Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

М. А. Всемирнов

ТОЖДЕСТВА МАКДОНАЛЬДА И МНОГОМЕРНЫЕ ТЭТА-ФУНКЦИИ

Введение.

В настоящей работе предлагаются новые доказательства комбинаторных тождеств Макдональда [7], связывающих ряды и бесконечные произведения. (Явный вид тождеств будет приведен ниже.)

Остановимся на истории вопроса. Отдельные примеры таких тождеств были известны задолго до появления работы [7]. Самым первым из них следует считать тождество Гаусса–Якоби

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left\{(1-q^{2m})(1-yq^{2m-1})(1-y^{-1}\,q^{2m-1})\right\}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k y^k q^{k^2}, \quad (1)$$

которое при $q=\exp\pi i\tau$, $y=\exp 2\pi iz$ есть не что иное, как разложение в бесконечное произведение тэта-функции с характеристиками $\theta_{0,1}(z,\tau)$ (см., например, [8, §14]). Более точно, тождеством Гаусса–Якоби принято называть аналог (1), получающийся из него заменой y на $-y$ и связанный с разложением в бесконечное произведение обычной тэта-функции $\theta_{0,0}(z,\tau)$. Мы предпочитаем рассматривать это тождество в форме (1), поскольку именно оно является частным случаем бесконечной серии тождеств, исследуемых ниже. Первоначальное доказательство тождества Гаусса–Якоби опиралось на аналитические свойства тэта-функции. Позднее были найдены как алгебраические, так и элементарные комбинаторные [2, 4] (см. также библиографию в [2, 4]) его доказательства. Исходное доказательство тождеств Макдональда [7], а также последующие доказательства (см., например, [5, 3, 9]) носят исключительно алгебраический характер. Кац (см. [10]) указал на связь этих тождеств с теорией алгебр Каца–Муди. Представляет интерес поиск других подходов (аналитических и элементарных) к доказательству тождеств Макдональда. Первое аналитическое доказательство, опирающееся на свойства обобщенных тэта-функций, было предложено в работе Лойенги [6]. Следует отметить, что и в нем используются свойства алгебр Ли; однако этого можно избежать, явно вычислив целочисленные значения некоторых функций, заданных на элементах группы Вейля. Кроме того, в своей аналитической части доказательство Лойенги использует то, что левая и правая часть тождества удовлетворяет одному и тому же функциональному уравнению относительно действия модулярной группы. Это практически не оставляет надежды на преобразование такого доказательства в элементарное.

Ниже представлено новое аналитическое доказательство одной из бесконечной серий тождеств Макдональда, также основанное на свойствах многомерных тэта-функций. Основная идея заключается в том, что левая и правая части обладают квазипериодическим поведением относительно сдвигов на элементы некоторой решетки, а также удовлетворяют дифференциальному уравнению теплопроводности. В замечаниях будет показано, как можно модифицировать это доказательство, заменив аналитические аргументы на рассуждения, оперирующие лишь с формальными степенными рядами.

Основной результат.

Прежде чем сформулировать основной результат данной статьи, введем следующие обозначения. Пусть $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ – какая-либо перестановка чисел $0, 1, \dots, n-1$. Множество всех таких перестановок при фиксированном n обозначим S_n. Пусть $\#\sigma$ – число инверсий в перестановке σ. В частности, $(-1)^{\#\sigma}$ равно 1 или -1 в зависимости от того, будет σ четной или нечетной. Пусть

$$I(\sigma) = (1-p_1, 2-p_2, \dots, n-1-p_{n-1}) + n\mathbf{Z}^{n-1}$$
$$= \left\{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}^{n-1} : l_j \equiv j - p_j \pmod{n},\ j = 1, \dots, n-1\right\}. \tag{2}$$

Замечание 1. Следует подчеркнуть, что $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ – перестановка множества из n элементов, но в определении $I(\sigma)$ мы используем только $n-1$ из них. С другой стороны, зная $p_1, \dots, p_{n-1}$, мы однозначно восстанавливаем p_0, а знаит и σ. Тогда нетрудно видеть, что при $\sigma \neq \sigma_1$ множества $I(\sigma)$ и $I(\sigma_1)$ не пересекаются.

