Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Татьяна Нагнибеда

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ СПЕКТРАЛЬНОГО РАДИУСА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ГРУППАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. Введение

Целью этой работы является описание метода, позволяющего оценивать сверху спектральный радиус случайного блуждания на бесконечном, локально конечном графе с конечным числом конусных типов. Оценки получаются в виде вещественных положительных решений конечных систем алгебраических уравнений. Метод применяется к графам Кэли фундаментальных групп ориентируемых поверхностей рода g, $g \geq 2$

$$G_g \;=\; \langle a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} ... a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1 \rangle.$$

Наш метод позволяет улучшить все известные к настоящему моменту численные оценки спектрального радиуса на группах S_g при малых g; мы имеем

$$\rho_2 < 0.662816;$$

$$\rho_3 < 0.552792.$$

Рассмотрим бесконечный, локально конечный связный граф $\Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma))$. Случайное блуждание на Γ задается стохастической матрицей $\big(p(x,y)\big)_{x,y\in V(\Gamma)}$, называемой матрицей переходных вероятностей. Случайное блуждание называется простым, если матрица переходных вероятностей имеет вид

$$p(x,y) = \begin{cases} 1/d(x), & \text{если } y \sim x, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $d(x)$ есть валентность вершины x, а $y \sim x$ означает, что y и x соединены ребром. Соответствующий простому случайному блужданию Марковский оператор M есть самосопряженный оператор, действующий на пространстве $l^2(V(\Gamma))$ со скалярным произведением

$$\langle \phi, \psi \rangle \;=\; \sum_{x\in V(\Gamma)} \phi(x)\psi(x)d(x)\ .$$

Оператор M задается формулой

$$M\xi(x) = \frac{1}{d(x)} \sum_{y \sim x} \xi(y)$$

для любых $\xi \in l^2(V(\Gamma))$ и $x \in V(\Gamma)$.

Спектральный радиус случайного блуждания есть

$$\rho \ = \ \limsup_{n \to \infty} \left(P_{x,x}^{(n)}\right)^{\frac{1}{n}} \ ,$$

где $P_{x,x}^{(n)}$ обозначает вероятность вернуться в вершину x в первый раз через n шагов. Известно(см. например, [4]), что

$$\rho \ = \ \|M\| \ .$$

Интересные оценки спектрального радиуса на группах поверхностей были получены в работе [1]. Более точные оценки сверху были получены в [5]. Метод, использованный в [5], основан на следующем результате.

Обозначим $\mathbb{E}$ множество ориентированных ребер графа Γ (каждому ребру из $E(\Gamma)$ соответствует два ориентированных ребра $e = (x, y), \bar{e} = (y, x)$). Обозначим e_- и e_+ соответственно начало и конец ориентированного ребра e.

Лемма Габбера. *Пусть Γ бесконечный, локально конечный связный граф. Предположим, что функция $F : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию*

$$F(e) = \frac{1}{F(\bar{e})}$$

для $e \in \mathbb{E}$. Если существует $C_F > 0$, т.ч. $\forall x \in V(\Gamma)$

$$\frac{1}{d(x)} \sum_{e_+ = x} F(e) \leq C_F,$$

то

$$\|M\| \leq C_F.$$

Доказательство. Пусть $\xi \in l^2(V(\Gamma))$. Так как $F(e) = 1/F(\bar{e})$, имеем

$$\xi(x)\xi(y) = \xi(x)\sqrt{F(x,y)}\,\sqrt{F(x,y)}\,\xi(y) \leqslant \frac{1}{2}F(x,y)\xi(x^2) + \frac{1}{2}F(x,y)\xi(y^2).$$

Таким образом

$$\begin{aligned}\langle M\xi, \xi\rangle &= \sum_{x\in V(\Gamma)} \Big(\frac{1}{d(x)}\sum_{y\sim x}\xi(y)\Big)\xi(x)d(x) = \sum_x\sum_{y\sim x}\xi(y)\xi(x)\\ &\le \frac{1}{2}\sum_x\sum_{y\sim x}\frac{1}{d(x)}F(y,x)\xi(x)^2 d(x)\\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_y\sum_{x\sim y}\frac{1}{d(y)}F(x,y)\xi(y)^2 d(y)\\ &\le C_F\|\xi\|^2 \ .\end{aligned}$$

