Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

С. В. Керов

РАССТАНОВКИ ЛАДЕЙ НА ДИАГРАММАХ ЮНГА И МАТРИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Введение. Рассмотрим матричный интеграл

$$C(n,N)=\int\limits_{H_N}\operatorname{tr}Z^{2n}\;\mu_N(dZ),\tag{1.1}$$

взятый по пространству H_N всех эрмитовых матриц размера $N\times N$. Мы обозначаем через $z_{jk}=x_{jk}+iy_{jk}$ матричные элементы матрицы $Z=(z_{jk})\in H_N$ и через μ_N гауссовскую меру

$$\mu_N(dZ)=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant N}\frac{1}{\pi}e^{-|z_{jk}|^2}dx_{jk}\,dy_{jk}\prod_{k=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_{kk}^2/2}dx_{kk}.\tag{1.2}$$

на пространстве H_N. Известно, что число $C(n,N)$ всегда целое и положительное.

Фактически интеграл (1.1) является целым положительным числом и был подсчитан в [2] двумя различными способами. Первое вычисление приводит к формуле

$$C(n,N)=\sum_{0\leqslant g\leqslant n/2}\varepsilon_g(n)N^{n+1-2g}\tag{1.3}$$

где $\varepsilon_g(n)$ обозначает число способов получить ориентируемую поверхность рода g посредством попарного отождествления сторон $2n$-угольника. Удачное изложение этого вычисления, основанное на формуле Вика, можно найти в [7].

Второе вычисление в работе [2], основанное на манипуляциях с производящими функциями, приводит к формуле

$$C(n,N)=(2n-1)!!\;\sum_{k=0}^{n}\binom{N}{k+1}\binom{n}{k}2^k.\tag{1.4}$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 96-01-00676 Российского Фонда Фундаментальных Исследований и INTAS-94-3420.

В этой заметке мы даем простую комбинаторную интерпретацию чисел $C(n,N)$ в терминах конфигураций ладей на досках Ферре или, иначе, в терминах инволюций специального вида. В нашем подходе можно различить две составные части: (1) явная формула для одночастичных корреляционных функций гауссовского унитарного ансамбля (т.е. ансамбля собственных чисел для матриц $Z \in H_N$, выбираемых в соответствии с распределением (1.2)) и (2) комбинаторная теория ортогональных полиномов, разработанная Флажоле и Вьенно.

План заметки следующий. В разделе 2 приведены необходимые определения и формулировки теорем. В п. 3 напоминаются известные сведения о корреляционных функциях матричных интегралов. Доказательства теорем 1, 2 даны в пп. 4 и 5 соответственно. Наконец, в заключительном разделе 6 получено вероятностное обобщение, приводящее к другому доказательству теоремы 2.

2. Расстановки ладей. Обозначим через $Y(n)$ множество диаграмм Юнга[1] $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ с n строками длины не превосходящей n, $0 \leqslant \nu_n \leqslant \ldots \leqslant \nu_1 \leqslant n$. Если задана диаграмма $\nu \in Y(n)$ и неотрицательное целое s, мы обозначаем через

$$\nu[s] = (\nu_1 + s, \nu_2 + s, \ldots, \nu_n + s) \tag{2.1}$$

диаграмму Юнга, полученную из ν путем увеличения всех ее строк на величину s (или, что эквивалентно, посредством добавления s новых столбцов длины n). Пусть $Y(n,s) = \{\nu[s] : \nu \in Y(n)\}$ обозначает множество таких диаграмм.

Определение 1. Подмножество $c \subset \mu$ диаграммы Юнга μ называется *конфигурацией ладей на доске* μ, если каждая строка и каждый столбец диаграммы μ содержит не более одного элемента (ладьи) из c.

