Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

И. А. Пушкарев

К ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ СПЛЕТЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С СИММЕТРИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ

§0. Введение

Пусть G – конечная группа, S_n – симметрическая группа степени n. Рассмотрим группу:

$$G_n \stackrel{\text{def}}{=} G \wr S_n, \tag{0.1}$$

т.е. сплетение группы G с группой S_n (другое обозначение: $G_N \stackrel{\text{def}}{=} GwrS_n$, wreath product, см., например, [6]). Группа G_n может быть естественным образом отождествлена с подходящей подгруппой группы G_{n+1}, т.е. мы имеем дело с возрастающей последовательностью конечных групп:

$$G = G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots. \tag{0.2}$$

Теория представлений групп вида (0.1) в общих чертах известна и изложена, например, в [8], или [6], Chap. 4, однако нигде, насколько нам известно, не обсуждается (и даже удовлетворительно не формулируется) такая важная деталь этой теории, как теорема ветвления неприводимых редставлений.

В недавней статье [1] был предложен новый, индуктивный подход к построению теории представлений симметрических групп, разивающий идеи статьи [7], который использует элементы Юциса–Мэрфи, введенные в работах [4, 5] и подалгебру Гельфанда-Цетлина (см. напр. список литературы в [1]), позволяющий значительно упростить и прояснить ее изложение. Достоинством этого подхода является то, что глубокая взаимосвязь между ветвлением неприводимых представлений симметрических групп и решеткой Юнга возникает в этом случае естественно, в то время как классический подход, по существу, состоит в угадывании неприводимого представления, соответствующего данной диаграмме Юнга. В частности, при таком подходе мы получаем теорему ветвления и ортогональную форму Юнга одновременно с описанием неприводимых представлений симметрических групп, а не как результат этого описания.

В настоящей работе упомянутый подход применяется к описанию неприводимых представлений групп вида (0.1); наше изложение основано на рассмотрении некоторой подалгебры алгебры $\mathbb{C}[G_n]$, названной нами обобщенной алгеброй Гельфанда–Цетлина. Неприводимые представления этой алгебры, с одной стороны, могут быть явно описаны, и, с другой стороны, являются теми “блоками”, из которых почти тривиальным образом ьогут быть сконструированы неприводимые представления группы G_n.

Отметим также работы [2] и [3], в которых рассмотрены алгебры Гекке, обобщающие серии групп $(\mathbf{Z}/r\mathbf{Z})\wr S_n$ и $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})\wr S_n$ соответственно; упомянутые последними группы — суть группы Коксетера серии BC.

Данная работа есть предварительный вариант построения рассматриваемой теории.

§1. Классы сопряженных элементов группы G_n

Определение 1.

(а) *Пусть* $G^n \stackrel{\mathrm{def}}{=} G\times G\times\ldots\times G$ *(n сомножителей). Определим для* $k\in[1\ldots n]$ *элемент*

$$g^{(k)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (e,\ldots,e,g,e,\ldots,e), \quad \forall g\in G \tag{1.1}$$

Элементы вида $g^{(k)}$ *при фиксированном* k *образуют подгруппу группы* G^n. *Обозначим ее* $G^{(k)}$. *Тем самым, имеем тривиальное вложение* $j_k : G \longrightarrow G^{(k)}\subset G^n$.

(б) *Рассмотрим вложение* $\sigma_n : S_n \longrightarrow AutG^n$, *заданное на образующих* $g^{(k)}$ *группы* G^n *посредством формулы:*

$$\left(g^{(k)}\right)^{\sigma_n(\gamma)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} g^{(\gamma(k))} \quad \text{при } k\in[1\ldots n], g\in G, \gamma\in S_n, \tag{1.2}$$

(в) *По определению:*

$$G_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} G\wr S_n = GwrS_n \tag*{(0.1)$'$}$$

есть множество пар вида $(\overline{g},\gamma)$, *где* $\overline{g}\in G^n$, $\gamma\in S_n$, *умножение которых задается правилом:*

$$(\overline{g}_1,\gamma_1)\cdot(\overline{g}_2,\gamma_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\overline{g}_1\cdot{\overline{g}_2}^{\sigma_n(\gamma_1)},\gamma_1\cdot\gamma_2) \tag{1.3}$$

Отметим некоторые важные подгруппы группы G_n:

(1) Множество элементов вида $(\overline{g}, id)$, где id – тождественная перестановка, образует нормальную подгруппу G^n группы G_n, при этом $G_n/G^n \cong S_n$. Допуская небольшую вольность, положим $\overline{g} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{g}, id)$.

(2) Множество элементов вида $(\overline{e}, \gamma)$, где $\overline{e}$ – единица группы G^n, образует подгруппу S_n группы G_n, элементы которой мы будем отождествлять с соответствующими перестановками.

(3) Множество элементов вида $\big((g_1, \dots, g_{n-1}, e), \gamma\big)$, где $\gamma(n) = n$, образует подгруппу группы G_n, изоморфную группе G_{n-1}. Отождествляя ее с собственно группой G_{n-1}, получаем (0.2).