□

Замечание. Можно выбрать такую функцию $\tilde{F}$ на ребрах графа, что Лемма Габбера даст точную оценку спектрального радиуса. Как известно (см. [3]), существует функция $f : V(\Gamma) \to \mathbb{R}_+$, т.ч. $Mf = \rho f$. Определим функцию $\tilde{F} : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ как

$$\tilde{F}(e) = f(e_-)/f(e_+).$$

Очевидно, что $\tilde{F}(e) = 1/\tilde{F}(\bar{e})$ для любого ребра $e \in \mathbb{E}$. Для любой вершины x имеем

$$\frac{1}{d(x)}\sum_{e_+=x}\tilde{F}(e) = \frac{1}{f(x)}\left(\frac{1}{d(x)}\sum_{y\sim x} f(y)\right) = \frac{1}{f(x)}Mf(x) = \rho.$$

Таким образом, в обозначениях Леммы Габбера,

$$C_{\tilde{F}} = \|M\|.$$

Отметим, что на практике это замечание не помогает оценить спектральный радиус. Если бы мы умели строить ρ-гармонические функции на Γ, мы могли бы найти точное значение спектрального радиуса.

2. Графы с конечным числом конусных типов

Пусть Γ, как прежде, бесконечный, локально конечный связный граф.

Функция $t : V(\Gamma) \to \mathbb{N}$ называется *типовой функцией вершин*, а ее значение в вершине x – *типом* x.

Ориентацией графа Γ будем называть подмножество $\mathcal{E} \subset \mathbb{E}$ множества ориентированных ребер, такое что $e \in \mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда $\bar{e} \notin \mathcal{E}$. *Звездой* $St_{\mathcal{E}}(x)$ вершины x относительно ориентации $\mathcal{E}$ называется множество ребер из $\mathcal{E}$ инцидентных с x.

Будем говорить, что ориентация $\mathcal{E}$ и типовая функция t *совместимы*, если $t(x) = t(y)$ влечет $\sharp\{e \in St_{\mathcal{E}}(x) \mid t(e_+) = k\} = \sharp\{e \in St_{\mathcal{E}}(y) \mid t(e_+) = k\}$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Для любой последовательности положительных чисел $c = (c_k)_{k\geq 1}$ рассмотрим функцию $F_c : \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$

$$F_c(e) = \begin{cases} c_k, & \text{если } e \in \mathcal{E}, t(e_+) = k, \\ 1/c_k, & \text{если } \bar{e} \in \mathcal{E}, t(\bar{e}_+) = k. \end{cases}$$

Если на графе заданы совместимые ориентация и типовая функция, определим

$$f_i(c) = \sum_{e\in\mathbb{E}, e_+ = x} F_c(e),$$

где x – это произвольная вершина типа i.

Предположим, что функция t принимает значения в конечном множестве $\{1, ..., K\}$, и что вершины одинакового типа имеют одинаковую валентность. Обозначим d_i валентность вершины типа i. Тогда лемма Габбера влечет следующее утверждение:

Предложение. *В вышеописанной ситуации, для любого набора* $(c_1, ..., c_K) \in \mathbb{R}_+^K$ *имеем*

$$\|M\| \leq \max_{i=1,\dots,K} \frac{1}{d_i} f_i(c_1, ..., c_K).$$

Следствие 1. *Каждому набору* $(c_1, ..., c_K) \in \mathbb{R}_+^K$ *соответствует своя оценка спектрального радиуса. Мы можем выбрать наилучшую:*

$$\|M\| \leq \inf_{(c_1,\dots,c_k)\in\mathbb{R}_+^K} \max_{i=1,\dots,K} \frac{1}{d_i} f_i(c_1, ..., c_K).$$

В работе [5] типовая функция на вершинах графа $\Gamma_g = Cay(G_g, S_g)$ выбрана при помощи вложения графа Γ_g в гиперболическую плоскость. Таким образом получена оценка

$$\rho_g \ \leq \ \frac{1}{\sqrt{g}} \ .$$

Показано также, что эта оценка может быть еще улучшена, в частности, оказывается, что

$$\rho_2 \ < \ 0,688 \ .$$

В данной работе мы определим типовую функцию, используя комбинаторную структуру графа, а именно конусы в графе. Это позволяет еще улучшить численные оценки.

