Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

**В. Н. Иванов**

# БИСФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НА СИММЕТРИЧЕСКОЙ ГРУППЕ, СВЯЗАННЫЕ С ГИПЕРОКТАЭДРАЛЬНОЙ ПОДГРУППОЙ

## §0. Введение

Рассмотрим пару, состоящую из симметрической группы $S_{2n}$ степени $2n$ и ее гипероктаэдральной подгруппы $B_n$ (группы Вейля типа $B_n$. Как хорошо известно (см., например, [1, Appendix 1] или [2, VII.2), пара $(S_{2n}, B_n)$ является парой Гельфанда, а ее (неразложимые) сферические функции связаны с функциями Джека с параметром $\alpha = 2$ подобно тому, как неприводимые характеры симметрической группы связаны с функциями Шура.

В работе Стимбриджа [4] изучены другие сферические функции пары $(S_{2n}, B_n)$, а именно, матричные элементы вида

$$g \mapsto (\pi(g)\xi, \xi),$$

где $\pi$ – неприводимое представление группы $S_{2n}$, а $\xi$ – вектор, преобразующийся по характеру

$$\delta : B_n \to \{-1, 1\},$$

нетривиальному на подгруппе $S_n \subset B_n$.

В настоящей работе рассматриваются сферические функции третьего типа. Это матричные элементы вида

$$g \mapsto (\pi(g)\xi, \eta),$$

где вектор $\eta$ предполагается $B_n$-инвариантным, а вектор $\xi$ – $B_n$-антиинвариантным (последнее означает, что вектор $\xi$ преобразуется по сигнатурному характеру

$$\mathrm{sgn} : S_{2n} \to \{-1, 1\},$$

суженному на подгруппу $B_n$; отметим, что этот характер тривиален на подгруппе $S_n \subset B_n$). Такие функции мы называем *бисферическими*, поскольку они определяются векторами двух различных типов.

При поддержке Международной Соросовской Программы Образования - грант 2093c.

Неприводимое представление $\pi$ группы $S_{2n}$ обладает одновременно $B_n$-инвариантом и $B_n$-антиинвариантом тогда и только тогда, когда в соответствующей диаграмме Юнга все строки и все столбцы имеют четную длину. Это означает, что $n$ должно быть четно ($n = 2m$), а диаграмма имеет вид

$$2\lambda \cup 2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \ldots),$$

где $\lambda \vdash m$ – некоторое разбиение числа $m$.

Основной результат состоит в том, что бисферические функции пары $(S_{4m}, B_{2m})$ по существу совпадают с неприводимыми характерами $\chi^\lambda$ группы $S_n$. В доказательстве мы следуем подходу Стимбриджа [4], однако конкретные вычисления достаточно сильно отличаются от вычислений в [4].

Наш результат можно связать со следующим фактом, отмеченным в [3]: бисферические функции на группе $GL(2n)$, связанные с парой подгрупп $O(2n)$, $Sp(2n)$, по существу, совпадают с функциями Шура от $n$ переменных.

Автор глубоко благодарен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## §1. Обозначения и предварительные сведения

Пусть $S_{2n}$ – группа перестановок множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, а $B_n$ –гипероктаэдральная подгруппа в $S_{2n}$, то есть централизатор перестановки

$$(1, 2)(3, 4) \ldots (2n-1, 2n).$$

Число элементов подгруппы $B_n$, обозначаемое далее через $|B_n|$, равно $2^n n!$.

Двойные классы смежности группы $S_{2n}$ по ее подгруппе $B_n$ параметризуются разбиениями числа $n$ [4], [1, A1.3]. Выберем канонических представителей из этих классов следующим образом: пусть $\nu$ – разбиение числа $n$,

$$\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_k),$$

тогда определим элемент $\omega_\nu$ группы $S_{2n}$ равенством

$$\omega_\nu = (1, 2, \ldots, 2\nu_1)(2\nu_1 + 1, \ldots, 2\nu_1 + 2\nu_2) \ldots (2n - 2\nu_k + 1, \ldots, 2n).$$

Эта формула действительно определяет представителей различных двойных классов смежности. Обозначим через $l(\nu)$ число ненулевых частей разбиения $\nu$, через $m_i(\nu)$ число частей разбиения

$\nu$, равных $i$, а через $z_\nu$ следующее выражение:

$$z_\nu = \prod_{i\geqslant 1} i^{m_i(\nu)} m_i(\nu)!.$$

Отметим, что если $k$ – натуральное число, то

$$z_{k\nu} = k^{l(\nu)} z_\nu. \tag{1.1}$$

Можно показать, что число элементов в двойном классе смежности $B_n\omega_\nu B_n$ равно $|B_n|^2/z_{2\nu}$ (например, [4]).

Обозначим через $\pi^\mu$ неприводимое представление группы $S_{2n}$, отвечающее разбиению $\mu$ числа $2n$, а через $V^\mu$ – пространство представления $\pi^\mu$. Ненулевой вектор $v$, принадлежащий пространству $V^\mu$, называется $B_n$-*инвариантом*, если

$$\pi^\mu(x)v = v, \quad \forall x \in B_n,$$

а $B_n$-*антиинвариантом*, если

$$\pi^\mu(x)v = \operatorname{sgn}(x)v, \quad \forall x \in B_n,$$

где $\operatorname{sgn}(x)$ обозначает знак перестановки $x$.

