определение 3.1. *Алгебры A и B находятся в положительной двойственности относительно $\langle,\rangle$, если множества*

$$P_A = \{x\in A:\ \langle x,1_B\rangle = 1,\quad \langle x,f\rangle \ge 0\ \forall f\in B^+\} \tag{2}$$

$$P_B = \{f \in B: \ \langle 1_A, f\rangle = 1, \ \ \langle x, f\rangle \geq 0 \ \forall x \in A^+\} \tag{3}$$

замкнуты относительно умножения и инволюции соответственно в алгебрах A и B. Здесь A^+ (B^+) есть конус в A (соотв. B), натянутый на элементы вида xx^*, $x \in A$ (соотв. ff^*, $f \in B$).

Замечание 3.2. *Как показывают простые примеры, условия замкнутости для P_A и P_B независимы (см. также пример из замечания 2.4).*

Рассмотрим конусы, сопряжённые к A^+ и B^+:

$$K_A = \{x \in A: \ \langle x, f\rangle \geq 0 \ \forall f \in B^+\},$$

$$K_B = \{f \in B: \ \langle x, f\rangle \geq 0 \ \forall x \in A^+\}.$$

Из определения 3.1 вытекает замкнутость конусов K_A и K_B относительно умножения и инволюции в A и B. Однако, обратное неверно. Рассмотрим, например, пару $A = B = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ со спариванием $\langle x, f\rangle = \frac{1}{n}\,\mathrm{Tr}(xf)$. Умножение в A есть матричное умножение, а в B – адамарово. Тогда K_A есть множество матриц с неотрицательными элементами, а K_B – множество неотрицательно определённых эрмитовых матриц. Конус K_A замкнут относительно матричного умножения и эрмитова сопряжения, а конус K_B – относительно адамарова умножения и комплексного сопряжения; в то же время ни P_A, ни P_B не замкнуты относительно умножений.

Будем называть для краткости тройку $(A, B, \langle,\rangle)$, для которой выполнено условие определения 3.1, *положительной тройкой*. Под изоморфизмом положительных троек понимается пара изоморфизмов между соответствующими алгебрами, сохраняющих билинейные формы.

3.2. Используя двойственность алгебр A и B, можно переносить структуры из A в B и наоборот. Например, можно ввести коинволюции η_A, η_B в A и B как операции, антисопряжённые к инволюциям:

$$\langle \eta_A(x), f\rangle = \overline{\langle x, f^*\rangle}, \quad \langle x, \eta_B(f)\rangle = \overline{\langle x^*, f\rangle}, \qquad x \in A, \ f \in B. \tag{4}$$

Легко видеть, что η_A и η_B суть полулинейные $*$-изоморфизмы алгебр A и B соответственно.

Если рассматривать умножения как линейные отображения алгебр: $A \otimes A \xrightarrow{\Delta_A} A$, $\Delta_A\,(x, y) = xy$ и $B \otimes B \xrightarrow{\Delta_B} A$, $\Delta_B\,(f, g) =$

fg, то переход к сопряжённым отображениям даст отображения $\nabla_A = \Delta_A^*\colon B \to B \otimes B$ и $\nabla_B = \Delta_B^*\colon A \to A \otimes A$, называемые коумножениями. В нашем случае (алгебр в положительной двойственности) ∇_A и ∇_B являются положительными в том смысле, что

$$\nabla_A B^+ \subset B^+ \otimes B^+, \qquad \nabla_B A^+ \subset A^+ \otimes A^+.$$

В теории алгебр Хопфа и биалгебр одно из коумножений (а тогда автоматически и второе) по определению является $*$-гомоморфизмом алгебр (см. [7]). Поскольку $*$-гомоморфизм есть положительное отображение, то аксиоматика положительных троек есть естественное ослабление аксиоматики алгебр Хопфа. Подробнее эта связь будет рассмотрена отдельно.

Заметим, что единицы алгебр определяют $*$-гомоморфизмы алгебр A и B в $\mathbb{C}$:

$$x \mapsto \langle x, 1_B\rangle, \qquad f \mapsto \langle 1_A, f\rangle.$$

В частности, $\langle 1_A, 1_B\rangle = 1$. Это свойство немедленно следует из (2) и (3). В связи с этим обратим внимание на то, что множество $I_A = \{x : \langle x, 1_B\rangle = 0\}$ есть двусторонний идеал в A, который можно записать как $\mathrm{Lin}\{P_A - 1_A\}$ (аналогично для B). Более того, условие определения 3.1 (замкнутость P_A и P_B) эквивалентно условию замкнутости K_A (соотв. K_B) относительно инволюции и умножения вместе с условием, что I_A есть двусторонний идеал в A (соотв. I_B есть двусторонний идеал в B). Поскольку $\operatorname{codim} I_A = 1$, то достаточно предполагать, что I_A подалгебра, откуда уже следует, что I_A идеал.