Как и прежде Γ – бесконечный, локально конечный связной граф. *Путем* длины n между вершинами x, y называется последовательность вершин $x = x_0, x_1, ..., x_n = y$, в которой $x_{i-1} \sim x_i$. *Расстояние* $d(x, y)$ между x и y есть минимальная длина пути между x и y. Путь минимальной длины называется *геодезической*.

Зафиксируем вершину $x_0 \in V(\Gamma)$. *Нормой* вершины x называется расстояние от x_0 до x, $|x| = d(x_0, x)$. Будем говорить, что x есть *предшественник* y, а y – *последователь* x, если $x \sim y$ и $|x| < |y|$.

Конусом $C(x)$ вершины x называется подграф графа Γ с корковой вершиной x, и такой что вершина y графа Γ является вершиной конуса $C(x)$ тогда и только тогда, когда существует геодезическая в Γ, соединяющая x_0 и y и проходящая через x. Две вершины имеют одинковый *конусный тип*, если их конусы изоморфны как графы с корковыми вершинами.

Предположим, что Γ имеет конечное число $K + 1$ различный конусных типов. Определим на Γ типовую функцию $t_0 : V \to \{0, 1, ..., K\}$, т.ч. $t_0(x) = i$, если x – вершина i-го конусного типа.

Если циклы в графе Γ имеют четную длину, то мы можем выбрать ориентацию $\mathcal{E}_0$ на Γ таким образом, что $|e_+| > |e_-|$ для каждого ребра $e \in \mathcal{E}_0$. Такую ориентацию будем называть *канонической*.

Лемма 1. *Если Γ двудолен, и число предшественников любой вершины зависит только от ее конусного типа, то каноническая ориентация и функция конусных типов совместимы.*

Доказательство. В двудольном графе любое ребро соединяет две вершины, находящиеся на расстоянии 1 друг от друга. Обозначим $r(x)$ – число предшественников вершины x и $q_j(x)$ – число последователей x конусного типа j. Две вершины x и y имеют одинковый конусный тип тогда и только тогда, когда $r(x) = r(y)$

и $q_j(x) = q_j(y)$ для всех значений j. По определению канонической ориентации имеем

$$\sharp\{e \in St_{\mathcal{E}_0}(x) \mid t(e_+) = j\} \;=\; \begin{cases} q_j(x), & \text{если } j \neq t(x), \\ r(x) + q_{t(x)}(x), & \text{если } j = t(x). \end{cases}$$

$\square$

Обозначим r_i и $q_{i,j}$ соответственно число предшественников и число последователей типа j вершины конусного типа i. Тогда функции f_i из Предложения, соответствующие конусной типовой функции и канонической ориентации, имеют вид

$$f_i = r_i c_i + \sum_{j=0}^{K} \frac{q_{i,j}}{c_j}, \quad i = 0, 1, ..., K.$$

Заметим, что конусный тип вершины x_0 отличается от конусного типа любой другой вершины. Положим $t_0(x_0) = 0$. Тогда имеем $r_0 = 0$ и $q_{i,0} = 0$ для всех $i \in \{0, ..., K\}$. Этот конусный тип может быть исключен из рассмотрения.

Лемма 2. *Предположим, что существует последовательность автоморфизмов графа* $\underline{h} = \{h_i\}_{i \geq 1}$, *сохраняющих ориентацию* $\mathcal{E}_0$ *и таких, что* $|h_i(x_0)| > i$ *для всех значений* i. *Тогда существует типовая функция* $t : V(\Gamma) \to \{1, ..., K\}$ *и ориентация* $\mathcal{E}$ *совместимая с* t, *такие, что* $f_i^{(t_0,\mathcal{E}_0)}(c_0, c_1 ..., c_K) = f_i^{(t,\mathcal{E})}(c_1, \ldots, c_k)$ *для всех положительных* $c_0, ..., c_K$ *и для* $\forall i \in \{1, \ldots, k\}$.