Рассмотрим бесконечные произведения

$$G_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q) =$$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\Bigg\{\prod_{1\leqslant j\leqslant n-1}\Big[(1-y_j q^{mn-n+j})(1-y_j^{-1}\,q^{mn-j})\Big]$$

$$\times\prod_{1\leqslant j<k\leqslant n-1}\Big[(1-y_k y_j^{-1} q^{mn-n+k-j})(1-y_k^{-1}\,q^{mn-k+j})\Big]\Bigg\}, \qquad (3)$$

$$H_n(q)=\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^{nm})^{n-1}, \qquad (4)$$

и ряд

$$F_n(y_1,\dots,y_{n-1},q)=\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\#\sigma}\sum_{l\in I(\sigma)} y_1^{l_1}y_2^{l_2}\dots y_{n-1}^{l_{n-1}}\,q^{A(\mathbf{l})}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{l}=(l_1,\dots,l_{n-1})$, и

$$A(\mathbf{l})=A(l_1,\dots,l_{n-1})=\frac{1}{2}\Bigg(\sum_{r=1}^{n-1}l_r^2+\Bigg(\sum_{r=1}^{n-1}l_r\Bigg)^2\Bigg).$$

Произведения G_n, H_n и ряд F_n будет удобно рассматривать как элементы кольца $\mathbf{C}[y_1,\dots,y_{n-1},y_1^{-1},\dots,y_{n-1}^{-1}]((q))$, т.е. кольца формальных рядов Лорана от переменной q с коэффициентами из кольца многочленов от $y_1,\dots,y_{n-1},y_1^{-1},\dots,y_{n-1}^{-1}$.

Теорема 1. *При любом $n\geqslant 2$ имеет место формальное тождество*

$$H_n(q)G_n(y_1,\dots,y_{n-1},q)=F_n(y_1,\dots,y_{n-1},q). \qquad (6)$$

Замечание 2. Левую часть тождества (6) мы представляем в виде произведения двух функций, поскольку, как будет видно в дальнейшем, роли этих сомножителей принципиально различны.

Замечание 3. В тождестве (6) сделаем следующую подстановку:

$$q=(x_1x_2\dots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

$$y_j=(x_1\dots x_j)q^{-j}=\Bigg(\prod_{r=1}^{j}x_r\Bigg)^{\frac{n-j}{n}}\Bigg(\prod_{r=j+1}^{n-1}x_r\Bigg)^{-\frac{j}{n}}.$$

Кроме того, сделаем замену индексов суммирования в правой части ($r = 1, 2, \dots, n$):

$$k_r = \sum_{j=r}^{n-1} l_j + \frac{1}{n} A(\mathbf{l}) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j l_j$$
$$= \sum_{j=r}^{n-1} l_j + \frac{1}{2n} \left(\sum_{j=1}^{n-1} (l_j - j)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n-1} l_j \right)^2 \right).$$

Это преобразование индексов осуществляет биекцию между $\cup_{\sigma \in S_m} I(\sigma)$ и множеством тех $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, которые удовлетворяют условиям

(i) $\quad \sum\limits_{r=1}^{n} k_r - \frac{1}{2} \sum\limits_{r=1}^{n} (k_r - k_{r+1})^2 = 0$

(ii) $\quad k_r - k_{r+1} - r$ попарно несравнимы по модулю n.

Мы считаем $k_{n+1} = k_1$. (Обратным преобразованием индексов будет $l_j = k_j - k_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.) После таких преобразований мы получим тождество Макдональда в форме, приведенной в книге Д. Б. Фукса [9]:

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left\{ (1 - x_1^m \dots x_n^m)^{n-1} \prod_{1 \leqslant r < t \leqslant n} \left[\left(1 - x_1^{m-1} \dots x_n^{m-1} \prod_{s=r}^{t-1} x_s \right) \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(1 - x_1^m \dots x_n^m \prod_{s=r}^{t-1} x_s^{-1} \right) \right] \right\} = \sum \chi(k_1, \dots, k_n) x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n},$$

где суммирование ведется по всем $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, удовлетворяющим условиям (i), (ii), а $\chi(k_1, \dots, k_n) = \pm 1$. Следует отметить, что в [9, Теорема 3.2.4] не указано дополнительное условие (ii). (Это ограничение существенно при $n \geqslant 5$.) Эта ошибка была обусловлена тем, что теорема 2.5.2 (ii) в приведенной в [9] формулировке неверна. Как сообщил автору А. М. Вершик, эта ошибка была замечена ранее, однако она исправлена лишь в недавней работе Ю. М. Базлова [1] (см. настоящий сборник).