У представления $\pi^\mu$ есть $B_n$-инвариант тогда и только тогда, когда все строки разбиения $\mu$ четны [1, 2]. Отсюда следует, что у представления $\pi^\mu$ есть $B_n$-антиинвариант тогда и только тогда, когда все столбцы разбиения $\mu$ четны. Итак, наличие у представления $\pi^\mu$ одновременно $B_n$-инварианта и $B_n$-антиинварианта равносильно тому, что все строки и все столбцы разбиения $\mu$ четны. Иначе говоря, $n = 2m$ для некоторого натурального числа $m$, и $\mu$ можно представить в виде

$$\mu = 2\lambda \cup 2\lambda = (2\lambda_1, 2\lambda_1, 2\lambda_2, 2\lambda_2, \ldots).$$

В этом случае $\xi$ и $\eta$ будут обозначать $B_n$-антиинвариант и $B_n$-инвариант соответственно; они определены с точностью до пропорциональности. Обозначим через $\theta^\lambda$ матричный элемент, соответствующий векторам $\xi$ и $\eta$:

$$\theta^\lambda(g) = (\pi^{2\lambda\cup 2\lambda}(g)\xi, \eta), \quad \forall g \in S_{2n}.$$

Будем также называть матричный элемент $\theta^\lambda$ *бисферической функцией*.

Для любых перестановок $x_1$ и $x_2$, принадлежащих подгруппе $B_n$, выполняется соотношение

$$\theta^\lambda(x_1 g x_2) = \operatorname{sgn}(x_2)\theta^\lambda(g) \tag{1.2}$$

Поэтому достаточно знать значения бисферической функции только на канонических представителях двойных классов смежности.

Отметим, что

$$\theta^\lambda(e) = 0,$$

поэтому нормировать функцию $\theta^\lambda$ в терминах значения $\theta^\lambda(e)$ нельзя.

## §2. Вычисление бисферической функции в простейших случаях

**Предложение 2.1.** *Пусть $\lambda$ – разбиение числа $m$, а $\nu$ – разбиение числа $2m$. Если*

$$\theta^\lambda(\omega_\nu) \neq 0,$$

*то все части разбиения $\nu$ четны.*

**Доказательство.** Пусть

$$\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$$

и число $\nu_l$ нечетно для некоторого индекса $l$.

Достаточно показать, что существуют такие перестановки $x_1$ и $x_2$, принадлежащие подгруппе $B_{2m}$, что выполнены соотношения

$$x_1 \omega_\nu x_2 = \omega_\nu \tag{2.1}$$

и

$$\operatorname{sgn}(x_2) = -1. \tag{2.2}$$

Мы увидим, что такие перестановки $x_1$ и $x_2$ можно выбрать так, чтобы они переставляли лишь числа в множестве

$$\{2\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + 2\nu_{l-1} + 1, \dots, 2\nu_1 + 2\nu_2 + \ldots + 2\nu_{l-1} + 2\nu_l\},$$

которые составляют в перестановке $\omega_\nu$ цикл длины $2\nu_l$.

Без ограничения общности можно считать, что $\nu = (p)$ где $p$ нечетно, и искать элементы $x_1$ и $x_2$ в подгруппе $B_p \subset S_{2p}$. Выберем эти перестановки следующим образом:

$$x_1 = (1,2)\prod_{i=3}^{p+1}(i, 2p+3-i),$$

$$x_2 = \prod_{i=1}^{p}(i, 2p+1-i).$$

Тогда они принадлежат подгруппе $B_p$ и выполнены соотношения

$$\operatorname{sgn}(x_2) = -1,$$

и

$$x_1\omega_{(p)}x_2 = \omega_{(p)}.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем, что существуют такие элементы $x_1$ и $x_2$, принадлежащие подгруппе $B_n$ такие, что выполнены соотношения (2.1) и (2.2). Тогда выполняются равенства

$$\theta^\lambda(\omega_\nu) = \theta^\lambda(x_1\omega_\nu x_2) = -\theta^\lambda(\Omega_\nu).$$

Поэтому

$$\theta^\lambda(\omega_\nu) = 0$$

и предложение доказано. □

Согласно Предложению 2.1, функция $\theta^\lambda$ однозначно определяется своими значениями на элементах вида $\omega_{2\nu}$, где $\nu \vdash m$. В следующем предложении вычисляем $\theta^\lambda(\omega_{2\nu})$ для произвольных разбиений $\nu$ числа $m$ и простейшего $\lambda = (m)$.