Пусть $RC_k(\mu)$ обозначает множество всех конфигураций $k = |c|$ ладей на доске μ. Мы также будем писать

$$RC(n,s) = \{(\mu, c) : \mu \in Y(n,s), c \in RC_n(\mu)\} \tag{2.2}$$

[1] Мы не делаем разницы между диаграммами Юнга и диаграммами Ферре.

для обозначения множества пар (μ, c), где c – конфигурация n ладей на доске $\mu \in Y(n,s)$ и

$$RC^*(n,N) = \bigcup_{s=0}^{N-1} RC(n,s) \tag{2.3}$$

для обозначения несвязного объединения множеств $RC(n,s)$. По определению, $RC^*(n,N)$ представляет собой множество троек (s,μ,c), где $s = 0,1,\dots,N-1$ – число, $\mu = \nu[s] \in Y(n,s)$ – диаграмма Юнга, для которой $s \leqslant \mu_n \leqslant \dots \leqslant \mu_1 \leqslant n+s$, и $c \in RC_n(\mu)$ задает конфигурацию n ладей на диаграмме μ.

После этих определений мы готовы представить основные результаты заметки.

Теорема 1. *Интеграл (1.1) равен числу элементов множества $RC^*(n,N)$,*

$$C(n,N) = \sum_{s=0}^{N-1} |RC(n,s)|. \tag{2.4}$$

Теорема 2. *Число элементов множества $RC(n,s)$ равно*

$$|RC(n,s)| = (2n-1)!! \sum_{k=0}^{n} \binom{s}{k}\binom{n}{k} 2^k. \tag{2.5}$$

Мы докажем эти теоремы в разделах 4, 5. Сейчас мы лишь убедимся, что уравнение Харера – Загира (1.4) является непосредственным следствием этих теорем.

Действительно, воспользуемся символом $(s)_k = s(s-1)\dots(s-k+1)$ для обозначения убывающих факториальных степеней. Поскольку $(s+1)_{k+1} - (s)_{k+1} = (k+1)\,(s)_k$, мы заключаем, что

$$\sum_{s=0}^{N-1} \binom{s}{k} = \binom{N}{k+1},$$

так что формула (1.4) вытекает из (2.4) и (2.5).

3. Корреляционная функция.

Если матрица $Z \in H_N$ выбирается случайно, в соответствии с распределением (1.2), то ее собственные числа $x_1, x_2, \dots, x_N$

распределены с плотностью

$$P_N(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant N} (x_j - x_k)^2 \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{k!\sqrt{2\pi}} e^{-x_k^2/2}, \qquad (3.1)$$

так что можно записать (см. [2], §4)

$$C(n, N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k^{2n} \, P_N(x_1, \ldots, x_N) \, dx_1 \ldots dx_N. \qquad (3.2)$$

Следуя [3], мы вводим *одночастичную корреляционную* функцию посредством уравнения

$$\sigma_N(x) = N \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} P_N(x, x_2, \ldots, x_N) \, dx_2 \ldots dx_N. \qquad (3.3)$$

По определению, $\frac{1}{N}\sigma_N(x)\,dx$ есть вероятность найти собственное значение случайной матрицы $Z \in H_N$ в интервале $(x, x + dx)$. Поскольку плотность (3.1) зависит от своих аргументов симметрично, из формулы (3.2) следует, что

$$C(n, N) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \, \sigma_N(x) \, dx \qquad (3.4)$$

есть момент меры $\sigma_N(x)\,dx$.

Следующий факт хорошо известен (см. [3], стр. 74 – 76). Для удобства читателя мы воспроизведем и набросок доказательства.

Предложение 1 ([3]). *Корреляционную функцию* (3.3) *можно записать в виде*

$$\sigma_N(x) = \sum_{s=0}^{N-1} D_s^2(x), \qquad (3.5)$$

где $D_s(x) = (2\pi)^{-1/4}(s!)^{-1/2} e^{-x^2/4} H_s(x)$ *– функция параболического цилиндра, а* $H_s(x)$ *– приведенный полином Эрмита степени* s.