Пусть $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbf{C}^{n-1}$, и $\tau \in \mathbf{H}$, где $\mathbf{H} = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя комплексная полуплоскость. Начиная с этого места мы считаем, если не оговорено противное, что

$$q = \exp \pi i \tau, \tag{7}$$
$$y_j = \exp 2\pi i z_j, \quad j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{8}$$

Тогда ряд (5) и бесконечное произведение (3), рассматриваемые как функции комплексных переменных $z_1, \dots, z_{n-1}, \tau$, сходятся абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве в $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{H}$ и определяют аналитические в $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{H}$ функции. Аналогично, произведение (4) определяет аналитическую в $\mathbf{H}$ функцию переменной τ. Заметим, что при замене переменных (7), (8) ряд (5), стоящий в правой части тождества Макдональда, превращается в многомерную тэта-функцию (точнее, линейную комбинацию тэта-функций с характеристиками), аналитические свойства которой мы и будем использовать.

Основным техническим результатом, доказательству которого посвящены §3–§4, является следующий частный случай тождества (6).

Предложение 1. *Пусть* $q = \exp \pi i \tau$, $\tau \in \mathbf{H}$, *и* $y_j = \exp 2\pi i z_j$, $z_j \in \mathbf{C}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$. *Тогда тождество* (6) *справедливо как тождество аналитических в* $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{H}$ *функций.*

Доказательство теоремы 1 получится из предложения 1 на основании единственности разложения в ряд Фурье. Этот метод хорошо известен, поэтому мы опускаем детали.

Свойства функций F_n и G_n.

Так как y_j инвариантны относительно сдвигов на целочисленные векторы $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \mathbf{m}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^{n-1}$, то такие преобразования не изменяют функции F_n и G_n. Пусть $\Omega = nA\tau$, где A – матрица квадратичной формы $A(\mathbf{l})$.

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \dots & 1 & 1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сдвиги аргумента $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \mathbf{m}\Omega$, $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^{n-1}$. Функции F_n и G_n обладают одинаковым "квазипериодическим" поведением относительно таких сдвигов. Это достаточно проверить для $\mathbf{m} = \mathbf{e}_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (на s-ом месте стоит 1) для всех $s = 1, \dots, n-1$. Сдвигу такого вида соответствует преобразование переменных y_j:

$$\begin{aligned} y_j &\leftarrow y_j q^n, \quad j \neq s, \\ y_s &\leftarrow y_s q^{2n}. \end{aligned}$$

Лемма 1. *Пусть* $y_1, \dots, y_n, q$ *определены согласно* (8), (7). *Имеют место следующие соотношения квазипериодичности*

$$F_n(y_1 q^n, \dots, y_s q^{2n}, \dots, y_{n-1} q^n, q) = y_s^{-n} q^{-n^2} F_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q),$$

$$G_n(y_1 q^n, \dots, y_s q^{2n}, \dots, y_{n-1} q^n, q) = y_s^{-n} q^{-n^2} G_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q).$$

Доказательство. (Все рассматриваемые ниже преобразования аналитических функций корректны. О том как перенести эти рассуждения на формальные ряды, см. замечание 6 ниже.)

(i) Согласно определению

$$F_n(y_1 q^n, \dots, y_s q^{2n}, \dots, y_{n-1} q^n, q)$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\#\sigma} \sum_{\mathbf{l} \in I(\sigma)} y_1^{l_1} y_2^{l_2} \dots y_{n-1}^{l_{n-1}} q^{A(\mathbf{l}) + n \sum_{j=1}^{n-1} l_j + l_s}.$$

Сделаем замену индексов суммирования $\mathbf{t} = \mathbf{l} + n\mathbf{e}_s$. Такое преобразование переводит $I(\sigma)$ в себя. Получим

$$= y_s^{-n} q^{-n^2} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\#\sigma} \sum_{\mathbf{l} \in I(\sigma)} y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_{n-1}^{t_{n-1}} q^{A(\mathbf{t})}$$
$$= y_s^{-n} q^{-n^2} F_n(y_1, \dots, , \dots, y_{n-1}, q).$$

(ii) Для доказательства второго соотношения рассмотрим, как преобразуются отдельные сомножители G_n. Например,

$$\prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - (y_s q^{2n})^{-1} q^{mn-s}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - (y_s q^{2n})\, q^{mn-n+s}\right)$$
$$= \left(1 - y_s^{-1} q^{-n-s}\right)\left(1 - y_s^{-1} q^{-s}\right)$$
$$\times \prod_{m \geqslant 1} (1 - y_s^{-1} q^{mn-s}) \prod_{m \geqslant 3} (1 - y_s\, q^{mn-n+s})$$
$$= y_s^{-2} q^{-n-2s} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - y_s^{-1} q^{mn-s}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - y_s\, q^{mn-n+s}\right).$$

Соотношения для остальных сомножителей получаются аналогично. Объединяя их, получаем искомое соотношение для G_n. Лемма 1 доказана.