**Предложение 2.2.** *Пусть $\nu$ – произвольное разбиение числа $m$, тогда выполнено равенство*

$$\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}) = 2^{l(\nu)}\,\mathrm{const},$$

*где* const *– ненулевая постоянная, зависящая от нормировки векторов $\xi$, $\eta$.*

**Доказательство.** Отметим сначала, что функция $\theta^{(m)}$ отлична от тождественно нулевой, поскольку является матричным элементом неприводимого представления.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех $n$-элементных подмножеств в $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ $(n = 2m)$. Рассмотрим векторное пространство $V$ формальных линейных комбинаций элементов $\mathcal{A}$ с коэффициентами из поля $\mathbb{C}$. Группа $S_{2n}$ действует в $\{1, \ldots, 2n\}$ и, тем самым, в $\mathcal{A}$. Определим в пространстве $V$ представление $\pi$ группы $S_{2n}$ по формуле

$$\pi(g)M = gM, \quad g \in S_{2n}, \quad M \in \mathcal{A}.$$

Представление $\pi$ индуцировано тривиальным представлением подгруппы $S_n \times S_n \subset S_{2n}$. Поэтому (см. [2, гл.I, Замечание после (7.8)] его разложение на неприводимые компоненты имеет вид

$$\pi = \pi^{(n,n)} \oplus \left( \bigoplus_{p=n+1}^{2n} c_p \pi^{p,2n-p)} \right),$$

где $c_p$ суть некоторые кратности, точное значение которых нам не важно. Нам будет удобно рассматривать $\pi^{(n,n)}$ как подпредставление в $\pi$.

В написанном разложении $\pi^{(n,n)}$ является единственной компонентой, обладающей $B_n$-антиинвариантным вектором, поскольку в двустрочечных диаграммах $(p, 2n-p)$ с $p \geqslant n+1$ не все столбцы четны. Поэтому подпространство $B_n$-антиинвариантов в $V$ одномерно и лежит в компоненте $\pi^{(n,n)}$.

Множество $\mathcal{A}$ может быть разложено на орбиты группы $B_n$:

$$\mathcal{A} = \bigcup_{r=0}^{n} \mathcal{A}_r,$$

где

$$\mathcal{A}_r = \{\mathcal{M} \in \mathcal{A} | M \text{ содержит ровно } r \text{ пар вида } (2k-1, 2k)\}.$$

Определим функцию

$$\operatorname{sgn} : \mathcal{A}_0 \to \{-1, 1\}$$

равенством

$$\operatorname{sgn}(\mathcal{M}) = (-1)^{\operatorname{card}(M \cap \{1,3,\ldots,2n-1\})}, \; M \in \mathcal{A}_0.$$

Вектор

$$\xi = \sum_{M \in \mathcal{A}_0} \operatorname{sgn}(M) M$$

является $B_n$-антиинвариантным, а вектор

$$\zeta = \sum_{M \in \mathcal{A}_0} M$$

является $B_n$-инвариантом.

Тогда матричный элемент, связанный с векторами $\xi$ и $\zeta$:

$$g \mapsto (\pi(g)\xi, \zeta), \quad g \in S_{4m},$$

очевидно пропорционален функции $\theta^{(m)}$.

Найдем значение $(\pi(\omega_{2\nu})\xi, \zeta)$ для произвольного разбиения $\nu$ числа $m$. По определению скалярного произведения имеем равенство

$$(\pi(\omega_{2\nu})\xi, \zeta) = \sum_{M \in \mathcal{A}_0, \omega_{2\nu} M \in \mathcal{A}_0} \operatorname{sgn}(M).$$

Выясним, в каком случае множество $M \in \mathcal{A}_0$ таково, что $\omega_{2\nu} M \in \mathcal{A}_0$. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu = (m)$. Тогда таких множеств только два:

$$M' = \{2k-1 | 1 \leqslant k \leqslant 2m\} \quad \text{и} \quad M'' = \{2k | 1 \leqslant k \leqslant 2m\}.$$

Отметим равенство

$$\operatorname{sgn}(M') = \operatorname{sgn}(M'') = 1.$$

Переходим теперь к общему случаю: $\nu$ – произвольное разбиение числа $m$. Обозначим через $L_i$ множество

$$\{k | 4\nu_1 + \ldots 4\nu_{i-1} + 1 \leqslant k \leqslant 4\nu_1 + \ldots + 4\nu_{i-1} + 4\nu_i\}$$

для $i = 1, \ldots, l(\nu)$. Если $M \in \mathcal{A}_0$ таково, что $\omega_{2\nu}$, $M \in \mathcal{A}_0$, то аналогично рассмотренному выше простейшему случаю, мы получаем, что для множества $M \cap L_i$ существуют ровно две возможности:

$$M \cap L_i = \{4\nu_1 + \ldots + 4\nu_{i-1} + 2k - 1 | 1 \leqslant k \leqslant 2\nu_i\}$$

или

$$M \cap L_i = \{4\nu_1 + \ldots + 4\nu_{i-1} + 2k | 1 \leqslant k \leqslant 2\nu_i\}.$$