Доказательство. Определим последовательность типовых функций $(t_n)_{n \geq 1}$:

$$t_n(y) = t_0(h_n^{-1}(y)), \quad n \geq 1, \quad y \in V(\Gamma).$$

Существует лишь конечное число возможных раскрасок вершин внутри шара радиуса 1 с центром в x_0 числами $1, \ldots, K$. Таким образом мы можем выбрать из $\underline{h}$ бесконечную последовательность $\underline{h}^1 = \{h_{i_1}, .., h_{i_n}, ...\}$, такую что для любого y из шара радиуса 1, все $t_{i_n}(y)$ совпадают и отличны от 0. Затем, ценой перехода к последовательности $\underline{h}^2$, зафиксируем раскраску числами $\{1, \ldots, K\}$ вершин внутри шара радиуса 2, и так далее. В пределе мы получим типовую функцию $t : V \to \{1, ..., K\}$.

На каждом этапе мы также имеем новую ориентацию $\mathcal{E}_n = h_n(\mathcal{E}_0)$. Ориентацию, получающуюся в пределе, назовем $\mathcal{E}$. Для любого n условие $t_n(x) = t_n(y)$ означает $t_0(h_n^{-1}(x)) = t_0(h_n^{-1}(y))$. С другой стороны, условие $\sharp\{e \in St_{\mathcal{E}_n}(x) \mid t_n(e_+) = k\} = \sharp\{e \in St_{\mathcal{E}_n}(y) \mid t_n(e_+) = k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ может быть переписано в форме $\sharp\{e \in St_{\mathcal{E}_0}(h_n^{-1}(x)) \mid t_0(h_n^{-1}(e_+)) = k\} = \sharp\{e \in St_{\mathcal{E}_0}(y) \mid t_0(h_n^{-1}(e_+)) = k\}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Из этого следует совместимость t и $\mathcal{E}$.

По построению функции t ясно, что $f_i^{(t_0,\mathcal{E}_0)}(c_0, c_1 ..., c_K) = f_i^{(t,\mathcal{E})}(c_1, \dots, c_k)$ для всех положительных $c_0, ..., c_K$ и любого $i \in \{1, ..., K\}$. □

3. Группы поверхностей

Конусные типы графа Кэли фундаментальной группы поверхности рода g, $g \geqslant 2$, относительно стандартной системы образующих были описаны в работе [2]. Было установлено, что $\Gamma_g = \mathrm{Cay}(G_g, S_g)$ имеет $2g+1$ конусных типа. В качестве базовой вершины берется единичный элемент. Звезды вершин разных типов в Γ_g в соответствии с канонической ориентацией описываются следующим образом.

(1) единичный элемент имеет $4g$ последовательностей типа 1;
(2) вершина типа 1 имеет одного предшественника, $4g-3$ последователя типа 1 и двух последователей типа 2;
(3) вершины типа $i = 2, ..., 2g-1$ имеют одного предшественника $4g-3$ последователя типа 1, одного последователя типа 2 и одного последователя типа $i+1$;
(4) вершины типа $2g$ имеют двух предшественников, $4g-2$ последователя типа 1 и двух последователей типа 2.

После применения Леммы 2 мы получаем на Γ_g типовую функцию со значениями в множестве $\{1, ..., 2g\}$ и совместимую с ней ориентацию. Выпишем соответствующие функции $\{f_i\}$, $i \in \{1, \dots, K\}$:

$$f_i(c_1, ..., c_K) = \\ = \begin{cases} c_i + 1/c_2 + 1/c_{i+1} + (4g-3)/c_1, & \text{если } i = 1, ..., 2g-1, \\ 2c_{2g} + 2/c_2 + (4g-4)/c_1, & \text{если } i = 2g. \end{cases}$$