Легко видеть, что нулями функции G_n будут лишь нули отдельных сомножителей, входящих в G_n. Следующая лемма показывает, что они будут и нулями функции F_n.

Лемма 2. *Пусть* $y_1, \dots, y_n, q$ *определены согласно* (8), (7). *Если* $G_n(y_1, \dots, y_n, q) = 0$, *то и* $F_n(y_1, \dots, y_n, q) = 0$

Доказательство. Покажем, например, что если для некоторого $1 \leqslant s \leqslant n-1$ имеет место равенство $y_s = q^{-s+mn}$, $m \in \mathbf{Z}$, то F_n обращается в 0. Запишем F_n согласно (5) и сделаем замену индексов суммирования ($\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_{n-1})$):

$$\begin{aligned} t_s &= -\sum_{j=1}^{n-1} l_j + s, \\ t_j &= l_j, \qquad\qquad j \neq s. \end{aligned}$$

Заметим, что при таком преобразовании множество $I(\sigma)$, $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_s, \dots, p_{n-1})$, переходит в $I(\sigma')$, где перестановка $\sigma' = (p_s, p_1, \dots, p_0, \dots, p_{n-1})$ получается из σ переменой мест p_0 и p_s. В частности, $(-1)^{\#\sigma} = -(-1)^{\#\sigma'}$. Кроме того, $A(\mathbf{l}) = A(\mathbf{t}) + s(-t_s - \sum_{j=1}^{n-1} t_j + s)$. Тогда

$$F_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q) = \\ = -\sum_{\sigma' \in S_n} (-1)^{\#\sigma'} \sum_{\mathbf{t} \in I(\sigma')} (y_s q^s)^{-t_s - \sum_{j=1}^{n-1} t_j + s} (y_1^{t_1} \dots y_{n-1}^{t_{n-1}}) q^{A(t)},$$

Как легко видеть, если $y_s = q^{-s}$, то F_n обращается в 0. Вместе с соотношением (i) леммы 1 это влечет, что F_n обращается в 0, если $y_s = q^{-s+mn}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Аналогично разбирается случай, когда $y_s y_k^{-1} = q^{k-s+mn}$, для $1 \leqslant k$, $s \leqslant n-1$, $m \in \mathbf{Z}$. При этом следует рассмотреть замену переменных

$$\begin{aligned} t_s &= l_k + s - k, \\ t_k &= l_s + k - s, \\ t_j &= l_j, \quad j \neq s, \quad j \neq s, \end{aligned}$$

что соответствует для каждой перестановки $\sigma = (p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ перемене местами p_k и p_s. Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 следует, что функция

$$h_n(\mathbf{z}, \tau) = F_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q) / G_n(y_1, \dots, y_{n-1}, q) \tag{9}$$

не имеет особенностей в $\mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{H}$. Очевидно, что она инвариантна относительно сдвигов $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \mathbf{m}$, $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^{n-1}$. По лемме

1 она также инвариантна относительно сдвигов $\mathbf{z} \leftarrow \mathbf{z} + \mathbf{m} + \Omega$, $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^{n-1}$. Значит, для фиксированного $\tau \in \mathbf{H}$ функция $h_n(\cdot, \tau)$ – целая ограниченная в $\mathbf{C}^{n-1}$ функция. По теореме Лиувилля, она не зависит от $\mathbf{z}$. Таким образом, мы можем писать $h_n(\tau)$ вместо $h_n(\mathbf{z}, \tau)$. Кроме того, h_n аналитична в $\mathbf{H}$. В следующем параграфе мы найдем явный ее вид.

Определение $h_n(\tau)$.

В доказательстве Макдональда [7], проверка того, что не зависящее от $y_1, \ldots, y_{n-1}$ отношение (в наших обозначениях)

$$F_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, q)\big/G_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, q)$$

совпадает с $H_n(q)$, была основана на том, что один и тот же ряд получается при двух различных специализациях значений $y_1, \ldots, y_{n-1}$ в ряде $F_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, q)$. Мы приведем другое доказательство, по-видимому, являющееся новым.