Поэтому

$$\operatorname{sgn}(M) = 1$$

и число таких множеств $M \in \mathcal{A}_0$ , что $\omega_{2\nu} M \in \mathcal{A}_0$, ровно $2^{l(\nu)}$. Отсюда получаем равенство

$$(\pi(\omega_{2\nu})\xi, \zeta) = 2^{l(\nu)},\ \nu \vdash m.$$

Предложение доказано. □

Пусть $\lambda$ – произвольное разбиение числа $m$, тогда представление $\pi^{2\lambda \cup 2\lambda}$ имеет одновременно $B_{2m}$-инвариант и $B_{2m}$-антиинвариант. В дальнейшем в этом случае через $\xi$ и $\eta$ мы будем обозначать $B_{2m}$-антиинвариант и $B_{2m}$-инвариант соответственно, выбранные таким образом, что они нормированы:

$$(\xi, \xi) = (\eta, \eta) = 1$$

и выполнено неравенство

$$\theta^{\lambda}(\omega_{(2^m)}) = (\pi^{2\lambda \cup 2\lambda}(\omega_{(2^m)})\xi, \eta) \geqslant 0, \tag{2.3}$$

где $(2^m)$ – это разбиение числа $2m$, состоящее только из двоек. Если значение $\theta^{\lambda}(\omega_{(2^m)})$ равно нулю, то сама функция $\theta^{\lambda}$ определена с точностью до умножения на комплексное число, модуль которого равен единице. На самом деле, $\theta^{\lambda}(\omega_{(2^m)})$ всегда отлично от нуля, это будет доказано в §3.

Пусть $\mu$ – произвольное разбиение числа $n$, тогда введем число $H_\mu$ равенством

$$H_\mu = \frac{|S_n|}{\dim V^\mu}. \tag{2.4}$$

Значение $H_\mu$ можно вычислить по формуле, приведенной в [2, I7, пример 6]:

$$H_\mu = \frac{\prod\limits_{i=1}^{l(\mu)} (\mu_i + l(\mu) - i)!}{\prod\limits_{i<j\leqslant l(\mu)} (\mu_i - \mu_j + j - i)}.$$

В пространстве комплекснозначных функций на $S_n$ мы вводим скалярное произведение

$$\langle f, h\rangle = \sum_{x \in S_n} f(x)\overline{h(x)}. \tag{2.5}$$

Теперь мы можем найти константу, участвующую в формулировке Предложения 2.2.

**Предложение 2.3.** *Пусть $\nu$ – произвольное разбиение числа $m$, тогда выполнено равенство*

$$\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}) = 2^{l(\nu)} \frac{\sqrt{2m+1}}{4^m}.$$

**Доказательство.** Обозначим искомую константу через $c$, то есть имеем равенство

$$\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}) = 2^{l(\nu)} c.$$

Тогда получаем соотношения

$$\langle \theta^{(m)}, \theta^{(m)} \rangle = |c|^2 \sum_{\nu \vdash m} \frac{|B_{2m}|}{z_{4\nu}} 4^{l(\nu)} = |c|^2 |B_{2m}|^2.$$

С другой стороны, из соотношений ортогональности для матричных элементов и равенства (2.4) следуют соотношения

$$\langle \theta^{(m)}, \theta^{(m)} \rangle = \frac{|S_{4m}|}{\dim V^{(2m,2m)}} = H_{(2m,2m)}.$$

Поэтому мы можем найти $|c|$:

$$|c| = \frac{H_{(2m,2m)}^{\frac{1}{2}}}{|B_{2m}|} = \frac{(2m)!\sqrt{2m+1}}{4^m (2m)!} = \frac{\sqrt{2m+1}}{4^m}.$$

Из доказательства Предложения 2.2 следует, что

$$\theta^{(m)}(\omega_{(2^m)}) \neq 0.$$

Поэтому

$$c = |c| = \frac{\sqrt{2m+1}}{4^m}.$$

Предложение доказано. □

## §3. Характеристическое отображение

Предварительно докажем утверждение, дополняющее Предположение 2.1. Это утверждение следует из Предложения 2.2.

**Предложение 3.1.** *Пусть $\nu$ – произвольное разбиение числа $m$; если выполнено равенство*

$$x\omega_{2\nu}y = \omega_{2\nu}, \quad x, y \in B_{2m},$$

*то перестановки $x$ и $y$ являются четными.*

**Доказательство.** Отметим, что из Предложения 2.2 следует, что

$$\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}) \neq 0.$$

С другой стороны, если $x, y \in B_{2m}$, то выполнено равенство

$$\theta^{(m)}(x\omega_{2\nu}y) = \operatorname{sgn}(y)\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}).$$

Следовательно, перестановка $y$ является четной; тогда и $x$ также четная перестановка.

Предложение доказано.

Обозначим через $H_m$ подпространство групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{4m}]$, определяемое следующим образом:

$$H_m = \{f \in \mathbb{C}[S_{4m}] | x_1 f x_2 = \operatorname{sgn}(x_2) f, \ \forall x_1, x_2 \in B_{2m}\}.$$

Определим два проектора в алгебре $\mathbb{C}[S_{4m}]$ формулами:

$$e_m^+ = \frac{1}{|B_{2m}|} \sum_{x \in B_{2m}} x,$$

$$e_m^- = \frac{1}{|B_{2m}|} \sum_{x \in B_{2m}} \operatorname{sgn}(x)x.$$

Для произвольного разбиения $\nu$ числа $m$ определим элемент $D_\nu$ подпространства $H_m$, "отвечающий" за соответствующий разбиению $\nu$ двойной класс смежности $B_{2m}\omega_{2\nu}B_{2m}$:

$$D_\nu = e_m^+ \omega_{2\nu} e_m^-.$$

**Предложение 3.2.** а) *Коэффициент при перестановке $\omega_{2\nu}$ в разложении элемента $D_\nu$ по элементам группы $S_{4m}$ равен*

$$\frac{z_{4\nu}}{|B_{2m}|^2};$$

б) *Множество*

$$\{D_\nu | \nu \vdash m\}$$

*является линейным базисом пространства* $H_m$.