Следующее утверждение доказывается прямым вычислением:

Лемма 1. *Пусть* $(1 \dots m)$ *есть циклическая подстановка. В группе* G_m*:*

(а) *Элементы* $\big(g_1^{(1)}, (1 \dots m)\big)$ *и* $\big(g_2^{(1)}, (1 \dots m)\big)$ *сопряжены тогда и только тогда, когда элементы* g_1 *и* g_2 *сопряжены в группе* G*;*

(б) $\forall g \in G,\quad k, l \in [1 \dots m]$ *элементы* $\big(g^{(l)}, (1 \dots m)\big)$ *и* $\big(g^{(k)}, (1 \dots m)\big)$ *сопряжены;*

(в) *Всякий элемент вида* $\big(\overline{g}, (1 \dots m)\big)$*, где* $\overline{g} \in G_m$*, сопряжен с некоторым элементом вида* $\big(h^{(1)}, (1 \dots m)\big)$*, где* $h \in G$*;*

(г) *Элементы* $\big(\overline{g}_1, (1 \dots m)\big)$ *и* $\big(\overline{g}_1, (1 \dots m)\big)$*, где* $\overline{g}_1, \overline{g}_2 \in G_m$*, сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены посредством некоторого элемента группы* G_m*.* $\bullet$

Пусть $i_1, \dots, i_m \in [1, \dots n]$, C – класс сопряженных элементов группы G. Элемент группы G_n вида $\big(g_1^{(i_1)}, \cdots, g_m^{(i_m)}, (i_1 \dots i_m)\big)$, сопряженный в группе G_n с элементом $\big(g^{(i_1)}, (i_1 \dots i_m)\big)$, где $g \in C$, посредством некоторого элемента группы $G^{(i_1)} \times \dots \times G^{(i_m)}$, назовем C-циклом типа $(i_1 \dots i_m)$; число m назовем длиной этого C-цикла. C-циклы назовем непересекающимися, если их типы – суть непересекающиеся циклы. Очевидно, что произвольный элемент группы G_n единственным образом разлагается в произведение непересекающихся C-циклов (при различных C); будем говорить, что эти C-циклы входят в рассматриваемый элемент группы G.

Далее, пусть $C(G)$ – множество всех классов сопряженных элементов группы G, P – множество всевозможных разбиений натуральных чисел. Произвольному элементу α группы G_n сопоставим функцию $\lambda_\alpha : C(G) \longrightarrow P$, ставящую в соответствие классу сопряженных элементов C группы G разбиение, частями которого являются длины C-циклов, входящих в α. Соответсвенно (поскольку $\alpha \in G_n$) имеем:

$$\sum_{C \in C(G)} |\lambda_\alpha(C)| = n \tag{1.4}$$

Из леммы 1 немедленно вытекает:

Следствие 2. *Элементы α и β группы G сопряжены тогда и только тогда, когда $\lambda_\alpha = \lambda_\beta$.* •

Символом $\langle i_1 \dots i_m \rangle_C, C \in C(G)$, обозначим сумму всех C-циклов типа $(i_1 \dots i_m)$.

Следствие 3. *Элементы алгебры $\mathbb{C}[G_n]$ вида:*

$$\begin{gathered} c(\lambda_1, \dots, \lambda_r; C_1, \dots, C_r) \stackrel{\text{def}}{=} \\ \sum_{(a_1^1 \dots a_{\lambda_r}^r)} \langle a_1^1, \dots, a_{\lambda_1}^1 \rangle_{C_1} \dots \langle a_1^r, \dots, a_{\lambda_r}^r \rangle_{C_r}, \end{gathered} \tag{1.5}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам $(a_1^1 \dots a_{\lambda_r}^r)$ множества $[1, \dots, n]$), образуют базис центра алгебры $\mathbb{C}[G_n]$. •

§2. Обобщенная алгебра Гельфанда–Цетлина и элементы Юциса–Мэрфи

Определение 2.

(a) *Для произвольного $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент u_n групповой алгебры $\mathbb{C}[G_n]$, заданный формулой:*

$$u_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{g \in G} g^{(n)}(i, n) \big(g^{-1}\big)^{(n)}. \tag{2.1}$$

Элемент u_n будем называть n-ным элементом Юциса–Мэрфи.

Замечание. Элемент u_n является весьма естственным обобщением введенного в [4, 5] элемента X_n алгебры $\mathbb{C}[S_n]$ вида:

$$X_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} (i, n) \tag{2.2}$$

(б) *Обобщенной алгеброй Гельфанда–Цетлина назовем подалгебру* GZ_n *алгебры* $\mathbb{C}[G_n]$, *порожденную групповой алгеброй* $\mathbb{C}[G^n]$ *и центрами*$Z_1,\dots,Z_n$ *алгебр* $\mathbb{C}[G_1],\dots,\mathbb{C}[G_n]$ *соответственно:*

$$GZ_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\langle \mathbb{C}[G^n], Z_1,\dots,Z_n \right\rangle_C \tag{2.3}$$

(в) *Положим:*

$$H_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\langle \mathbb{C}[G^n], u_2,\dots,u_n \right\rangle_C \tag{2.4}$$

Имеет место:

Теорема 4. *Для всех* $k \in N$ $H_k = GZ_k$.