Доказательство. Рассмотрим ядро $K(x, y) = \sum_{s=0}^{N-1} D_s(x)\, D_s(y)$ и матрицу $\Phi = \big(D_{i-1}(x_j)\big)_{i,j=1}^{N}$. Можно легко убедиться, что

$$\det \Phi = (2\pi)^{-N/4} \prod_{i=0}^{N-1} (i!)^{-1/2} \prod_{j=1}^{N} e^{-x_j^2/4} \prod_{i<j} (x_j - x_i).$$

Поскольку $\big(K(x_i, x_j)\big)_{i,j=1}^N = \Phi^T \Phi$, получаем выражение для плотности (3.1) в виде определителя:

$$P_N(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \det \Big(K(x_i, x_j)\Big)_{i,j=1}^N \tag{3.6}$$

Из соотношений ортогональности $\int D_i(x) D_j(x)\, dx = \delta_{ij}$ для функций $D_s(x)$ следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x, y) K(y, z)\, dy = K(x, z); \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x, x)\, dx = N. \tag{3.7}$$

Из (3.7) можно вывести, что для каждого целого положительного n

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \det \big(K(x_i, x_j)\big)_{i,j=1}^n dx_n = (N - n + 1) \det \big(K(x_i, x_j)\big)_{i,j=1}^{n-1}.$$

Из этой формулы и уравнения (3.6) и вытекает предложение. •

4. Доказательство теоремы 1. Из формулы (3.5) следует, что моменты корреляционной функции (3.3) можно записать в виде

$$C(n, N) = \sum_{s=0}^{N-1} \mathcal{M}_n(s), \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{M}_n(s) = \frac{1}{s! \sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\, H_s^2(x)\, e^{-x^2/2}\, dx. \tag{4.2}$$

Лемма 1. *Интеграл (4.2) совпадает с числом точек множества $RC(n, s)$,*

$$\mathcal{M}_n(s) = |RC(n, s)|. \tag{4.3}$$

Доказательство. Напомним один из результатов комбинаторной теории ортогональных многочленов Флажоле – Вьенно, которым мы собираемся воспользоваться (см. [2, 5]).

Пусть $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \dots$ – семейство приведенных полиномов, ортогональных по отношению к мере M и удовлетворяющих рекуррентным соотношениям

$$P_{n+1}(x) = x\, P_n(x) - \lambda_n\, P_{n-1}(x); \qquad n = 1, 2, \dots.$$

В соответствии с предложением 17 из [5],

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2n} P_s^2(x)\, M(dx) = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s \sum_{\omega} V(\omega), \tag{4.4}$$

где ω в правой части пробегает множество $L(n,s)$ всех ломаных длины $2n$ с концами на уровне s в целочисленной верхней полуплоскости. Вес $V(\omega)$ ломаной ω определяется как произведение $V(\omega) = \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\ldots\lambda_{k_n}$, взятое по всем n нисходящим звеньям ломаной. Числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$ указывают начальные уровни для этих звеньев. Очевидно, что множество $L(n,s)$ можно отождествить с множеством $Y(n,s)$ диаграмм Юнга (см. рис. 1). Нисходящие звенья ломаной ω соответствуют концам строк ассоциированной диаграммы Юнга $\mu \in Y(n,s)$, а начальный уровень звена в конце k-ой строки равен $s + \mu_k - n + k$. Поскольку мы будем использовать диаграммы Юнга вместо ломаных, условимся писать $V(\mu)$ вместо $V(\omega)$.

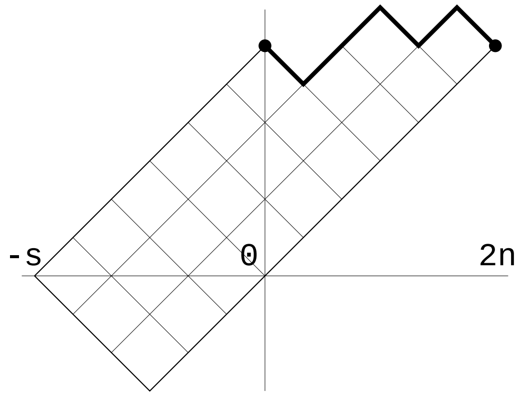

Рис. 1. Отождествление ломаных и диаграмм Юнга.