**Доказательство.** а) Из Предложения 3.1 следует, что коэффициент $a_\nu$ при перестановке $\omega_{2\nu}$ в разложении элемента $D_\nu$ равен числу решений $(x_1, x_2)$ уравнения

$$x_1\omega_{2\nu}x_2 = \omega_{2\nu}; \quad x_1, x_2 \in B_{2m},$$

разделенному на число $|B_{2m}|^2$. Следовательно, получаем равенства

$$a_\nu = \frac{1}{|B_{2m}|^2} \cdot \frac{|B_{2m} \times B_{2m}|}{|B_{2m}\omega_{2\nu}B_{2m}|} = \frac{z_{4\nu}}{|B_{2m}|^2}.$$

б) Следует из доказанного в Предложении 2.1 и того факта, что

$$H_m = e_m^+ \mathbb{C}[S_{4m}] e_m^-.$$

Предложение доказано. □

Пусть $\lambda$ – произвольное разбиение числа $m$; определим элемент $F_\lambda$ подпространства $H$ формулой:

$$F_\lambda = H_{2\lambda\cup 2\lambda}^{-\frac{1}{2}} \sum_{g\in S_{4m}} \theta^\lambda(g)g.$$

Отметим, что из Предложения 3.2 а) следует равенство

$$F_\lambda = |B_{2m}|^2 H_{2\lambda\cup 2\lambda}^{-\frac{1}{2}} \sum_{\nu\vdash m} \frac{\theta^\lambda(\omega_{2\nu})}{z_{4\nu}} D_\nu. \tag{3.1}$$

Между пространством функций на произвольной конечной группе $G$ и пространством $\mathbb{C}[G]$ имеется естественный изоморфизм:

$$f \mapsto \sum_{g\in G} f(g)g.$$

Рассмотрим случай, когда $G = S_{4m}$. Скалярное произведение $\langle , \rangle$, заданное формулой (2.5), определяет скалярное произведение на подпространстве $H_m \subset \mathbb{C}[S_{4m}]$.

**Предложение 3.3.** *Пусть $\lambda$ и $\mu$ – произвольные разбиения числа $m$, тогда выполнены соотношения:*

*а)* $\langle D_\lambda, D_\mu\rangle = \frac{z_{4\lambda}}{|B_{2m}|^2}\delta_{\lambda\mu}$, *б)* $\langle F_\lambda, F_\mu\rangle = \delta_{\lambda\mu}$.

**Доказательство.** а) Если $\lambda \neq \mu$, то

$$B_{2m}\omega_{2\lambda}B_{2m} \cap B_{2m}\omega_{2\mu}B_{2m} = \varnothing,$$

и следовательно,

$$\langle D_\lambda, D_\mu\rangle = 0.$$

С другой стороны, из Предложения 3.2 а) получаем равенства

$$\langle D_\lambda, D_\lambda\rangle = \sum_{g\in B_{2m}\omega_{2\lambda}B_{2m}} \frac{z_{4\lambda}^2}{|B_{2m}|^4} = \frac{z_{4\lambda}}{|B_{2m}|^2}.$$

б) Равенство следует из соотношений ортогональности для матричных элементов. □

Будем считать, что пространство $H_0$ равно $\mathbb{C}$. Рассмотрим линейное пространство $H$:

$$H = \bigoplus_{n\geqslant 0} H_n.$$

Пусть $a \in H_i$, $b \in H_j$, определим элемент $a \circ b$ пространства $C[S_{4(i+j)}]$, как образ пары $(a, b)$ при естественном вложении произведения $\mathbb{C}[S_{4i}] \times \mathbb{C}[S_{4j}]$ в пространство $\mathbb{C}[S_{4(i+j)}]$. В этой ситуации определим умножение $*$ формулой

$$a * b = e_{i+j}^{+}(a \circ b)e_{i+j}^{-}.$$

Элемент $a * b$ принадлежит подпространству $H_{i+j}$. Операция $*$ коммутативна и ассоциативна. Кроме того, линейное пространство $H$ становится градуированной алгеброй относительно умножения $*$.

Как и ранее, для произвольных двух разбиений

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{l(\mu)}), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l(\nu)})$$

обозначим через $\mu \cup \nu$ разбиение, полученное упорядочением набора чисел

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{l(\mu)}, \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{l(\nu)}).$$

Отметим, что выполнено соотношение

$$D_\mu * D_\lambda = D_{\mu\cup\lambda}.$$

для произвольных разбиений $\mu$ и $\lambda$.