3.3. Множество P_A (P_B) образует выпуклую компактную полугруппу с инволюцией и единицей (“пакет” по терминологии [3, 4]). Как и во всякой такой полугруппе в P_A и P_B существуют единственные нулевые элементы $m_A \in A$ и $m_B \in B$ (см. [4]): $xm_A = m_A x = m_A$, $x \in P_A$ и $fm_B = m_B f = m_B$, $f \in P_B$. Для общих элементов A и B имеем:

$$xm_A = m_A x = \langle x, 1_B\rangle m_A, \qquad x \in A,$$

$$fm_B = m_B f = \langle 1_A, f\rangle m_B, \qquad y \in B.$$

Легко видеть, что $m_A \in \mathrm{Spec}(A)$, $m_B \in \mathrm{Spec}(B)$ и выполнены равенства $\langle m_A, 1_B\rangle = \langle 1_A, m_B\rangle = 1$. (Напомним, что $\mathrm{Spec}(A)$ обозначает множество всех примитивных центральных идемпотентов алгебры A.)

Элементы m_A и m_B можно рассматривать как аналоги инвариантной меры в A и B соответственно. Действительно, пусть $A = \mathbb{C}[G]$ – групповая алгебра конечной группы G, а $B = \mathbb{C}(G)$ – алгебра комплексных функций на G с поточечным умножением. Зададим двойственность формулой

$$\langle x, f\rangle = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi(g)f(g), \qquad x\in A, f\in B.$$

Тогда P_A есть симплекс вероятностных мер на G, а P_B – блок-симплекс состояний на $\mathbb{C}[G]$ (т.е. положительно-определённых нормированных функций на G). В этом случае $m_A = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} g$ – мера Хаара на G, а $m_B = \delta_e$, т.е. мера Планшереля на $G^\wedge$; действительно,

$$m_B = \frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G^\wedge}(\dim\pi)^2\chi_\pi = \delta_e,$$

где χ_π – характер неприводимого комплексного представления группы G, а $\dim\pi$ – его размерность.

Весьма важным свойством положительных троек является условие *центральности* нулей, т.е. выполнение равенств

$$\langle m_A, fg\rangle = \langle m_A, gf\rangle, \qquad f,g\in B,$$
$$\langle xy, m_B\rangle = \langle yx, m_B\rangle, \qquad x,y\in A.$$

В этом случае имеют место разложения

$$m_A = \sum_{p\in\mathrm{Spec}(B)} m_A(p)\chi_p, \qquad m_B = \sum_{q\in\mathrm{Spec}(A)} m_B(q)\chi_q, \tag{5}$$

где χ_p и χ_q – следы неприводимых комплексных представлений алгебр B и A, отвечающих идемпотентам p и q, рассматриваемые как элементы алгебр A и B.

Назовём m_A и m_B *невырожденными*, если они являются внутренними точками компактов P_A и P_B (как подмножеств векторных пространств A и B) соответственно. Как отмечено в [4], невырожденность нулей m_A и m_B имеет или не имеет место одновременно и равносильна неравенству $\langle m_A, m_B\rangle > 0$.

Определим полуторалинейные формы на A и B:

$$(x,y)_A = \langle xy^*, m_B\rangle, \qquad (f,g)_B = \langle m_A, fg^*\rangle.$$

Следующее предложение легко следует из определений.

Предложение 3.3. *При выполнении условия центральности нулей следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *Элементы m_A и m_B (или один из них) невырождены.*
(2) *Скалярные произведения $(\, , \,)_A$ и $(\, , \,)_B$ (или одно из них) невырождены.*
(3) *Коэффициенты $m_A(p)$ и $m_B(q)$ разложений* (5) *(или одного из них) положительны.*

Теперь мы можем рассматривать алгебры A и B как гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\, , \,)_A$ и $(\, , \,)_B$. Тем самым A и A^* отождествляются каноническим образом. Но A и B находятся в невырожденной двойственности, поэтому возникает преобразование Фурье F_A, сопоставляющее элементу $x \in A$ элемент $F_A(x) \in B$ по формуле:

$$\langle y, F_A(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(x, y^*)_A, \qquad y \in A,$$

и аналогично элементу $f \in B$ элемент $F_B(f) \in A$:

$$\langle F_B(f), g \rangle = \frac{1}{\sqrt{M}}(f, g^*)_B, \qquad g \in B,$$

где $M = \langle m_A, m_B \rangle > 0$. Отображения F_A и F_B являются линейными изоморфизмами между A и B и B и A соответственно.