Мы намереваемся применить уравнение (4.4) к полиномам Эрмита $P_s(x) = H_s(x)$, так что $\lambda_s = s$ для всех $s = 0, 1, 2, \ldots$. Следовательно,

$$V(\mu) = \prod_{k=1}^{n}(s + \mu_k - n + k). \tag{4.5}$$

Заметим, что $\lambda_0 = 0$, так что $V(\omega) = 0$ во всех случаях, когда ломаная ω заходит в нижнюю полуплоскость. Таким образом, сумму в формуле (4.4) можно брать *по всем* диаграммам Юнга $\nu[s]$, $\nu \in Y(n)$.

Очевидно (ср. [4], теорема 2.4.1), что выражение (4.5) можно интерпретировать как число $V(\nu[s]) = |RC_n(\nu[s])|$ конфигураций n ладей на доске $\nu[s] = (\nu_1 + s, \nu_2 + s, \dots, \nu_n + s)$, где $\nu \in Y(n)$. Поскольку в тождестве (4.4) $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_s = s!$, лемма 1 доказана. •

Теорема 1 непосредственно вытекает из формул (4.1) и (4.3).

5. Доказательство теоремы 2. Пусть $RC_k(n,s)$ обозначает множество пар $(\mu, c) \in RC(n,s)$, таких что первые s столбцов диаграммы $\mu = \nu[s]$ содержат в точности k ладей. Мы докажем, что

$$|RC_k(n,s)| = (2n-1)!! \binom{s}{k} \binom{n}{k} 2^k. \tag{5.1}$$

С этой целью мы сначала вводим множество частичных инволюций $I_k(n,s)$ и доказываем, что число его элементов $|I_k(n,s)|$ совпадает с правой частью (5.1). Затем мы устанавливаем биекцию между множествами $RC_k(n,s)$ и $I_k(n,s)$.

Определение 2. Пусть $[s, 2n]$ обозначает вполне упорядоченное множество из $s + 2n$ точек. Мы различаем первые s *отрицательных* точек и оставшиеся $2n$ *положительных* точек. Назовем *дугой* любую неупорядоченную пару точек (вершин) множества $[s, 2n]$. Множество A, состоящее из n дуг, попарно не имеющих общих концов, условимся называть *частичной инволюцией*, если каждая дуга этого множества имеет хотя бы одну положительную вершину. Обозначим через $I_k(n,s)$ множество таких частичных инволюций, у которых в точности k дуг содержат отрицательные вершины.

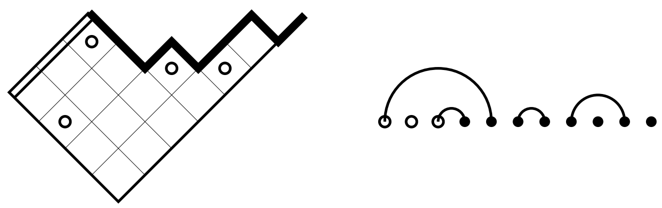

Рис. 2. Биекция между множествами $RC_k(n,s)$ и $I_k(n,s)$.

Лемма 2. *Число частичных инволюций во множестве* $I_k(n,s)$ *равно*

$$|I_k(n,s)| = (2n-1)!! \binom{s}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

Доказательство. Для того чтобы выбрать одну из частичных инволюций $A \in I_k(n,s)$, необходимо следующее:

(1) выбрать подмножество из k отрицательных вершин (из общего числа s) для левых концов k дуг в A;

(2) найти последовательность длины k из $2n$ положительных вершин, соответствующих дугам с отрицательными вершинами;

(3) выбрать подмножество из k положительных вершин, которые не принадлежат ни одной из дуг инволюции A;

(4) соединить попарно остающиеся $2n-2k$ положительных точек.

