Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 240, 1997 г.

Н. А. Сидоров

ФУНКЦИЯ "СУММА ЦИФР" ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

§1. Введение.

Пусть $\mathcal{Q} = (q_n)_{n=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел с $q_1 = 1$. Тогда каждое натуральное n может быть представлено в виде

$$n = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j q_j \tag{1}$$

с k таким, что $q_k \leqslant n < q_{k+1}$ и с $\varepsilon_k, \varepsilon_{k-1}, \dots, \varepsilon_1$, полученными при помощи *быстрого алгоритма*, то есть

$$\varepsilon_k = \left[\frac{n}{q_k}\right], \ \varepsilon_j = \left[\frac{n - \sum_{i=j+1}^{k} \varepsilon_i q_i}{q_j}\right], \quad 1 \leqslant j < k.$$

(см., напр., [1]). Назовем множество $\mathcal{Q} = (q_k)_1^{\infty}$ *целочисленной базой*, а $\varepsilon_k, \dots, \varepsilon_1$ — *цифрами*.

Для произвольной целочисленной базы цифры не являются независимыми. Например, очевидным образом, $0 \leqslant \varepsilon_j < \frac{q_{j+1}}{q_j}$ для любой базы, но если q_j определяются при помощи рекурсии, и длина соответствующего рекуррентного соотношения больше 1, то имеются некоторые дополнительные ограничения на последовательность цифр (см., напр., [1]). Скажем, если $\mathcal{Q}$ есть последовательность чисел Фибоначчи, то $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$, и $\varepsilon_j \varepsilon_{j+1} = 0$ для любого j.

Пусть натуральное n представлено в виде (1). Положим

$$s(n) = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j,$$

и

$$S(N) = \sum_{n<N} s(n)$$

При частичной поддержке французского Фонда "Pro Mathematica".

для любого натурального N. Назовем $S(N)$ *функцией "сумма цифр"* для базы $\mathcal{Q}$.

Проблема, поставленная в начале сороковых годов для $q_n = p^{n-1}$, $p \in \mathbb{N}$, состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для $S(N)$. Для указанного случая Мирски [3] (1949) доказал, что

$$S(N) = \frac{p-1}{2\log p} N \log N + O(N), \qquad N \to \infty$$

и показал также, что член $O(N)$ не может быть заменен на $o(N)$. Тем не менее, в 1975 году Деланж [2] смог получить точное выражение для $O(N)$ в этом случае. А именно,

$$S(N) = \frac{p-1}{2\log p} N \log N + NF\left(\frac{\log N}{\log p}\right),$$

где F — некоторая непрерывная, нигде не дифференцируемая функция периода 1, коэффициенты Фурье которой были также вычислены в [2].

Впоследствии подобные результаты были получены для "фибоначчиевой" системы счисления (Коке и Ван Ден Бош, 1986) и для более общих баз $\mathcal{Q}$. Однако, большинство авторов рассматривали последовательности q_k, удовлетворяющие одному и тому же рекуррентному соотношению для различных k. Грабнер и Тиши (см. [5, 6]) трактуют стационарность последовательности q_n очень широко (так, в работе [6] они связали свою систему счисления с произвольным $\beta > 1$ и его β-разложением). Для баз подобного вида их результаты, по-видимому, являются наилучшими. Киршенхофер и Тиши [4] рассматривали случай системы счисления Кантора (также называемой *mixed radix*), для которой $q_n = a_1 \dots a_{n-1}$, где $a_k \geqslant 2$ для любого k. Они вывели асимптотические формулы для $S(N)$ в некоторых специальных случаях, а именно для ограниченной или монотонной последовательности a_n.

В настоящей работе мы представляем возможный способ получения асимптотических формул для главного члена асимптотики $S(N)$ для широкого класса целочисленных баз. Поскольку изначальная цель данной работы заключалась в том, чтобы получить подобный результат для разложений Островского (см. ниже), мы ограничимся рассмотрением указанного случая, а также несложного случая канторовской базы в качестве модельного.