Доказательство. Очевидно: $u_k \in \left\langle Z_1,\dots,Z_k \right\rangle_C$, поэтому $\forall k \in [1,\dots,n]$ $H_k \subset GZ_k$. Следовательно, достаточно проверить обратное вложение. При $k=1$ оно очевидно. Пусть оно верно при $k \in [1,\dots,m-1]$, покажем, что оно тогда верно и при $k=m$.

Пусть $s \in [0,\dots,m-1]$, $(i_1,\dots,i_s)$ – набор попарно-неравных элементов множества $[1,\dots,m-1]$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0$, $\sum_{i=1}^r \lambda_i = m-1-s$, $C_1,\dots C_r \in C(G)$. Положим:

$$\begin{aligned} &c(i_1,\dots,i_s;\lambda_1,\dots,\lambda_r;C_1,\dots,C_r) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ &= \sum_{(a_1^1,\dots,a_{\lambda_r}^r)} \langle a_1^1,\dots,a_{\lambda_1}^1\rangle_{C_1}\dots\langle a_1^r,\dots,a_{\lambda_r}^r\rangle_{C_r}, \end{aligned} \tag{2.5}$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(a_1^1,\dots,a_{\lambda_r}^r)$ множества $[1,\dots,m-1]\setminus\{i_1,\dots,i_s\}$;

$$\begin{aligned} f(s;C_0;\lambda_1,\dots,\lambda_r;C_1,\dots,C_r) &\stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ = \sum_{(i_1,\dots,i_s)} &\langle m,i_1,\dots,i_s\rangle_{C_0}\cdot \\ &\cdot c(i_1,\dots,i_s\lambda_1,\dots,\lambda_r;C_1,\dots C_r), \end{aligned} \tag{2.6}$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам $(i_1,\dots,i_s)$ попарно-неравных элементов множества $[1,\dots,m-1]$. Совершенно аналогично следствию 3 можно показать, что элементы (2.6) образуют базис централизатора $Z_{m-1,1}$ подалгебры $\mathbb{C}[G_{m-1}]$ в алгебре $\mathbb{C}[G_m]$. Следовательно, показав, что все элементы $f(s;C_0;\lambda_1,\dots,\lambda_r;C_1,\dots,C_r)$ содержатся в H_m, мы тем самым докажем теорему 4.

Заметим:

$$
\begin{aligned}
&f(s;C_0;\lambda_1,\ldots,\lambda_r;C_1,\ldots,C_r)=\\
&=\big(\sum_{g\in C_0} g^{(n)}\big)\cdot f(s;\{e\};\lambda_1,\ldots,\lambda_r;C_1,\ldots,C_r),
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где $\{e\}$ – тривиальный класс сопряженных элементов группы G, и

$$
u_n^s=\sum_{(i_1,\ldots,i_s)}\langle n,i_1,\ldots,i_s\rangle_{\{e\}}. \tag{2.8}
$$

Весом элемента $f(s;C_0;\lambda_1,\ldots,\lambda_r;C_1,\ldots,C_r)$ назовем сумму всех элементов множества $\{s+1,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}$, превосходящих единицу. Очевидно, что все элементы веса 0или 2 лежат в H_m. Пусть доказано, что все элементы, имеющие вес $0,2,\ldots,l-1$, лежат в H_m. Покажем, что элементы веса l в этом случае тоже лежат в H_m. Действительно, пусть $f(t;C_0;\mu_1,\ldots,\mu_r;C_1,\ldots,C_r)$ именно таков. Имеем:

$$
\begin{aligned}
&f(t;C_0;\lambda_1,\ldots,\lambda_r;C_1,\ldots,C_r)=\\
&\qquad=\Big(\sum_{g\in C_0} g^{(n)}\cdot u_n^t\Big)\cdot\\
&\cdot\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_t)} c(i_1,\ldots,i_s\mu_1,\ldots,\mu_r;C_1,\ldots C_r)\Big)\\
&\qquad+\ \text{младшие члены}\ .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Правая часть (2.9) содержится в H_k, тем самым теорема 4 доказана. •

введем для краткости обозначение:

$$
s_n \overset{\text{def}}{=} (n,n+1). \tag{2.10}
$$

Следующее утверждение легко может быть доказано прямой проверкой:

Предложение 5. *Имеют место соотношения:*

$$\begin{aligned}
&(a)\quad s_n g^{(n)} s_n = g^{(n+1)}, \qquad \forall g\in G, n\in\mathbb{N},;\\
&(b)\quad s_n g^{(l)} = g^{(l)} s_n, \qquad \text{при } l\neq n, n+1,;\\
&(c)\quad s_n u_n s_n + \sum_{g\in G} g^{(n)} s_n \left(g^{-1}\right)^{(n)} = u_{n+1};\\
&(d)\quad s_n u_l = u_l s_n, \qquad \text{при} \quad l\neq n, n+1;\\
&(e)\quad u_n g^{(l)} = g^{(l)} u_n \qquad \forall n,l\in\mathbb{N}, g\in G. \quad \bullet
\end{aligned} \tag{2.11}$$