Обозначим через $\Lambda$ алгебру симметрических функций, на которой введено обычное скалярное произведение

$$(p_\lambda, p_\mu) = z_\lambda \delta_{\lambda\mu}. \tag{3.2}$$

Теперь мы можем определить характеристическое отображение. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{ch}\, : H \to \Lambda,$$

которое на базисных элементах линейного пространства $H$ задано следующей формулой:

$$\mathrm{ch}\,(D_\nu) = 2^{l(\nu)} p_\nu. \tag{3.3}$$

**Предложение 3.4.** а) *Отображение* ch *является изоморфизмом градуированных алгебр,*

б) *Если* $a, b \in H_m$, *то*

$$\langle a, b\rangle = \frac{1}{|B_{2m}|^2}(\mathrm{ch}\,(a), \mathrm{ch}\,(b)).$$

**Доказательство.** а) Покажем, что умножение $*$ в алгебре $H$ при отображении ch переходит в обычное умножение в симметрической алгебре $\Lambda$. Достаточно проверить это на элементах базиса алгебры $H$:

$$\mathrm{ch}\,(D_\mu * D_\nu) = \mathrm{ch}\,(D_{\mu\cup\nu}) = 2^{l(\mu\cup\nu)} p_{\mu\cup\nu} = \\ = 2^{l(\mu)+l(\nu)} p_\mu p_\nu = \mathrm{ch}\,(D_\mu)\cdot \mathrm{ch}\,(D_\nu).$$

б) Проверим доказываемое равенство на элементах базиса подпространства $H_m \subset H$.

Пусть $\mu$ и $\nu$ – произвольные разбиения числа $m$, тогда получаем цепочку соотношений

$$\frac{1}{|B_{2m}|^2}(\mathrm{ch}\,(D_\mu), \mathrm{ch}\,(D_\nu)) = \frac{1}{|B_{2m}|^2}(2^{l(\mu)}p_\mu, 2^{l(\nu)}p_\nu) = \\ = \frac{4^{l(\mu)} z_\mu}{|B_{2m}|^2}\,\delta_{\mu\nu} = \frac{z_{4\mu}}{|B_{2m}|^2}\,\delta_{\mu\nu} = \langle D_\mu, D_\nu\rangle.$$

Первое равенство следует из соотношения (3.3), второе – из равенства (3.2), третье – из (1.1), четвертое – из Предложения 3.3 а). $\square$

Пусть $\lambda$ – произвольное разбиение числа $m$, тогда введем элемент $K_\lambda$ симметрической алгебры $\Lambda$ формулой

$$K_\lambda = \frac{1}{|B_{2m}|}\,\mathrm{ch}\,(F_\lambda).$$

Отметим, что из равенств (1.1), (3.1) и (3.3) следует соотношение

$$K_\lambda = \frac{|B_{2m}|}{\sqrt{H_{2\lambda\cup 2\lambda}}}\sum_{\nu\vdash m}\frac{\theta^\lambda(\omega_{2\nu})}{z_{2\nu}}\,p_\nu \tag{3.4}$$

Легко найти функцию $K_\lambda$, если $\lambda$ – однострочечное разбиение.

**Предложение 3.5.** *$K_{(m)} = h_m$, где $h_m$ – $m$-ая полная симметрическая функция [2, I.2].*

**Доказательство.** В Предложении 2.3 доказано, что

$$\theta^{(m)}(\omega_{2\nu}) = 2^{l(\nu)}\frac{\sqrt{H_{(2m,2m)}}}{|B_{2m}|}.$$

Поэтому, используя равенства (1.1) и (3.4), получаем соотношения

$$K_{(m)} = \sum_{\nu\vdash m}\frac{p_\nu}{z_\nu} = h_m.$$

Последнее равенство следует из [2, гл.I, (2.14′)]. Предложение доказано. □

Для двух произвольных разбиений $\lambda$ и $\mu$ будем писать, что $\lambda \geqslant \mu$, если для любого натурального числа $k$ выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i \geqslant \sum_{i=1}^{k}\mu_i.$$

Докажем важные свойства, которые характеризуют элементы $K_\lambda$ симметрической алгебры $\Lambda$.

**Предложение 3.6.** *Пусть $\lambda$ и $\mu$ – произвольные разбиения числа $m$, тогда*

1) $(K_\lambda, K_\mu) = \delta_{\lambda\mu}$,

2) *если* $(K_\lambda, h_\mu) \neq 0$, *то* $\lambda \geqslant \mu$.

3) $(K_\lambda, p_1^m) \geqslant 0$.

**Доказательство.** 1) Из Предложений 3.4 б) и 3.3 б) следует цепочка равенств

$$(K_\lambda, K_\mu) = \frac{1}{|B_{2m}|^2}(\mathrm{ch}\,(F_\lambda), \mathrm{ch}\,(F_\mu)) = (F_\lambda, F_\mu) = \delta_{\lambda\mu}.$$

2) Пусть $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$; обозначим через $\pi$ тензорное произведение представлений: $\pi = \pi^{(2\mu_1, 2\mu_1)} \otimes \pi^{(2\mu_1, 2\mu_2)} \otimes \ldots \otimes \pi^{(2\mu_k, 2\mu_k)}$, а через $V$ – пространство

$$V^{(2\mu_1, 2\mu_1)} \otimes V^{(2\mu_2, 2\mu_2)} \otimes \ldots \otimes V^{(2\mu_k, 2\mu_k)}.$$

Обозначим также через $G$ группу $S_{4m}$, а через $H$ – ее подгруппу $S_{4\mu_1} \times \ldots S_{4\mu_k}$. Далее в доказательстве $\theta^{(n)}$ обозначает не только функцию на группе $S_{4n}$, но и соответствующий ей элемент групповой алгебры $\mathbb{C}[S_{4n}]$.