Пусть, как и выше, $q = \exp \pi i \tau$, $y_j = \exp 2\pi i z_j$, $j = 1, \ldots, n-1$. Заметим, что правая часть тождества (6) удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\mathcal{L}\, F_n = 0, \tag{10}$$

где оператор $\mathcal{L}$ определен следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{4\pi i}\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n-1} \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial z_j}\right). \tag{11}$$

Поскольку функция G_n представлена в виде бесконечного произведения, более удобным оказывается логарифмический аналог (10). Пусть V – достаточно малая окрестность в $\mathbf{R}^{n-1}$ точки $\mathbf{z} = (0, \ldots, 0)$. Так как $F_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, q) \to 1$, $G_n(y_1, \ldots, y_{n-1}, q) \to 1$ при $\operatorname{Im} \tau \to \infty$ равномерно по $\mathbf{z} \in V$, то можно подобрать $T > 0$ такое, что при $(\mathbf{z}, \tau) \in U = V \times \{\tau : it\tau > T\}$ значения функции F_n, G_n и каждого сомножителя G_n положительны. Тогда в U справедливо

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \ln F_n &- \frac{1}{4\pi i} \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \ln F_n\right)^2 \\ &- \frac{1}{4\pi i} \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n-1} \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \ln F_n\right)\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \ln F_n\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя в (12) $h_n G_n$ вместо F_n, мы получаем, что функция h_n определяется из условия

$$\frac{d}{d\tau}\ln h_n = \Big(-\mathcal{L}\ln G_n + \frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\ln G_n\Big)^2$$
$$+\frac{1}{4\pi i}\sum_{1\leqslant k<j\leqslant n-1}\Big(\frac{\partial}{\partial z_k}\ln G_n\Big)\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\ln G_n\Big)\Big)\Big|_{z_1=\ldots=z_{n-1}=0}.$$

Учитывая определение G_n, все логарифмические производные в правой части можно представить в виде (абсолютно сходящихся) рядов. После стандартных, но довольно громоздких преобразований, которые мы опускаем (все операции законны, так как ряды сходятся абсолютно), получаем, что

$$\frac{d}{d\tau}\ln h_n(\tau) = (n-1)\sum_{m\geqslant 1}\frac{-\pi i m n q^{mn}}{1-q^{mn}} = (n-1)\sum_{m\geqslant 1}\frac{d}{d\tau}\ln(1-q^{mn}).$$

Следовательно, при $tau = it$, $t > T$ выполнено равенство

$$h_n(\tau) = cH_n(\exp \pi i\tau) \tag{13}$$

для некоторой константы c. Положим в (9) $z_1 = \ldots = z_{n-1} = 0$ и $\tau = it$, $t\to+\infty$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{t\to\infty} h_n(it) = \lim_{t\to\infty} H_n(\exp(-\pi t)) = 1.$$

Значит, $h_n(\tau) = H_n(\exp \pi i\tau)$ при $\tau = it$, $t > T$. Так как $h_n(\tau)$ и $H_n(\exp \pi i\tau)$ аналитические в $\mathbf{H}$ функции, то отсюда следует, что они тождественно совпадают в $\mathbf{H}$, что завершает доказательство предложения 1, а вместе с ним и теоремы 1.

Замечание 4. В случае $n = 2$ (т.е. для тождества Гаусса–Якоби) известен еще один способ определения множителя h_n (подробное изложение этого метода и необходимые определения можно найти, например, в [8, гл. 1]). А именно, при $q = \exp \pi i\tau$, $y = \exp 2\pi i z$ функция $F_2(y,q)$ – это тэта-функция $\theta_{01}(z,\tau)$. Хорошо известна формула Якоби для производных, связывающая тэта-функции с характеристиками (т.е. функции, полученные из θ_{00} при помощи сдвига аргумента z):

$$\frac{\partial}{\partial z}\theta_{11}(z,\tau)\Big|_{z=0} = -\pi\theta_{00}(0,\tau)\theta_{01}(0,\tau)\theta_{10}(0,\tau). \tag{14}$$

Функции θ_{ab} также можно представить в виде произведения h_2 и функций, полученных из G_2 при помощи сдвига аргумента. Подставляя эти представления в (14), получим, что $h_n(\tau)^2 = H_n^2(\exp \pi i\tau)$, т.е. равенство (13) имеет место с $c = \pm 1$. Переходя, как и выше, к пределу, получим, что на самом деле, $c = 1$. Если бы удалось найти подходящие обобщения дифференциального тождества Якоби, то их можно было бы применить (вместо уравнения теплопроводности) для нахождения множителя h_n. Оказывается, можно действовать в обратном направлении: получать дифференциальные тождества для тэта-функций при помощи подходящей интерпретации тождеств Макдональда. При этом удается получить частичные ответы, на вопросы Мамфорда (см. [8, гл. 1]). Этому исследованию будет посвящена отдельная публикация.