§3. Неприводимые представления одношаговой алгебры

Определение 3. *Одношаговой алгеброй назовем алгебру A над полем $\mathbb{C}$, порожденную двумя изоморфными экземплярами $G^{(1)}$ и $G^{(2)}$ группы G (при этом отображения $g\mapsto g^{(i)}$ при $i=1,2$ по определению полагаются изоморйфизмами $G\longrightarrow G^{(i)}$) и элементами u_1, u_2, s, связанными соотношениями:*

$$\begin{aligned}
&(a)\quad s g^{(1)} s = g^{(2)}, \qquad \forall g\in G;\\
&(b)\quad s u_1 s + \sum_{g\in G} g^{(2)} s \left(g^{-1}\right)^{(2)} = u_2;\\
&(c)\qquad u_1 u_2 = u_2 u_1;\\
&(d)\quad u_i g^{(j)} = g^{(j)} u_i, \quad \forall g\in G, i,j\in\{1,2\};\\
&(e)\qquad s^2 = e.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Нашей ближайшей целью является описание неприводимых представлений алгебры A. Соотношение $(3.1)(b)$ в силу $(3.1)(a)$ и (e) может быть переписано двумя способами:

$$u_2 s = s u_1 + \sum_{g\in G} g^{(1)} \left(g^{-1}\right)^{(2)}, \tag{3.2)(a}$$

или:

$$u_1 s = s u_2 - \sum_{g\in G} g^{(1)} \left(g^{-1}\right)^{(2)}, \tag{3.2)(b}$$

поэтому нашим первым шагом будет изучение действия оператора

$$B \overset{\text{def}}{=} \sum_{g\in G} g^{(1)} \left(g^{-1}\right)^{(2)} \tag{3.3}$$

на пространствах неприводимых представлений группы $G \times G = G^{(1)} \times G^{(2)}$.

Пусть $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ – неприводимое представление группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$ на пространстве $V^{\pi_1} \otimes V^{\pi_2}$ (где π_i – неприводимое представление группы $G = G^{(i)}$ на пространстве V^{π_i}).

Для произвольных $h, q \in G$ имеет место (легко проверяемое) равенство:

$$h^{(1)} q^{(2)} \cdot B = B \cdot q^{(1)} h^{(2)}, \tag{3.4}$$

тем самым, оператор B есть сплетающий оператор для (неприводимых) представлений $\pi_1 \otimes \pi_2$ и $\pi_2 \otimes \pi_1$ группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$. Возможны два случая:

Сл. 1. $\pi_1 \neq \pi_2$. В этом случае $B = 0$ в силу леммы Шура.

Сл. 2. $\pi_1 = \pi_2 = \pi_0$. Пусть τ – инволюция пространства $V^{\pi_0} \otimes V^{\pi_0}$, меняющая местами сомножители. Тогда, по лемме Шура, $B = c \cdot \tau$ для некоторого $c \in C$.

Константа c может быть легко вычислена (при помощи первого соотношения ортогональности для характеров) и равна $\frac{|G|}{\dim\ \pi_0}$, т.е.:

$$B = \frac{|G|}{\dim\ \pi_0} \cdot \tau. \tag{3.5}$$

Далее, пусть V – пространство неприводимого представления π группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$. Тогда, в силу соотношений (3.2) (а), (б), пространство $\langle V, sV \rangle A$-инвариантно; в этом случае пространство sV $G^{(1)} \times G^{(2)}$-инвариантно, и, если представление группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$ на пространстве V есть $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ $\left(V = V^{\pi_1} \otimes V^{\pi_2}\right)$, то представление группы $G^{(1)} \times G^{(2)}$ на пространстве sV есть $\pi_2 \otimes \pi_1$. В силу всего вышеизложенного возможны три случая:

Сл. 1. $\pi_1 \neq \pi_2$. В этом случае матрицы образующих алгебры A в подходящем базисе пространства $\langle V, sV \rangle$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \Pi(g^{(1)} \cdot h^{(2)}) = \begin{pmatrix} \Pi_1(g) \otimes \Pi_2(h) & O \\ O & \Pi_1(h) \otimes \Pi_2(g) \end{pmatrix}, \\
&(b) \quad \Pi(u_1) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot E & O \\ O & \mu \cdot E \end{pmatrix}, \\
&(c) \quad \Pi(u_2) = \begin{pmatrix} \mu \cdot E & O \\ O & \lambda \cdot E \end{pmatrix}, \\
&(d) \quad \Pi(s) = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где Π – (здесь и далее) рассматриваемое матричное представление алгебры A на пространстве $\langle V, sV\rangle$, Π_1 и Π_2 – матричные представления, соответствующие представлениям π_1 и π_2, O – нулевая матрица, а E – единичная. В этом случае представление π всегда неприводимо.

Сл. 2. $\pi_1 = \pi_2 = \pi_0, m = \dim\ \pi_0, \lambda \pm \frac{|G|}{m} \neq \mu$. Матрицы образующих алгебры A в подходящем базисе пространства $\langle V, sV\rangle$ имеют вид:

$$(a)\quad \Pi(g^{(1)}\cdot h^{(2)}) = \begin{pmatrix} \Pi_1(g)\otimes\Pi_2(h), & O \\ O\qquad , & \Pi_1(h)\otimes\Pi_2(g) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} &(b)\quad \Pi(u_1) = \begin{pmatrix} \lambda\cdot E & -\frac{|G|}{m}\cdot E \\ O & \mu\cdot E \end{pmatrix}, \\ &(c)\quad \Pi(u_2) = \begin{pmatrix} \mu\cdot E & \frac{|G|}{m}\cdot E \\ O & \lambda\cdot E \end{pmatrix}, \\ &(d)\quad \Pi(s) = \begin{pmatrix} O & E \\ E & O \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

В этом случае представление π также неприводимо. Заметим также, что в этом случае $\lambda \neq \mu$ т.к. иначе матрицы операторов u_1 и u_2 не диагонализируются.