Очевидно, что общее число вариантов при всех этих выборах равно

$$|I_k(n,s)| = \binom{s}{k} 2n(2n-1)\dots(2n-k+1)\binom{2n-k}{k}(2n-2k-1)!! =$$
$$= (2n-1)!! \binom{s}{k}\binom{n}{k} 2^k,$$

и лемма 2 доказана. •

Лемма 3. *Имеется естественная биекция между множеством частичных инволюций* $I_k(n,s)$ *и множеством ладейных конфигураций* $RC_k(n,s)$.

Доказательство. Рассмотрим конфигурацию c из k ладей на доске $\nu[s]$, где $\nu \in Y(n)$. Заметим, что ломаная, ограничивающая диаграмму $\nu[s]$ сверху, состоит из $s+2n$ звеньев (см. рис. 2). Обозначим множество этих звеньев через $[s,2n]$ и обратим внимание на то обстоятельство, что это множество вполне упорядочено. Его первые s звеньев, которые мы объявляем "отрицательными", являются исключительно восходящими.

Каждая ладья конфигурации c задает крюк в диаграмме Юнга, концы которого соединяют одно из восходящих звеньев граничной ломаной с одним из ее нисходящих звеньев. Таким образом, каждая ладья определяет дугу на множестве $[s,2n]$. Поскольку различные ладьи принадлежат различным строчкам и столбцам, концы этих дуг попарно не пересекаются. Отрицательные звенья являются восходяшими и поэтому не могут служить правыми концами дуг. В результате мы получаем частичную инволюцию $A = F(\nu[s], c)$ на множестве $[s, 2n]$.

Обратно, если задана частичная инволюция $A \in I_k(n, s)$ на множестве $[s, 2n]$, зададим диаграмму Юнга μ и ладейную конфигурацию $c \in RC_n(\mu)$ следующим образом. Если точка $j \in [s, 2n]$ служит правым концом (по отношению к полному упорядочению множества $[s, 2n]$) некоторой дуги из A, мы объявляем соответствующее звено нисходящим; в противном случае, т.е. если точка является левым концом дуги или если она вообще не принадлежит никакой дуге, мы объявляем соответствующее звено восходящим. Полученная таким образом диаграмма μ имеет вид $\mu = \nu[s]$ для некоторой диаграммы Юнга $\nu \in Y(n)$. Разместим ладьи на доске μ таким образом, чтобы их крюки соответствовали дугам инволюции A. Мы обозначаем через $(\mu, c) = G(A)$ соответствующую пару из множества $RC_k(n, s)$.

Легко видеть, что отображения $F : RC_k(n, s) \to I_k(n, s)$ и $G : I_k(n, s) \to RC_k(n, s)$, построенные выше, являются взаимно обратными биекциями (см. рис. 2). $\bullet$

6. Вероятностная задача. В этом заключительном разделе заметки мы обсудим элементарную вероятностную задачу, интерпретирующую и обобщающую формулу (5.1). Отметим прежде всего, что эту формулу можно переписать несколько иначе:

$$|RC_k(n, s)| = (2n-1)!! \binom{s}{k} \binom{n}{k} 2^k = \frac{1}{2^{n-k}} \binom{2n}{n} (n-k)! \binom{n}{k}^2 (s)_k,$$

где $(s)_m = s(s-1)\dots(s-m+1)$ – убывающая факториальная степень. Обозначим через $\widetilde{RC}_k(n)$ множество пар (ν, c), где ν – диаграмма Юнга в прямоугольнике $\Pi = (n^n)$ и $c \subset \nu$ – конфигурация из k ладей на диаграмме ν. Поскольку число $(s)_k$ равно числу расстановок k ладей в прямоугольнике из k строк длины s, получаем (после замены k на $n-k$), что

$$|\widetilde{RC}_k(n)| = \frac{1}{2^k} \binom{2n}{n} k! \binom{n}{k}^2. \tag{6.1}$$