§2. Общий подход

Пусть $N = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k q_k$ с $\varepsilon_n > 0$. В работе [5] было показано, что для произвольной базы $\mathcal{Q}$

$$S(N) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(S(q_k) + \frac{\varepsilon_k - 1}{2} q_k \right) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{k+1}^{n} \varepsilon_j \right) \varepsilon_k q_k.$$

Лемма 2.1. *Имеет место следующая оценка:*

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{k+1}^{n} \varepsilon_j \right) \varepsilon_k q_k < N.$$

Доказательство. Используя преобразование Абеля, мы получаем для $n \geqslant 3$ (для $n = 2$ утверждение очевидно):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{k+1}^{n} \varepsilon_j \right) \varepsilon_k q_k = \varepsilon_n (N - \varepsilon_n q_n) + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\sum_{1}^{k} \varepsilon_j q_j \right) \varepsilon_{k+1} <$$
$$< \varepsilon_n q_n + \sum_{1}^{n-2} \varepsilon_{k+1} q_{k+1} = \varepsilon_n q_n + N - \varepsilon_n q_n - \varepsilon_1 < N.$$

Следствие 2.2. *Имеем:*

$$S(N) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k S(q_k) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 q_k + O(N). \tag{2}$$

Здесь и далее мы предполагаем, что существует последовательность конечных рекуррентных соотношений между q_n вида

$$q_{n+1} = a_n^{(1)} q_n + a_n^{(2)} q_{n-1} + \dots + a_n^{(k)} q_{n-k+1}, \quad n \geqslant k,$$

где k может зависеть n, и $a_n^{(1)} \geqslant \ldots \geqslant a_n^{(k)} \geqslant 1$. Положим $S_k := S(q_k)$.

Лемма 2.3. *Последовательность S_n удовлетворяет следующим рекуррентным соотношениям:*

$$S_{n+1} = a_n^{(1)} S_n + a_n^{(2)} S_{n-1} + \dots + a_n^{(k)} S_{n-k+1} + R_n, \tag{3}$$

где

$$R_n = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} a_n^{(j)}(a_n^{(j)}-1)\, q_{n-j+1} + \sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_n^{(i)}\right) a_n^{(j)} q_{n-j+1}. \qquad (4)$$

Доказательство. По определению и нашему предположению,

$$S_{n+1} = \sum_{m<q_{n+1}} s(m) = \sum_{0}^{a_n^{(1)}q_n-1} s(m) + \sum_{a_n^{(1)}q_n}^{a_n^{(1)}q_n+a_n^{(2)}q_{n-1}-1} s(m) + \cdots$$

$$+ \sum_{q_{n+1}-a_n^{(k)}q_{n-k+1}}^{q_{n+1}-1} s(m) = \sum_{j=1}^{k} S(a_n^{(j)}q_{n-j+1}) + a_n^{(2)}a_n^{(1)}q_{n-1} +$$

$$+ a_n^{(3)}(a_n^{(1)}+a_n^{(2)})q_{n-2} + \cdots + a_n^{(k)}\left(\sum_{j=1}^{k-1} a_n^{(j)}\right) q_{n-k+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_n^{(j)} S_{n-j+1} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} a_n^{(j)}(a_n^{(j)}-1) q_{n-j+1} +$$

$$+ \sum_{j=2}^{k}\left(\sum_{i=1}^{j-1} a_n^{(i)}\right) a_n^{(j)} q_{n-j+1}. \quad \bullet$$

Далее необходимо представить правую часть формулы (2) в таком виде, чтобы она явно зависела от N. Однако, мы не ставим перед собой задачу изучения проблемы в такой общей ситуации и ограничимся изучением несложных но, вместе с тем, содержательных примеров. Нашим главным инструментом будет опять-таки преобразование Абеля.

§3. Примеры.

Мы рассмотрим два основных примера, а именно системы счисления Кантора и Островского.

Разложение Кантора. Пусть $a_1, a_2, \ldots$ — последовательность натуральных чисел, больших 1. Пусть $q_1 = 1$, $q_n = a_1 \ldots a_{n-1}$ для $n \geqslant 2$. Тогда разложение (1) называется разложением Кантора. Здесь $q_{n+1} = a_n q_n$, $S_{n+1} = a_n S_n + \frac{a_n - 1}{2} q_{n+1}$. Поскольку $S_1 = 0$, легко показать, что

$$S_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k - 1}{2}\right) q_n$$

для $n \geqslant 2$. Тогда из (2) следует, что

$$S(N) = \sum_{1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_j - 1}{2}\right) \varepsilon_k q_k + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \varepsilon_k^2 q_k + O(N) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k - 1}{2}\right) N - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sum_{1}^{k} \varepsilon_j q_j\right) \frac{a_k - 1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} \varepsilon_k^2 q_k + O(N).$$

Вследствие того, что $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 q_k \leqslant \max(a_1, \ldots, a_n) \cdot N$, и неравенств

$$\sum_{k=1}^{n-1} a_k \sum_{1}^{k} \varepsilon_j q_j < \sum_{k=1}^{n-1} a_k q_{k+1} < \max(a_1, \ldots, a_{n-1}) \cdot N,$$

справедлива

Теорема 3.1. *Если выполнено условие*

$$\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) = o\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right), \qquad n \to \infty, \tag{$*$}$$

то

$$S(N) = \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - 1)\right) \cdot N + O(\max(a_1, \ldots, a_n) \cdot N).$$

Замечание. Данная теорема обобщает соответствующий результат из работы [4], полученный для ограниченных последовательностей $\{a_n\}$.