Сл. 3. $\pi_1 = \pi_2 = \pi_0, m = \dim\ \pi_0, \lambda \pm \frac{|G|}{m} = \mu$. В этом случае матрицы образующих алгебры A в подходящем базисе пространства $\langle V, sV\rangle$ также имеют вид (3.7), однако представление π уже не является неприводимым, т.к. пространство $\langle V, sV\rangle$ имеет m-мерное инвариантное подпространство.

Тем самым все неприводимые представления алгебры A описаны. Однако базис пространства $\langle V, sV\rangle$, составленный из базисов пространств V и sV нельзя назвать наиболее удобным. Рассмотрим оператор:

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{1-\varrho^2}}\cdot(s+\varrho\cdot\tau) \tag{3.8}$$

где, здесь и далее

$$\varrho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|G|}{(\dim\ \pi_0\cdot(\lambda-\mu))} \tag{3.9}$$

Тогда пространство PV $G^{(1)}\times G^{(2)}$-инвариантно и матрицы образующих алгебры A (в Сл.2) в базисе $\{v_i^1\otimes v_j^2, P(v_i^1\otimes v_j^2)\}$ (где

$\{v_1^i, \dots, v_m^i\}$ – некоторый базис пространства V^π неприводимого представления π группы $G^{(i)}$) имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad \Pi'(g^{(1)} \cdot h^{(2)}) = \begin{pmatrix} \Pi_1(g) \otimes \Pi_2(h) & O \\ O & \Pi_1(h) \otimes \Pi_2(g) \end{pmatrix}, \\
&(b) \quad \Pi'(u_1) = \begin{pmatrix} \lambda \cdot E & O \\ O & \mu \cdot E \end{pmatrix}, \\
&(c) \quad \Pi'(u_2) = \begin{pmatrix} \mu \cdot E & O \\ O & \lambda \cdot E \end{pmatrix}, \\
&(d) \quad \Pi'(s) = \begin{pmatrix} -\varrho \cdot E & \sqrt{1-\varrho^2} \cdot E \\ \sqrt{1-\varrho^2} \cdot E & \varrho \cdot E \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Если же мы хотим ограничиться полем $\mathbb{Q}$ и должны поэтому избегать извлечения квадратного корня, то вместо оператора P следует рассмотреть оператор:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} (s + \varrho \cdot \tau) \tag*{(3.8)$'$}$$

что приведет нас к матрицам операторов $g^{(1)} \cdot h^{(2)}, u_1, u_2$ вида $(3.9)(a), (b), (c)$ и к матрице оператора s вида:

$$(d) \quad \Pi''(s) = \begin{pmatrix} -\varrho \cdot E \quad , & E \\ \left(1-\varrho^2\right) \cdot E, & \varrho \cdot E \end{pmatrix}, \tag*{(3.10)$'$}$$

§4. Содержательные списки и G-таблицы Юнга

Данный параграф содержит по существу только определения и является подготовкой к формулированию основных результатов.

Определение 4. (a) *Последовательность* $(a_1, \dots, a_m)$ *целых чисел назовем содержательной, если она удовлетворяет следующим трем условиям:*

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && a_1 = 0 \\
&\text{(ii)} && \forall k \in [2 \dots m], a_k \neq 0, \\
& && \exists i < k : a_k - a_i = \operatorname{sign} a_k; \\
&\text{(iii)} && \forall k, l \in [1 \dots m],\ k < l,\ a_k = a_l = a \\
& && \exists i, j \in [k \dots l] : a_i = a - 1, a_j = a + 1.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Множество всех содержательных последовательностей длины m *обозначим* $\mathrm{Cont}(m)$.

(b) *Пусть* D – *диаграмма Юнга,* x – *одна из ее клеток, лежащая на пересечении* i*-той строки и* j*-того столбца* D. *Содержанием клетки* x *назовем разность:*

$$c(x) \stackrel{\text{def}}{=} i - j. \tag{4.2}$$

(c) *Пусть* t – *таблица Юнга формы* D. *Положим* $c_t(i) \stackrel{\text{def}}{=} c(x)$, *где* x – i*-тая клетка таблицы* t.

Имеет место (см. [1]):

Лемма 6. *Последовательность является содержательной тогда и только тогда, когда имеет вид* $(c_t(1), \dots, c_t(m))$, *где* t – *некоторая стандартная таблица Юнга.*

Определение 5. (a) *Пусть* $\widehat{G}$ – *множество классов эквивалентности неприводимых представлений группы* G, R – *матрица (список) вида:*

$$R = \begin{pmatrix} \pi_1, & \pi_2, & \dots, & \pi_n \\ b_1, & b_2, & \dots, & b_n \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

где $\pi_i \in \widehat{G}$, $b_i \in \mathbb{Z}$.