Заметим теперь, что множитель $\binom{2n}{n} = |Y(n)|$ есть число всех диаграмм Юнга в квадрате $\Pi = (n^n)$, а $k!\binom{n}{k}^2 = |\Omega_k(n)|$ можно понимать как число элементов во множестве $\Omega_k(n)$ всех расстановок k ладей в квадрате Π. Таким образом, если мы выбираем независимо диаграмму Юнга $\nu \subset \Pi$ и конфигурацию из k ладей в Π, то вероятность случайного попадания *всех* ладей внутрь диаграммы ν равна

$$\frac{|\widetilde{RC}_k(n)|}{|Y(n)|\,|\Omega_k(n)|} = \frac{1}{2^k}. \tag{6.2}$$

Это утверждение, по существу, эквивалентно формуле (5.1), из которой мы выводили выше теорему 2. Оно обобщается следующим образом.

Предложение 2. *Обозначим через $r(\nu, c) = |c \cap \nu|$ число ладей в конфигурации $c \in \Omega_k(n)$, попавших внутрь диаграммы Юнга $\nu \subset \Pi$, и будем считать, что ν и c независимы и равновероятны. Тогда*

$$\operatorname{Prob}\{(\nu, c) \in Y(n) \times \Omega_k(n) : r(\nu, c) = j\} = \binom{k}{j}\frac{1}{2^k} \tag{6.3}$$

при всех $j = 0, 1, \ldots, k$, т.е. случайная величина r имеет биномиальное распределение с вероятностью успеха $1/2$.

Ознакомившись с результатами настоящей статьи, С. В. Фомин сообщил автору, что формула (6.2) составляет содержание леммы 3.8.6 в работе [8]. Более того, легко видеть, что изящное рассуждение, данное в [8], доказывает и более общее предложение 2.

Литература

1. P. Flajolet, *Combinatorial aspects of continued fractions.* — Discrete Math. **32** (1980), 125–161.
2. J. Harer and D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves.* — Invent. math. **85** (1986), 457–485.
3. M. L. Mehta, *Random matrices and the statistical theory of energy levels.* NY and London, Academic Press, 1967.
4. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* т. 1, Москва, Мир, 1990.
5. G. Viennot, *Une theorie combinatoire des polynomes orthogonaux generaux.* — Notes de conférences données au Département de mathématiques et d'informatique, Montréal, Québec (1983).
6. D. Zagier, *On the distribution of the number of cycles of elements in symmetric groups.* — Preprint (1994), 1–6.
7. A. Zvonkin, *Matrix Integrals and Map Enumeration: An Accessible Introduction.* — To appear in: Computers and Math. with Applications: Mathematical and Computer Modelling (Special issue "Combinatorics and Physics") (1995).

8. S. Fomin, *Schensted algorithms for dual graded graphs.* — J. Algebraic Combinatorics **4** (1995), 5–45.

Kerov S. V. Rooks on Ferrers boards and matrix integrals.

Let $C(n,N)=\int_{H_N}\operatorname{tr} Z^{2n}\,\mu(dZ)$ denote a matrix integral by a $U(N)$-invariant gaussian measure μ on the space H_N of hermitian $N\times N$ matrices. The integral is known to be always a positive integer. We derive a simple combinatorial interpretation of this integral in terms of rook configurations on Ferrers boards. The formula

$$C(n,N)=(2n-1)!!\,\sum_{k=0}^{n}\binom{N}{k+1}\binom{n}{k}\,2^k$$

found by J. Harer and D. Zagier follows from our interpretation immediately.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kerov@pdmi.ras.ru

Поступило 30 октября 1996 г.