Предположим, что

$$(K_\lambda, h_\mu) \neq 0,$$

тогда, как следствие равенства

$$\mathrm{ch}\,(\theta^{\mu_1} * \theta^{(\mu_2)} * \ldots * \theta^{(\mu_k)}) = h_\mu,$$

мы получаем, что

$$\langle \theta^{(\mu_1)} * \theta^{(\mu_2)} * \ldots * \theta^{(\mu_k)}, \theta^\lambda \rangle \neq 0.$$

Покажем, что произведение матричных элементов $\theta^{(\mu_1)} * \theta^{(\mu_2)} * \ldots * \theta^{(\mu_k)}$ является матричным элементом индуцированного представления

$$\rho = \mathrm{Ind}\,_H^G \pi.$$

Рассмотрим реализацию этого индуцированного представления $\rho$ в пространстве $L$ функций на $G$ со значениями в $V$, удовлетворяющих условию

$$F(hg) = \pi(h)F(g), \quad \forall F \in L, \quad \forall h \in H, \quad \forall g \in G.$$

Действие элементов группы $G$ в пространстве $L$ определено следующим равенством:

$$(\rho(g)F)(a) = F(ag), \quad \forall a, g \in G, \quad \forall F \in L.$$

Пусть $\xi_i$, $\eta_i$ – это $B_{2\mu_i}$-антиинвариант и $B_{2\mu_i}$ – инвариант соответственно представления $\pi^{(2\mu_i,2\mu_i)}$. Введем векторы $\xi$ и $\eta$ равенствами

$$\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \ldots \otimes \xi_k,$$
$$\eta = \eta_1 \otimes \eta_2 \otimes \ldots \otimes \eta_k.$$

Зададим функцию $F_\xi$ из пространства $L$ соотношением

$$F_\xi(g) = \begin{cases} \pi(g)\xi, & \text{если} \quad g \in H, \\ 0, & \text{если} \quad g \notin H. \end{cases}$$

Аналогично зададим функцию $F_\eta$:

$$F_\eta(g) = \begin{cases} \pi(g)\eta, & \text{если} \quad g \in H, \\ 0, & \text{если} \quad g \notin H. \end{cases}$$

В пространстве $L$ введено скалярное произведение, связанное со скалярным произведением в $V$:

$$(F_1, F_2) = \sum_{g\in G} (F_1(g), F_2(g)).$$

Матричный элемент представления $\rho$, связанный с векторами $F_\xi$ и $F_\eta$, пропорционален функции

$$\theta^{(\mu_1)} \circ \theta^{(\mu_2)} \circ \ldots \circ \theta^{(\mu_k)}.$$

Поэтому произведение

$$\theta^{(\mu_1)} * \theta^{(\mu_2)} * \ldots * \theta^{(\mu_k)}$$

пропорционально матричному элементу представления $\rho$, связанному с элементами пространства $L$: вектором $e_m^- F_\xi$ и вектором $e_m^+ F_\eta$. Таким образом, функция $\theta^{(\mu_1)} * \ldots * \theta^{(\mu_k)}$ является матричным элементом индуцированного представления $\rho$.

Рассмотрим теперь разложение представления $\rho$ на неприводимые представления группы $S_{4m}$:

$$\rho = \bigoplus_{\nu\vdash 4m} a_\nu \pi^\nu,$$

где $a_\nu$ – суть некоторые кратности. Тогда, согласно общему утверждению из [2, гл.I, §7] для тех же констант $a_\nu$ имеет место тождество для функций Шура

$$\prod_{i=1}^{k} s_{(2\mu_i,2\mu_i)} = \sum_{\nu\vdash 4m} a_\mu s_\nu.$$

В силу нашего предположения из соотношений ортогональности для матричных элементов следует, что $a_{2\lambda\cup 2\lambda} \neq 0$. Покажем, что из этого следует, что $\lambda \geqslant \mu$. Для этого докажем сначала более общее утверждение.

**Лемма 3.7.** *Пусть $\mu$ и $\nu$ – произвольные разбиения, рассмотрим разложение произведения соответствующих функций Шура:*

$$s_\mu \cdot s_\nu = \sum_\lambda c_{\mu\nu}^\lambda s_\lambda,$$

*где $c_{\mu\nu}^\lambda$ – некоторые константы (коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона). Если $c_{\mu\nu}^\lambda \neq 0$, то $\lambda \geqslant \mu \cup \nu$.*

**Доказательство.** Из формулы Пиери [2, гл.I, (5.16)], получаем, что утверждение леммы выполнено, когда $\nu$ – однострочечное разбиение, то есть когда $\nu = (r)$ для некоторого натурального числа $r$ и $s_\nu = h_r$; в этом случае

$$s_\mu \cdot h_r = \sum_{\lambda \geqslant \mu\cup(r)} c_{\mu(r)}^\lambda s_\lambda.$$

Следовательно, для произвольного разбиения $\nu$

$$s_\mu \cdot h_\nu = \sum_{\eta \geqslant \mu\cup\nu} b_{\mu\nu}^\eta s_\eta, \tag{3.5}$$

с некоторыми константами $b_{\mu\nu}^\eta$. С другой стороны из [2, гл.I, (6.6) (i)] следует, что

$$s_\nu = \sum_{\eta \geqslant \nu} M_{\nu\eta} h_\eta, \tag{3.6}$$

для некоторых констант $M_{\nu\eta}$.