Для всякого $\pi \in \widehat{G}$ *символом* $\pi(R)$ *обозначим последовательность целых чисел:*

$$\Big(\frac{\dim\ \pi}{|G|} b_{j_1}, \dots, \frac{\dim\ \pi}{|G|} b_{j_{s_\pi}}\Big), \tag{4.4}$$

где $j_1, \dots, j_{s_\pi}$ – *такая подпоследовательность последовательности* $1, \dots, n$, *что* $\forall i \in [1, \dots, s_\pi]\quad \pi_{j_i} = \pi$ *и* $\pi_j \neq \pi$, *если* $j \neq j_1, \dots, j_{s_\pi}$.

(b) *Список вида* (4.3) *назовем содержательным, если* $\pi \in \widehat{G}$ $\pi(R) \in \mathrm{Cont}(s_\pi)$. *Множество всех содержательных списков длины* n *обозначим* $\mathrm{CONT}(n)$.

(c) *Пусть* J – *множество всевозможных диаграмм Юнга, имеющих конечное число клеток.* G*-диаграммой Юнга назовем функцию* $\mathbb{D} : \widehat{G} \longrightarrow J$. *Будем говорить, что* G*-диаграмма* $\mathbb{D}$ *состоит из* n *клеток, если:*

$$\sum_{\pi \in \widehat{G}} \big|\mathbb{D}(\pi)\big| \stackrel{\text{def}}{=} \big|\mathbb{D}\big| = n. \tag{4.5}$$

(d) *Пусть* $\mathbb{D}$ – *G-диаграмма Юнга,* $C(\mathbb{D})$ – *множество ее клеток. G-таблицей Юнга формы* $\mathbb{D}$ *назовем биективное соответствие* t: $C(\mathbb{D}) \longrightarrow [1,\dots|\mathbb{D}|]$; *$G$-таблицу Юнга назовем стандартной, если номера клеток возрастают вдоль строк и столбцов всех диаграмм Юнга, входящих в* $\mathbb{D}$. *Если* i *-тая клетка таблицы содержится в* $\mathbb{D}(\pi)$, *будем писать* $\mathrm{rep}_t(i) = \pi$.

Из леммы 6 немедленно вытекает:

Лемма 7. *Список* $R = \begin{pmatrix} \pi_1, & \dots, & \pi_n \\ b_1, & \dots, & b_n \end{pmatrix}$ *является содержательным тогда и только тогда, когда существует G-таблица Юнга* t *такая, что:*

$$\forall i \in [1,\dots,n] \quad \pi_i = \mathrm{rep}_t(i), \quad b_i = \frac{|G| \cdot c_t(i)}{\dim\ \pi_i} \qquad \bullet$$

§5. Основная теорема

Пусть V^π – пространство неприводимого комплексного представления π группы G, W – подпространство пространства V^π, являющееся пространством неприводимого представления $\rho = \otimes_{i=1}^n \rho_i$ группы $G^{(n)} = G^{(1)} \times G^{(2)} \times \dots \times G^{(n)}$, где ρ_i – неприводимое представление группы $G^{(i)}$, описанную ситуацию будем коротко записывать выражением $W \sqsubset V^\pi$. Согласно $(2.11)(e)$, операторы $u_1 \equiv 0, u_2, \dots, u_n$ действуют на W как операторы умножения на константу $b_1 = 0, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$.

Определение 6. *Список* $R^\pi(W) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix} \rho_1, & \dots, & \rho_n \\ b_1, & \dots, & b_n \end{pmatrix}$ *назовем спектральным списком пространства* W. *Положим:*

$$\mathrm{SPEC}_R(n) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{R^\pi(W) : W \sqsubset V^\pi, \pi \in \widehat{G}\}. \tag{5.1}$$

Основным техническим результатом настоящей работы является следующая:

Теорема 8.

$$\mathrm{SPEC}_R(n) \subset \mathrm{CONT}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.2}$$

Доказательство. При $n = 1$ вложение очевидно. Пусть оно доказано при $n = 1, \dots k-1$; покажем, что в этом случае оно верно и при $n = k$.

Пусть $R \in \mathrm{SPEC}_R(k)$. Тогда $\exists \pi \in \widehat{G}, W \sqsubset V^\pi : R = R^\pi(W)$. Поэтому, если

$$R = \begin{pmatrix} \rho_1, & \dots, & \rho_{k-1}, & \rho_k \\ b_1, & \dots, & b_{k-1}, & b_k \end{pmatrix}, \text{ то}$$

$$\grave{R} = \begin{pmatrix} \rho_1, & \dots, & \rho_{k-1} \\ b_1, & \dots, & b_{k-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SPEC}_R(k-1) \subset \mathrm{CONT}(k-1).$$

Рассмотрим алгебру $A_k \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \ \mathbb{C}[G^{(k-1)} \times G^{(k)}], u_{k-1}, u_k, s_{k-1} \right\rangle$. Пространство $\left\langle W, s_{k-1}W \right\rangle$, очевидно, A_k-инвариантно. Заметим, что мы находимся в ситуации, описанной в §3.