Мы подошли к основному определению работы [4]. Приведём одну из эквивалентных формулировок, данных там.

Определение 3.4. *Положительная тройка $(A, B, \langle , \rangle)$ с невырожденными центральными нулями называется планшерелевой, если преобразование Фурье F_A (а тогда и F_B) изометрично отображает $(A, (\, , \,)_A)$ на $(B, (\, , \,)_B)$ (соотв. наоборот).*

Следующее утверждение, которое будет использовано при доказательстве теоремы 1, доказано в [4].

Предложение 3.5. *Пусть $(A, B, \langle , \rangle)$ положительная тройка с невырожденными центральными нулями. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Тройка $(A, B, \langle , \rangle)$ планшерелева.*
(2) *Выполнены условия ортогональности характеров алгебры B:*

$$(\chi_p, \chi_q)_A = \frac{M}{m_A(p)}\delta_{p,q}, \qquad p, q \in \mathrm{Spec}(B)$$

и аналогичные соотношения для матричных элементов, если B некоммутативна.

Случай, когда одна из алгебр коммутативна, рассматривается в §4, он отвечает ситуации в классической алгебраической комбинаторике.

§4. Доказательство теоремы 1

4.1. Пусть $\mathcal{A} = (A, \mathcal{R})$ – положительная C-алгебра. Введём в линейном пространстве $B = A$ структуру коммутативной $*$-алгебры с умножением $\circ$ (см. (1)) и сопряжением $r^* = r$, $r \in \mathcal{R}$. При этом, как легко видеть, $\mathrm{Spec}(B) = \mathcal{R}$. Определим спаривание между A и B, полагая

$$\langle r, s\rangle_{\mathcal{R}} = \langle r, s\rangle = \delta_{r,s} d(r), \qquad r, s \in \mathcal{R}.$$

Покажем, что тройка $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = (A, B, \langle,\rangle)$ является планшерелевой.

Легко видеть, что

$$P_A = \{x = \sum_{r\in\mathcal{R}} \alpha_r r : \ \alpha_r \geq 0, \ d(x) = 1\}.$$

Поэтому замкнутость множества P_A относительно умножения и сопряжения в алгебре A следует из неотрицательности её структурных констант относительно $\mathcal{R}$ (условие (P1)) и условия (C4). С другой стороны,

$$P_B = \{x \in A^+ : \ \alpha_1(x) = 1\},$$

где $\alpha_1(x)$ – коэффициент при 1_A в разложении x по $\mathcal{R}$. Так что, замкнутость множества P_B относительно умножения и сопряжения в алгебре B следует из условия (P2). Тем самым доказано, что $\mathcal{T}(\mathcal{A})$ является положительной тройкой.

Рассмотрим нули m_A и m_B алгебр A и B. Нетрудно проверить, что

$$m_A = (\sum_{r\in\mathcal{R}} r)/n, \qquad m_B = 1_A,$$

где $n = \sum_{r\in\mathcal{R}} d(r) = 1/M$. Центральность m_A очевидна в силу коммутативности алгебры B, в то время как центральность m_B следует из условий (C3), (C4). Из тех же условий следует, что для коэффициентов первого из разложений (5) имеет место неравенство

$$m_A(r) = \langle m_A, r\rangle = d(r)/n > 0, \qquad r \in \mathrm{Spec}(B) = \mathcal{R}.$$

Это доказывает невырожденность m_A. Для завершения доказательства планшерелевости в силу предложений 3.3 и 3.5 достаточно проверить условия ортогональности. В нашем случае они принимают вид

$$(r/d(r), s/d(s))_A = \delta_{r,s}/d(r),$$

что совпадает с (C3) по определению $(\ ,\ )_A$.

4.2. Обратно, пусть $\mathcal{T} = (A, B, \langle , \rangle)$ – планшерелева тройка, причём алгебра B коммутативна. Положим

$$\mathcal{R} = \{r(p) : \ r(p) = (m_A(p)/M)\chi_p, \ p \in \mathrm{Spec}(B)\},$$

где $\chi_p \in A$ – характер алгебры B, отвечающий идемпотенту p (см. (5)), и докажем, что пара $\mathcal{A}(\mathcal{T}) = (A, \mathcal{R})$ является положительной C-алгеброй. Отметим, что $\mathcal{R}$ – линейный базис алгебры A в силу невырожденности m_A.

