Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Михаил Гордин и Манфред Денкер

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ГАУССОВОСТЬ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ ПОВОРОТА ОКРУЖНОСТИ

С. Сибони [7] ввел в рассмотрение следующее семейство $\{T_{\epsilon,\omega}\}$ преобразований двумерного тора $\mathbb{T}^2$: преобразование $T_{\epsilon,\omega}$, где $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, имеет вид

$$T_{\epsilon,\omega} : (x, y) \to (2x, y + \omega + \epsilon x) \mod 1.$$

Здесь x, y – координаты на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, отображающие его на $[0, 1) \times [0, 1)$.
$T_{\epsilon,\omega}$ является, таким образом, косым произведением, в базе которго действует эндоморфизм $S : x \mapsto 2x$ окружности $\mathbb{T}$, а в слое над точкой $x \in \mathbb{T}$, также являющемся окружностью, производится поворот на зависящий от x угол. Мера Хаара на $\mathbb{T}^2$ является инвариантной мерой для $T_{\epsilon,\omega}$. Данное семейство было предложено в [7] в качестве модели случайного возмущения частоты в одночастотной гамильтоновой системе. Там же было доказано, что $T_{\epsilon,\omega}$ является перемешивающим преобразованием тогда и только тогда, когда ϵ иррационально. Что касается дальнейшего исследования эргодических и вероятностных свойств таких преобразований, в частности, центральной предельной теоремы, то в [7] эти вопросы упомянуты (там, в частности, дается физическая интерпретация дисперсии предельного гауссового распределения в гипотетической центральной предельной теореме), но оставлены открытыми.

У. Парри в [5] доказал, в частности, что $T_{\epsilon,\omega}$ является точным эндоморфизмом, если ϵ иррационально. Возникающий в рамках проблематики метрической классификации пребразований $T_{\epsilon,\omega}$ вопрос о том, не являются ли все такие преобразования односторонними сдвигами Бернулли, оказался нетривиальным. При

Работа выполнялась в рамках российско-германского проекта РФФИ – ННИО, грант 96-01-00096. Первому автору оказывалась также поддержка по гранту РФФИ 96-01-00672.

дополнительных условиях на ϵ утвердительный ответ был получен в [6].

В настоящей заметке анонсируется вариант функциональной центральной предельной теоремы для $T_{\epsilon,\omega}$. Примененный в доказательстве этого результата метод мартингальной аппроксимации, восходящий к [2], позволяет оставить в стороне основные проблемы эргодической теории преобразований $T_{\epsilon,\omega}$ и требует только иррациональности ϵ. Класс функций, к которым приложима теорема, зависит от диофантовых свойств числа ϵ.

Формулировка основной теоремы

Пусть $(X, \mathcal{M}, P)$ – вероятностное пространство, $T : X \to X$ – измеримое сохраняющее вероятность P преобразование, f – измеримая вещественная функция. Построим для каждого $n \geqslant 1$ случайную ломаную $J_n f$ на $[0,1]$, линейную на интервалах вида $[(m-1)/n, m/n]$ и такую, что $(J_n f)(m/n) = n^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{m-1} f \circ T^l$ при $m = 1, ..., n$ (имеется в виду, что $J_n f(0) = 0$). Будем говорить, что f подчиняется функциональной центральной предельной теореме с предельной дисперсией σ^2, если распределение случайной ломаной $J_n f$, рассматриваемое как вероятностная мера на пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций на [0,1], слабо сходится при $n \to \infty$ к мере Винера с параметром σ^2. Под параметром меры Винера понимается здесь дисперсия значения $w(1)$ соответствующего винеровского процесса $w(\cdot)$, а слабая сходимость означает, как обычно, сходимость интегралов от любой ограниченной непрерывной функции.

Пусть теперь $X = \mathbb{T}^2$, $\mathcal{M} = \mathcal{B}^2$ - σ-алгебра борелевских множеств $\mathbb{T}^2$, P - мера Хаара на $\mathbb{T}^2$ (интегралы по ней будут записываться в виде $\int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)dxdy$) и $T = T_{\epsilon,\omega}$ для некоторых ω и ϵ. Гильбертовы пространства квадратично суммируемых относительно меры Хаара функций на $\mathbb{T}^2$ и $\mathbb{T}$ будут обозначаться, соответственно, через $\mathrm{L}_2(\mathbb{T}^2)$ и $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$. Для $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{T}^2)$ и $k \in \mathbb{Z}$ определим $f_k \in \mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ равенством

$$(f_k)(x) = \int_{\mathbb{T}} \exp(-2\pi i k y) f(x,y) dy,$$

где интеграл берется относительно меры Хаара на $\mathbb{T}$. При каждом $k \in \mathbb{Z}$ оператор $W_k = W_{k,\epsilon,\omega}$ действует в $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ согласно формуле

$$(W_k g)(x) = \frac{1}{2}\Big(g\Big(\frac{x}{2}\Big)\chi_k\Big(-\epsilon\frac{x}{2}-\omega\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\chi_k\Big(-\epsilon\frac{x+1}{2}-\omega\Big)\Big),$$