Пусть $u_{k-1} = \lambda \cdot Id_W$, $u_k = \mu \cdot Id_W$ (т.е. пространство W состоит из общих собственных векторов операторов u_{k-1} и u_k с собственными числами λ и μ соответственно). Если $\rho_k \neq \rho_{k-1}$ или $\rho_k = \rho_{k-1}$, $\lambda + \frac{|G|}{\dim \ \rho_k} \neq \mu$, то, согласно формулам (3.6) и (3.10),

$$\exists \grave{W} \subset \left\langle W, s_{k-1}W \right\rangle, \ \grave{W} \sqsubset V^\pi \ :$$

$$R^\pi(\grave{W}) = \begin{pmatrix} \rho_1, & \dots, & \rho_{k-2}, & \rho_k, & \rho_{k-1} \\ b_1, & \dots, & b_{k-2}, & b_k, & b_{k-1} \end{pmatrix}, \text{ следовательно,}$$

$$\widetilde{R} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \rho_1, & \dots, & \rho_{k-2}, & \rho_k \\ b_1, & \dots, & b_{k-2}, & b_k \end{pmatrix} \in \mathrm{SPEC}_R(k-1) \subset \mathrm{CONT}(k-1)$$

откуда, наконец, вытекает: $R \in \mathrm{CONT}(k)$

В случае же, когда $\rho_k = \rho_{k-1}$, $\lambda + \frac{|G|}{\dim \ \rho_k} = \mu$, очевидным образом $R \in \mathrm{CONT}(k)$ $\bullet$.

Заметим: если $W_1 \sqsubset V^\pi \sqsupset W_2$, $\exists \gamma \in S_n < G_n : W_2 = \gamma \cdot W_1$, то $R^\pi(W_1)$ и $R^\pi(W_2)$ соответствуют, в силу (3.6) и (3.9), G-таблицам Юнга одинаковой формы $\mathbb{D}$. Далее, подгруппы S_n и G^n порождают группу G_n, поэтому, если $W \sqsubset V^\pi$, то $S_n \cdot W = V^\pi$, т.е. $\pi = \pi_{\mathbb{D}}$ в смысле определения 7 (см. ниже). Наконец, представления $\pi_{\mathbb{D}}$, очевидно, попарно-неэквивалентны, их количество равно количеству различных G-диаграмм Юнга,т.е. количеству неприводимых представлений группы G_n так что:

(a) имеет место:

$$\mathrm{SPEC}_R(n) = CONT(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

(b) описаны все неприводимые представления группы G_n, именно:

Определение 7. *Пусть $\mathbb{D}$ – G-диаграмма Юнга, t – стандартная G-таблица формы $\mathbb{D}$, W^i – пространство неприводимого предста-*

вления $\operatorname{rep}_t(i)$ *группы* $G = G^{(i)}$. *Положим:*

$$W_t \overset{\text{def}}{=} \bigotimes_{i=1}^{n} W^i, \quad \text{где } n = |\mathbb{D}|, \tag{5.4}$$

$$V^{\mathbb{D}} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus W_t, \tag{5.5}$$

где суммирование ведется по всем W_t, *соответствующим стандартным* G*-таблицам формы* $\mathbb{D}$. *Действие элементов группы* G^n *на пространствах* W_t *задается самим определением последних; определим действие образующих* $s_1, \ldots, s_{n-1}$ *группы* S_n *на эти пространства посредством формулы:*

$$s_k \cdot W_t \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} W_t, & \text{если } k\text{-ая и } (k+1)\text{-ая клетки лежат в одной строке или в одном столбце некоторой диаграммы Юнга, входящей в } \mathbb{D}. \\ \frac{1}{r_{k,k+1}} W_t + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{k,k+1})^2}}\, W_{t(k,k+1)}, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5.6}$$

где:

$$r_{k,k+1} \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} c_t(k+1) - c_t(k), & \text{если } k\text{-ая и } (k+1)\text{-ая клетки лежат в одной диаграмме Юнга, входящей в } \mathbb{D} \\ \infty, & \text{иначе}. \end{cases} \tag{5.7}$$

Описанное (очевидно, неприводимое) представление группы G_n обозначим $\pi_{\mathbb{D}}$. Следующий результат, по существу, уже доказан:

Теорема 9. *Всякое неприводимое представление группы* G_n *имеет вид* $\pi_{\mathbb{D}}$ *для некоторой* G*-диаграммы Юнга* $\mathbb{D}$, $|\mathbb{D}| = n$. •

Пусть $\mathbb{D}$ – G-диаграмма Юнга, $\pi \in \widehat{G}$. Множество G-диаграмм Юнга, получаемых удалением одной из крайних клеток диаграммы $\mathbb{D}(\pi)$, обозначим символом $\mathbb{D} \downarrow \pi$. Имеет место:

Теорема 10. *Пусть* $\varrho \in \widehat{G}$, $\varrho \downarrow G_{n-1}$ *– ограничение представления* ϱ *на группу* G_{n-1}. *Тогда:*

$$\varrho \downarrow G_{n-1} = \bigoplus_{\rho \in \widehat{G}} \dim \rho \cdot \Big(\bigoplus_{\mathbb{K} \in \mathbb{D} \downarrow \rho} \pi_{\mathbb{K}} \Big). \quad \bullet \tag{5.8}$$

Пусть $\{(\Gamma_i, \mathcal{D}_i)\}_{i\in I}$ – семейство градуированных графов, где $\Gamma_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Gamma_i^j$ – множества вершин; Γ_i^j – множество вершин j-того этажа i-того графа; $\mathcal{D}_i = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_i^{j,j+1}$ – множества ребер; $\mathcal{D}_i^{j,j+1}$ – множество ребер i-того графа, соединяющих вершини j-того и $(j+1)$-ого этажей.