Матрица Якоби соответствующего многомерного отображения имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_{2g} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1-(4g-3)/c_1^2 & -2/c_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(4g-3)/c_1^2 & 1-1/c_2^2 & -1/c_3^2 & \cdots & 0 & 0 \\ -(4g-3)/c_1^2 & -1/c_2^2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -(4g-3)/c_1^2 & -1/c_2^2 & 0 & \cdots & 1 & -1/c_{2g}^2 \\ -(4g-4)/c_1^2 & -2/c_2^2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен

$$\det J =$$
$$= -2\big(c_1^2c_2^2...c_{2g}^2 - c_1^2c_3^2...c_{2g}^2 - ... - c_1^2c_{2g}^2 - c_1^2 - (4g-3)c_2^2c_3^2...c_{2g}^2$$
$$- (4g-3)c_3^2...c_{2g}^2 - ... - (4g-3)c_{2g}^2 + 1\big)/c_1^2...c_{2g}^2.$$

Теорема. *Рассмотрим систему уравнений*

$$\left.\begin{array}{c} 1/c_1 - 1/c_2 + c_i + 1/c_{i+1} - 2c_{2g} = 0, \ i = 1, ..., 2g-1 \\ \det J = 0. \end{array}\right\} (*)$$

Тогда

(1) *Существует вещественное положительное решение системы* $(*)$.

(2) *Пусть* $(c_1^{(1)}, \dots, c_{2g}^{(1)}), (c_1^{(2)}, \dots, c_{2g}^{(2)}), \dots, (c_1^{(n)}, \dots, c_{2g}^{(n)})$ *есть все вещественные положительные решения системы* $(*)$. *Тогда*

$$\rho_g \leqslant \max_{j=1,\dots,n} f_1(\tilde{c}_1^{(j)}, ..., \tilde{c}_{2g}^{(j)}).$$

Следствие 2.

$$\rho_2 < 0.662816 .$$

Доказательство Следствия 2. В случае $g = 2$ имеем

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & = & c_1 + 5/c_1 & + & 2/c_2 & & & & \\ f_2 & = & 5/c_1 & + & c_2 + 1/c_2 & + & 1/c_3 & & \\ f_3 & = & 5/c_1 & + & 1/c_2 & + & c_3 & + & 1/c_4 \\ f_4 & = & 4/c_1 & + & 2/c_2 & & & + & 2c_4. \end{array}$$

$$\det J = \frac{-2}{c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2}(c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2 - c_1^2c_3^2c_4^2 - c_1^2c_4^2 - c_1^2 - 5c_2^2c_3^2c_4^2 - 5c_3^2c_4^2 - 5c_4^2 + 1).$$

Система $(*)$ имеет вид

$$\left.\begin{aligned} c_1^2 + 1 - 2c_4c_1 &= 0 \\ c_3c_2 - c_3c_1 + c_2^2c_1c_3 + c_2c_1 - 2c_1c_2c_3c_4 &= 0 \\ c_2c_4 - c_1c_4 + c_1c_2c_3c_4 + c_1c_2 - 2c_4^2c_1c_2 &= 0 \\ c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2 - c_1^2c_3^2c_4^2 - c_1^2c_4^2 - c_1^2 - 5c_2^2c_3^2c_4^2 - 5c_3^2c_4^2 - 5c_4^2 + 1 &= 0\ . \end{aligned}\right\}$$

Она может быть решена численно путем последовательного исключения переменных. Система имеет единственное положительное решение

$$\{\widetilde{c}_1 \approx 0.266911, \widetilde{c}_2 \approx 2.63113, \widetilde{c}_3 \approx 2.39209, \widetilde{c}_4 \approx 1.52188\}.$$

Тогда

$$\frac{1}{8} f_i(\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3, \widetilde{c}_4) \approx 0.662815, \quad i = 1, ..., 4.$$

$\square$

Лемма 3. *Для любого $g \geqslant 2$ имеем*

$$\inf_{c_1,\dots,c_{2g} \in \mathbb{R}_+^{2g}} \max_{i=1,\dots,2g} f_i(c_1, \dots, c_{2g}) = \\ = \min_{(c_1,\dots,c_{2g} \in \mathbb{R}_+^{2g}} \max_{i=1,\dots,2g} f_i(c_1, \dots, c_{2g}).$$