где $\chi_k(z) = \exp(2\pi i k z)$. Далее, пусть $\mathcal{B}_n$ – σ-алгебра подмножеств $\mathbb{T}$, порожденная всеми интервалами вида $\{x : l/2^n \leqslant x < (l+1)/2^n)\}$, где $0 \leqslant l \leqslant 2^n - 1$, и $\mathrm{L}_2(\mathcal{B}_n)$ – подпространство $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$, состоящее из $\mathcal{B}_n$-измеримых функций. Оператор условного математического ожидания относительно $\mathcal{B}_n$ обозначим через $E(\cdot|\mathcal{B}_n)$.

Теорема: Если вещественная функция $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{T}^2)$ и иррациональное число $\epsilon \in \mathbb{R}$ таковы, что выполнены следующие условия:
1) $\int_{\mathbb{T}^2} f(x,y)dxdy = 0$,
2) $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\big(\sum_{n\geqslant 0}\|f_k - E(f_k|\mathcal{B}_n)\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})}\big)^2 < \infty$,
3) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^2\|f_k\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})} < \infty$,
4) $\sum_{k\in\mathbb{Z},k\neq 0} < 2k\epsilon >^{-4} \|f_k\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})} < \infty$
(здесь $< \cdot >$ – расстояние до ближайшего целого), то для функции f и преобразования $T_{\epsilon,\omega}$ справедлива функциональная центральная предельная теорема. Параметр σ^2 предельного гауссового процесса определяется равенством

$$\sigma^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big(\|\sum_{n\geqslant 0} W_k^n f_k\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})} - \|\sum_{n\geqslant 1} W_k^n f_k\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})}\Big),$$

причем ряды в правой части равенства являются сходящимися.
Следствие: функциональная центральная предельная теорема применима, если наряду с условиями 1), 2) Теоремы выполнены следующие предположения 5) и 6):
5) для некоторого $\delta > 0$ $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k^{4+\delta}\|f_k\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathbb{T})} < \infty$,
6) $\epsilon \in \mathbb{R}$ таково, что $|q\epsilon - p| > C|q|^{-(1+\delta)}$ для некоторого $C = C(\epsilon,\delta) > 0$ и для любых $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$.
В самом деле, ясно, что 3) следует из 5), и 4) имеет место, если выполнены 5) и 6).
Отметим, что условие 5), в свою очередь, выполнено для любого иррационального алгебраического ϵ (теорема Туе-Зигеля-Рота [4]), и для почти всех $\epsilon \in \mathbb{R}$ (как следствие более сильного утверждения метрической теории диофантовых приближений ([4])).

В условиях сформулированной выше Теоремы справедливо более точное заключение, показывающее, что отдельные гармоники в разложении $f(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_k(x)\exp(2\pi iky)$ дают независимые вклады в предельное гауссово распределение. Точная формулировка этого утверждения и его доказательство будут предметом отдельной публикации.

Литература

1. А.Н. Бородин, И.А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий. Труды МИ РАН CXCV.* СПб:"Наука", 1994.
2. М.И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов.* — Доклады АН СССР **188** (1969), 739 - 741.
3. М.И. Гордин, Б.А. Лифшиц, *Центральная предельная теорема для стационарных процессов Маркова.* — Доклады АН СССР **239** (1978), 766 - 767.
4. Дж.В.С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* М.:ИЛ, 1961.
5. W. Parry, *Ergodic properties of a one-parameter family of skew-products..* — Nonlinearity **8** (1995), 821–825..
6. W. Parry, *Automorphisms of the Bernoully endomorphisms and a class of skew-products.* — Ergodic theory and dynamical systems **16** (1996), 519 – 529..
7. S. Siboni, *Ergodic properties of a class of skew-systems obtained by coupling the translation of the 1-torus with the endomorphism $2x$ mod 1..* — Nonlinearity **7** (1994), 1133–1141.

Denker M., Gordin M. Asymptotically Gaussian distribution for random perturbations of rotations of the circle.

Let $T_{\epsilon,\omega}$ be a self-map of the two dimensional torus $\mathbb{T}^2$ given by the formula $T_{\epsilon,\omega} : (x,y) \to (2x, y+\omega+\epsilon x)$ mod 1. If ϵ is an irrational number, a version of the functional central limit theorem is formulated for variables of the form $n^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} f\circ T_{\epsilon,\omega}^k$ where f is a member of a class of real valued functions on $\mathbb{T}^2$ described in terms of ϵ. The proof will be published elsewhere.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 сентября 1996 г.

Институт математической стохастики
Геттингенского университета