Поскольку $1_A = r(m_B)$ (см. начало п.3.3), $1_A \in \mathcal{R}$. Замкнутость $\mathcal{R}$ относительно $*$ следует из формулы (4) и того факта, что η_B – $*$-изоморфизм алгебры B. Это доказывает (C1). Далее, из условий ортогональности следует, что

$$(r, s)_A = (m_A(p)/M)\delta_{r,s}, \qquad r, s \in \mathcal{R},$$

где $r = r(p)$ для $p \in \mathrm{Spec}(B)$. По определению скалярного произведения $(\ ,\ )_A$ имеем

$$c^1_{r,s} = \langle rs, m_B\rangle = (r, s^*)_A = (m_A(p)/M)\delta_{r,s^*},$$

откуда следует (C3) с $d(r) = m_A(p)/M$, поскольку $m_A(p) > 0$ в силу невырожденности m_A. Последняя формула показывает, что

$$c^t_{r,s} = \langle rst^*, m_B\rangle/d(t), \qquad r, s, t \in \mathcal{R}.$$

Заметим, что в силу коммутативности B имеем

$$B^+ = \{\sum_{p \in \mathrm{Spec}(B)} \alpha_p p : \ \alpha_p \geq 0\}.$$

Отсюда по определению $\mathcal{R}$ заключаем, что $\mathcal{R} \subset K_A$. Таким образом, (C2) и, более того, неотрицательность $c_{r,s}^t$, следуют из замкнутости конуса K_A относительно умножения и сопряжения и того факта, что $m_B \in B^+$. Свойство (C4) вытекает из формулы

$$d(r) = m_A(p)/M = \langle r, p \rangle = \langle r, 1_B \rangle,$$

где $r = r(p)$, $p \in \mathrm{Spec}(B)$, и того, что отображение $x \mapsto \langle x, 1_B \rangle$ является $*$-характером алгебры A (см. п.3.2).

Для доказательства положительности C-алгебры $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ заметим, что условие (P1) было фактически проверено при доказательстве условия (C2). С другой стороны, легко видеть, что отображение $\mathrm{Spec}(B) \to \mathcal{R}$, $p \mapsto r(p)$, продолжается до линейного изоморфизма B на A, переводящего умножение в B в умножение $\circ$ в A, при котором K_B переходит в A^+. Так что условие (P2) следует из замкнутости конуса K_B относительно умножения в B.

4.3. Проверим, что отображения $\mathcal{T} \to \mathcal{A}(\mathcal{T})$ и $\mathcal{A} \to \mathcal{T}(\mathcal{A})$ задают эквивалентность соответствующих категорий. Ясно, что $\mathcal{A}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$. С другой стороны, пусть $\mathcal{T} = (A, B, \langle , \rangle)$ – планшерелева тройка с коммутативной алгеброй B. Тогда в планшерелевой тройке $\mathcal{T}(\mathcal{A}(\mathcal{T}))$ первая компонента совпадает с алгеброй A, в то время как вторая компонента представляет собой линейное пространство A с коммутативным умножением $\circ$ (см. (1)). Изоморфизм между этими тройками задаётся тождественным отображением алгебры A и линейным изоморфизмом B на A, определённым в конце п.4.2. Теорема доказана.

Литература

1. Э. Баннаи, Т. Ито, *Алгебраическая комбинаторика 1. Схемы отношений.* Москва, “Мир”, 1987.
2. В. М. Бухштабер, А. М. Вершик, С. А. Евдокимов, И. Н. Пономаренко, *Комбинаторные алгебры и многозначные инволютивные группы.* — Функциональный анализ и его приложения **3** (1996), 12–18.
3. А. М. Вершик, *Геометрическая теория состояний, граница фон Неймана, двойственность C^* алгебр.* — Записки научных семинаров ЛОМИ **29** (1972), 147–154..
4. С. В. Керов, *Двойственность конечномерных $*$-алгебр.* — Вестник ЛГУ, сер. матем. **7** (1974), 23–29.
5. С. В. Керов, *Двойственность $*$-алгебр и её применения в теории представлений групп.* Диссертация на соиск. степени к.ф.м.н., 1974, Ленинград.
6. B. Weisfeiler (editor), *On the construction and identification of graphs.* — Lect. Notes. Math. **558** (1976).

7. Ch. Kassel, *Quantum Groups*. Springer-Verlag, 1994.

Evdokimov S. A., Ponomarenko I. N., Vershik A., M. C-algebras and algebras in Plancherel duality.

For an arbitrary C-algebra (possibly non-commutative) a positivity condition generalizing the Krein condition for a commutative case is defined. We show that the class of positive C-algebras includes those arising in algebraic combinatorics from association schemes (possibly non-commutative). It is proved that the category of positive C-algebras is equivalent to the category of pairs of algebras in Plancherel duality one of which being commutative.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский институт
Информатики и Автоматизации
РАН

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 сентября 1996г.