Доказательство. Выберем натуральное число $N > 4g$. Рассмотрим куб $Q = [1/N, N]^{2g} \subset \mathbb{R}_+^{2g}$. Заметим, что

(1) $\forall j \in \{1, \dots, 2g\}$ имеем $f_j(1, 1, \dots, 1) = \max_{i=1,\dots,2g} f_i(1, 1, \dots, 1) = 4g$; кроме того $(1, 1, \dots, 1) \in Q$;

(2) Если $(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{2g}) \notin Q$, то есть если $\tilde{c}_j > N$ или $\tilde{c}_j < 1/N$ для некоторого $j \in \{1, \dots, 2g\}$, то $\max_{i=1,\dots,2g} f_i(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{2g}) > N$.

Функция $\max_{i=1,\dots,2g} f_i(c_1, \dots, c_{2g})$ непрерывна, следовательно, должна иметь минимум внутри куба Q.

Лемма 4. *Покажем, что если* $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_1, ..., \widetilde{c}_{2g}) \in \mathbb{R}_+^{2g}$ *является точкой локального минимума функции* $\max\limits_{i \in \{1,\dots,2g\}} f_i$, *то* $\widetilde{c}$ *является решением системы* $(*)$.

Доказательство. Предположим, что точка $\widetilde{c}$ такова, что $\max\limits_{f_i}(\widetilde{c}) = f_j(\widetilde{c})$ для некоторого значения j и $f_j(\widetilde{c}) \neq f_k(\widetilde{c})$ $\forall k \neq j$. Тогда, для того, чтобы $\widetilde{c}$ была точкой локального минимума функции $\max\limits_i f_i$, необходимо, чтобы $\nabla f_j(\widetilde{c}) = 0$. Но $\nabla f_j(c) \neq 0$ $\forall j = 1, \dots, 2g$ и $\forall c = (c_1, \dots, c_{2g}) > 0$.

Предположим далее, что точка $\widetilde{c}$ такова, что

$$\max_{i=1,\dots,2g} f_i(\widetilde{c}_1, ..., \widetilde{c}_{2g}) = f_{i_1}(\widetilde{c}_1, ..., \widetilde{c}_{2g}) = \dots = f_{i_k}(\widetilde{c}_1, ..., \widetilde{c}_{2g})$$

где $1 < k \leqslant 2g$. Если $\widetilde{c}$ есть точка локального минимума, то $\nabla f_{i_1}(\widetilde{c}), ..., \nabla f_{i_k}(\widetilde{c})$ линейно зависимы. Мы покажем, что это невозможно при $k < 2g$. Иначе говоря, покажем, что матрицы Якоби всех возможных отображений $(f_{i_1}, ..., f_{i_k})$ имеют максимальный ранг при $k < 2g$.

Пусть $k < 2g$. Предположим для определенности, что $i_1 < i_2 < ... < i_k$. Нам предется рассмотреть несколько случаев.

1) $i_k \neq 2g$. В этом случае подматрица матрицы J, состоящая из строчек J с номерами $i_1, \dots, i_k$ и столбцов J с номерами $i_1 + 1, \dots, i_k + 1$, является нижне-треугольной:

$$\begin{pmatrix} -\alpha/c^2_{i_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & -1/c^2_{i_2+1} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & -1/c^2_{i_k+1} \end{pmatrix},$$

где $\alpha = 2$, если $i_1 = 1$ и $\alpha = 1$, если $i_1 \neq 1$. Определитель такой матрицы отличен от нуля при любых положительных $c_1, ..., c_{2g}$.

2) $i_k = 2g$ $i_{k-1} \neq 2g - 1$. В этом случае подматрица матрицы J, состоящая из строчек J с номерами $i_1, ..., i_k$ и столбцов с номерами $i_1 + 1, ..., i_{k-1} + 1, 2g$, имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\alpha/c^2_{i_1+1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & -1/c^2_{i_2+1} & \cdots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & 2 \end{pmatrix},$$

и вновь ее определитель отличен от нуля при всех положительных $c_1, ..., c_{2g}$.