Определение 8. (a) *Декартовым произведением* $\prod_{i\in I}(\Gamma_i, \mathcal{D}_i)$ *семейства градуированных графов* $\{(\Gamma_i, \mathcal{D}_i)\}_{i\in I}$ *называется градуированный граф* $(\widehat{\Gamma}_i, \widehat{\mathcal{D}_i})$, *вершины n-того этажа которого – суть семейства вида* $\{v_i\}_{I\in I}$ *где* $v_i \in \Gamma_i^{j(i)}$, *при этом* $\sum_{i\in I} j(i) = n$.

Вершины $\{v_i\}_{I\in I}$ *и* $\{w_i\}_{I\in I}$ *соответственно n-того и $(n+1)$-ого этажей соединены k ребрами тогда и только тогда, когда* $\exists i_0 \in I \ : \ \forall i \in I \setminus \{i_0\} \quad v_i = w_i$ *и вершины* $v_{i_0} \neq w_{i_0}$ *соединены в* $(\Gamma_{i_0}, \mathcal{D}_{i_0})$ *точно k ребрами.*

(b) *Назовем n-кратной решеткой Юнга градуированный граф* $\mathcal{Y}_n$), *множество вершин которого есть множество всех конечных диаграмм Юнга, при этом две вершины в нем соединены n ребрами тогда и только тогда, когда соединены ребром в решетке Юнга* $\mathcal{Y}$.

(c) *Пусть* $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{A}_m \subset \ldots$ *есть бесконечная возрастающая последовательность конечномерных полупростых алгебр. Графом ветвления (диаграммой Браттели) этой последовательности назовем градуированный граф* $(\Gamma = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i, \mathcal{D} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{D}_{i,i+1})$, *множество вершин i-того этажа которого есть множество* $\widehat{\mathcal{A}_i}$ *неприводимых представлений алгебры* $\mathcal{A}_i$, *при этом вершины* $\mu \in \Gamma_i = \widehat{\mathcal{A}_i}$ *и* $\nu \in \Gamma_{i+1} = \widehat{\mathcal{A}_{i+1}}$ *соединены k ребрами тогда и только тогда, когда*

$$k = \dim \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}_i}(\mu, \nu \downarrow \mathcal{A}_i). \tag{5.9}$$

Следующее утверждение является альтернативной формулировкой теоремы 10:

Теорема 11. *Диаграмма Браттели* $\mathcal{Y}_G$ *последовательности алгебр* $\mathbb{C}[G_1] \subset \mathbb{C}[G_2] \subset \ldots \subset \mathbb{C}[G_m] \subset \ldots$ *есть граф*

$$\mathcal{Y}_G \overset{\mathrm{def}}{=} \prod_{\varrho\in\widehat{G}} \mathcal{Y}_{\dim \ \varrho}, \tag{5.10}$$

иначе говоря $\mathcal{Y}_G$, *есть произведение n кратных решеток Юнга, где* $n = \#\widehat{G}$, *кратности которых – суть размерности соответствующих неприведимых представлений.* $\bullet$

Литература

1. A. Okounkov, A. Vershik, *A new approach to representation theory of symmetric groups.* Vienna, Prep ESI 333 (1996).
2. S. Ariki, K. Koike, *A Hecke algebra of* $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}\wr S_n$ *and construction of its irreductible representations.* Adv. in Math. 106 pp.216-243 (1994).
3. A. Ram, *Seminormal representations of Weyl groups and Ivahori-Hecke algebras.* Prep. NSW (1995).
4. G. Murphy, *A new costruction of Young's seminormal representation of symmetric group.* J. Algebra 69(1981). pp.267-291.
5. A. Jucys, *Symmetric polynomial and the center of the symmetric group ring.* Rep. Math. Phys., 5(1974), pp.107-112.
6. G. James, A. Kerber, *The representation theory of the symmetric group. Ch.4.* Addison-Wesley, 1981.
7. A. Vershik, *Local algebras and a new version of Young's orthogonal form..* Topics in Algebra, Banach center publications, vol. 26(2) PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1990.
8. I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials.* The second edition, Oxford University Press.

Pushkarev I. A. On the representation theory of wreath products of finite group and symmetric group.

Let $G \wr S_N$ be a wreath product of finite group G and symmetric gro/up S_N. The aim of this paper is to prove the branching theorem for the increasing sequence of finite groups $G \wr S_1 \subset G \wr S_2 \subset \ldots \subset G \wr S_N \subset \ldots$ and the analog of Young's orthogonal form for this case, using the inductive approach,invented by A. Vershik and A. Okounkov for the case of symmetric group.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 2 сентября 1996