Из равенств (3.5) и (3.6) следует утверждение леммы. □

**Продолжение доказательства Предложения 3.6.** Из доказанной леммы следует, что если во введенных в доказательстве Предложения 3.6 обозначениях выполнено

$$a_{2\lambda\cup 2\lambda} \neq 0,$$

то получаем неравенство

$$2\lambda \cup 2\lambda \geqslant 2\mu \cup 2\mu,$$

и следовательно

$$\lambda \geqslant \mu.$$

Утверждение 2) Предложения 3.6 доказано.

3) С помощью равенств (1.1), (3.2) и (3.4) получаем соотношение

$$(K_\lambda, p_1^m) = \frac{|B_{2m}|}{2^m} H_{2\lambda\cup 2\lambda}^{-\frac{1}{2}} \theta^\lambda(\omega_{(2^m)}) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство следует из выбора $B_{2m}$-антиинварианта и $B_{2m}$-инварианта (неравенство (2.3)).

Предложение доказано. □

Теперь покажем, что из Предложения 3.6 следует, что элементы $K_\lambda$ симметрической алгебры совпадают с функциями Шура.

**Предложение 3.8.** *Пусть $\lambda$ – произвольное разбиение числа $m$, тогда выполнено равенство*

$$K_\lambda = s_\lambda.$$

**Доказательство.** Из свойств 1) и 2) Предложения 3.6 следует, что функции $K_\lambda$ получаются процессом ортогонализации из базиса симметрической алгебры $\Lambda$, состоящего из мономиальных функций $\{m_\mu | \mu \vdash m\}$. Поэтому

$$K_\lambda = e^{i\varphi} s_\lambda$$

для некоторого действительного $\varphi$.

Сравнивая свойство 3) Предложения 3.6 с неравенством

$$(s_\lambda, p_1^m) > 0$$

(см. [2, гл.I, (7.7)], мы получаем утверждение предложения

$$K_\lambda = s_\lambda.$$

Предложение доказано. □

Теперь мы можем доказать основной результат этой работы. Мы выразим значения бисферических функций через характеры неприводимых представлений. Как отмечалось ранее, из равенства (1.2) следует, что для того, чтобы знать значения бисферической функции $\theta^\lambda$ на группе $S_{4m}$, достаточно знать значения вида

$$\theta^\lambda(\omega_{2\nu}), \quad \nu \vdash m.$$

**Теорема 3.9.** *Пусть $\lambda$ и $\nu$ – произвольные разбиения числа $m$. Обозначим через $\chi^\lambda_\nu$ значение характера неприводимого представления $\pi^\lambda$ группы $S_m$ на элементе циклового типа $\nu$. Тогда выполнено равенство*

$$\theta^\lambda(\omega_{2\nu}) = \frac{2^{l(\nu)}\sqrt{H_{2\lambda\cup 2\lambda}}}{|B_{2m}|}\,\chi^\lambda_\nu.$$

**Доказательство.** Из равенств (3.2), (3.4) и Предложения 3.8 следует соотношение

$$\theta^\lambda(\omega_{2\nu}) = (s_\lambda, p_\nu)\frac{\sqrt{H_{2\lambda\cup 2\lambda}}}{|B_{2m}|}\,2^{l(\nu)}.$$

Затем используем равенство

$$(s_\lambda, p_\nu) = \chi^\lambda_\nu.$$

([2, гл.I, (7.7)]. Теорема доказана. □

## Литература


1. R. Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity – free actions and beyond.* The Schur Lectures (1992), Israel Mathematical Conference Proceedings. Vol. 8, 1995, pp. 1–182.
2. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition.* Oxford Univ. Press, 1995.
3. A. Okounkov and G. Olshanski, *Shited Schur functions II. Binomial formula for characters of classical groups and applications.* to appear in A. A. Kirillov Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Translations.
4. J. R. Stembridge, *On Schur's Q-functions and the primitive idempotents of a commutative Hecke algebra.* — J. Algb. Combinatorics **1** (1992), 71–95.



Ivanov V. N. Bi-spherical functions on the symmetric group associated to hyperoctahedral subgroup.

We consider an arbitrary irreducible representation of a symmetric group $S_{4m}$ that has both a $B_{2m}$-invariant vector and a $B_{2m}$-antiinvariant vector, where $B_{2m}$ is a hyperoctahedral subgroup of $S_{4m}$. The main result is an expression for a matrix element corresponding to these two vectors in terms of an irreducible character of the symmetric group $S_m$.



Московский государственный университет



Поступило 14 ноября 1996 г.



*E-mail*: vivanov@sch57.mcn.msk.su