3) $i_{k-1} = 2g - 1$, $i_k = 2g$, $i_1 \neq 1$. В этом случае подматрица матрицы J, состоящая из строчек с номерами $i_1, ..., i_k$ и столбцов с номерами $i_1 + 1, ..., i_{k-2} + 1, 2g$ имеет форму

$$\begin{pmatrix} -(4g-3)/c_1^2 & -1/c_{i_1+1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -(4g-3)/c_1^2 & \gamma & -1/c_{i_2+1}^2 & \cdots & 0 & 0 \\ -(4g-3)/c_1^2 & 0 & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ -(4g-3)/c_1^2 & & & \cdots & \delta & -1/c_{2g}^2 \\ -(4g-4)/c_1^2 & & & & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

где $\beta, \gamma, \delta \in \{1, 0\}$. Путем разложения по первой строке нетрудно убедиться, что определитель этой матрицы тоже всегда отличен от нуля.

4) $i_1 = 1, i_2 \neq 2$, $i_k = 2g$, $i_{k-1} = 2g-1$. В этом случае подматрица матрицы J, состоящая из строк J с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $2, i_2, \ldots, i_k$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -2/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1/c_2^2 & 1 & \gamma & \cdots & 0 & 0 \\ -1/c_2^2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ -1/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/c_{2g}^2 \\ -2/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

и ее определитель равен $-4/c_2^2$.

5) $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_{k-1} = 2g-1$, $i_k = 2g$. В этом случае существует число $l \geqslant 1$, такое что $i_{k-l} = 2g - l$, но $i_{k-l-1} < 2g - l - 1$. Тогда подматрица матрицы J, состоящая из строк с номерами $i_1, ..., i_k$ и столбцов с номерами $2, 3, ..., i_{k-l-1} + 1, 2g - l, 2g$ имеет форму

$$\begin{pmatrix} -2/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 - 1/c_2^2 & -1/c_3^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1/c_2^2 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ -1/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1/c_{2g-1}^2 & 0 \\ -1/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1/c_{2g}^2 \\ -2/c_2^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Раскладывая по первой строке, потом по последней, потом опять по первой, по последней, и так далее, мы неизбежно приходим к диагональной матрице. Определитель, с точностью до знака, есть отношение 4 к произведению некоторого набора c_i^2, то есть, всегда отличен от нуля.

Таким образом мы показали, что $\min\limits_{\{c_1,\dots,c_{2g}\}} \max\limits_{i=1,\dots,2g} f_i(c_1,\dots,c_{2g})$ может достигаться только в точке, где все f_i совпадают и их градиенты линейно зависимы, что и означает, что такая точка является решением системы $(*)$. $\square$

Доказательство теоремы. Часть (1) теоремы является следствием Леммы 3. Часть (2) вытекает из Следствия 1 и Леммы 4. $\square$

Автор выражает благодарность Б. Б. Венкову, Р. И. Григорчуку, А. Зуку, С. К. Смирнову и П. де ла Харпу за ценные замечания.

Литература

1. L. Bartholdi, S. Cantat, T. Ceccherini-Silberstein, P. de la Harpe, *Estimates for simple random walks on fundamental groups of surfaces.* — to appear in Colloqium Math.
2. J. Cannon, *The growth of the closed surface groups and the compact hyperbolic Coxeter groups.* — Preprint (1980).
3. W. Pruitt, *Eigenvalues of non-negative matrices.* — Ann. Math. Statist. **35** (1964), 1797–1800.
4. L. Saloff-Coste, *Quelques aspects des marches aléatoires.* — cours de DEA (1996), Toulouse, Université Paul Sabatier.
5. A. Zuk, *A remark on the norm of a random walk on surface groups.* — to appear in Colloqium Math.

Nagnibeda T. An estimate from above of spectral radii of random walks on surface groups.

Using Gabber's Lemma, we get new estimates of the spectral radius of the simple random walk on the fundamental group of the orientable closed surface of genus $g, g \geq 2$. In order to get better numerical estimates we base our method on Cannon's classification of the group elements by their cone types. The method may as well be applied to many other groups and graphs with finite numbers of cone types.

Университет Женевы

Поступило 20 сентября 1996 г.