Замечание 5. Приведенное доказательство может быть перенесено и на общий случай тождеств Макдональда, отвечающих подалгебрам алгебр Каца–Муди с матрицами Картана ранга $n-1$ с неотрицательными собственными значениями (см. [9, гл. 3, §2]). В этом случае возникают лишь чисто технические сложности (например, при обобщении леммы 2).

Замечание 6. Кратко поясним, как можно модифицировать приведенное доказательство, чтобы исключить аналитические аргументы. Вообще говоря, подстановки вида $y_j \leftarrow y_1^{a_1} \dots y_{n-1}^{a_{n-1}} q^b$ нельзя применять к рядам из $R = \mathbf{C}[y_1, \dots, y_{n-1}, y_1^{-1}, \dots, y_{n-1}^{-1}]((q))$. Однако, в нашем сдучае все рассматриваемые ряды (в произведения) обладают дополнительным свойством: степень коэффициента при q^n имеет порядок $O(\sqrt{n})$. (Под степенью монома $y_1^{l_1} \dots y_{n-1}^{l_{n-1}}$ с *целыми* $l_1, \dots, l_{n-1}$ мы понимаем $|l_1| + \dots + |l_{n-1}|$.) Для таких рядов указанные выше подстановки (для фиксированных a_j, b) возможны, и получающийся в результате ряд вновь обладает этим свойством. Поэтому, леммы 1 и 2 остаются справедливыми и для формальных рядов. При определении множителя $h_n(q)$ мы также можем оперировать лишь с рядами. При этом вместо $\frac{1}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau}$ и $\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z_j}$ следует рассматривать дифференциальные операторы $q\frac{\partial}{\partial q}$ и $y_j\frac{\partial}{\partial y_j}$, соответственно, действующие в R. По-видимому, наиболее сложным с технической точки зрения является формальный аналог рассуждений, основанных на теореме Лиувилля.

Автор благодарит А. М. Вершика за проявленное внимание к работе и советы, способствовашие ее написанию. Автор также благодарит Ю. М. Базлова за полезные обсуждения данного вопроса.

Работа выполнена при поддержке ISSEP (грант а96-1965).

Литература

1. Ю. М. Базлов, *Гомологии градуированных бесконечномерных алгебр Ли в связи с тождествами Макдональда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **240** (1994), стр. ???.
2. А. М. Вершик, *Биективное доказательство тождества Якоби и перестойки диаграмм Юнга.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **155** (1986), 3–6.
3. H. Garland, J. Lepowsky, *Lie algebra and the MacDonald–Kac formulas.* — Invent. Math. **34** (1976), 37–76.
4. З. Л. Лейбензон, *Простой комбинаторный метод для доказательства тождества Якоби и его обобщений.* — Функц. анализ и прилож. **20** (1986), 77–78.
5. J. Lepowsky, *Generalized Verma modules, loop space and MacDonald-type identities.* — Ann. l'École Norm. Sup. **12, No. 2** (1979), 169–234.
6. E. Looijenga, *Root systems and elliptic curves.* — Invent. Math. **38, No. 1** (1976), 17–32.
7. G. McDonald, *Affine root sistems and Dedekind's η-functions.* — Invent. Math. **15, No. 2** (1972), 91–143.
8. Д. Мамфорд, *Лекции о тэта-функциях.* Мир., М (1988).
9. Д. Б. Фукс, *Когомологии бесконечномерных алгебр Ли.* Наука, М. (1984).
10. В. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли.* М. (1993).

Vsemirnov M. A. Macdonald identities and multidimensional theta-functions.

A new proof of the combinatorial Macdonald identities is presented. It is shown that one may regard these identities as decomposition of multidimensional theta-functions into infinite products. The proof is pased ob some analytical properties of theta-functions. It is discussed briefly now one may modify the proof in order to replace analytical reasonings by the formal ones involving only operations with formal series.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова

Поступило 21 ноября 1996 г.