Разложение Островского. Пусть α — иррациональное число из интервала $(0, 1)$, а $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$ — его разложение в непрерывную дробь. Числитель и знаменатель n-ой подходящей дроби p_n/q_n удовлетворяют известным соотношениям:

$$q_1 = 1, \quad q_2 = a_1, \quad q_{n+1} = a_n q_n + q_{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$
$$p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_{n+1} = a_n p_n + p_{n-1}, \quad n \geqslant 2.$$

Положим $\mathcal{Q} = (q_n)_{n=1}^{\infty}$. Тогда в разложении (1) цифры удовлетворяют следующим марковским запретам (см., напр., [1]):

$$0 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant a_1 - 1, \quad 0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant a_n, \quad \varepsilon_n = a_n \Rightarrow \varepsilon_{n-1} = 0, \qquad n \geqslant 2.$$

Это представление натуральных чисел было предложено Островским [9] и с того времени разложения Островского использовались в различных целях. Их основное использование заключалось в изучении свойства *discrepancy* последовательности $(\{n\alpha\})_1^{\infty}$ (см., напр., [8] и ссылки там же). Недавно это разложение было использовано для арифметического представления адической реализации поворота окружности на иррациональный угол (см. [7]). Более точно, будучи пополненным в естественных топологиях, разложение Островского осуществляет метрический и топологический изоморфизм между поворотом на угол α и так называемым *адическим сдвигом* на марковском компакте допустимых последовательностей цифр $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, описанных выше. Более подробно — см. [7].

Итак, из уравнений (2)–(4) следует, что для базы Островского

$$S_{n+1} = a_n S_n + S_{n-1} + R_n, \qquad n \geqslant 2, \tag{5}$$
$$S_1 = 0, \quad S_2 = \frac{1}{2} a_1(a_1 - 1),$$

где

$$R_n = a_n \left(\frac{a_n - 1}{2} q_n + q_{n-1} \right). \tag{6}$$

Для того, чтобы решить систему (5), мы используем явную формулу для частного решения неоднородного разностного уравнения (см. [10], главу V, уравнение (30)). Следуя указанной работе, для исследуемого случая мы возьмем p_n и q_n в качестве базиса двумерного пространства решений соответсвующего однородного уравнения. Частное решение $\widetilde{S}_n$ системы (5) может быть выбрано следующим образом:

$$\widetilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\begin{vmatrix} p_k & q_k \\ p_n & q_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p_k & q_k \\ p_{k+1} & q_{k+1} \end{vmatrix}} R_k = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (p_k q_n - p_n q_k) R_k.$$

Положим $\alpha_m := |q_m \alpha - p_m| = (-1)^{m+1}(q_m \alpha - p_m)$ для любого натурального m и представим p_n в последней формуле в виде

$q_n\alpha + (-1)^n\alpha_n$. Таким образом, мы имеем:

$$\widetilde{S}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k(p_k - q_k\alpha)R_k\right) q_n + O(q_n),$$

так как

$$\alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} q_k R_k < \frac{1}{2}\alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} a_k q_k q_{k+1} < \frac{1}{2}\alpha_n \sum_{k=1}^{n-1} q_{k+1}^2 <$$
$$< \alpha_n(q_n^2 + q_{n-1}^2) < 2\alpha_n q_n^2 < 2q_n.$$

Наконец, $S_n = \widetilde{S}_n + b_1 q_n + b_2 p_n$ для некоторых подходящих констант b_1, b_2. Наша цель заключается в том, чтобы, как и в случае разложений Кантора,

$$C_n \asymp \sum_{1}^{n-1} a_k,$$

где $C_n := \sum_{k=1}^{n-1} R_k\alpha_k$, откуда будет следовать, что

$$S_n = C_n q_n + O(q_n), \quad n \to \infty.$$

Лемма 3.2. *Имеет место следующая оценка:*

$$\frac{1}{16}\sum_{k=1}^{n-1} a_k < C_n < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} a_k.$$

Доказательство. 1. По формуле (6), $R_k = \frac{1}{2}a_k(q_{k+1} - q_k + q_{k-1})$. Тогда $R_k\alpha_k < \frac{1}{2}a_k q_{k+1}\alpha_k < \frac{1}{2}a_k$, поскольку известно, что

$$q_{k+1}\alpha_k + q_k\alpha_{k+1} = 1. \tag{7}$$

2. Для доказательства нижней оценки достаточно показать, что

$$R_j\alpha_j + R_{j-1}\alpha_{j-1} > \frac{1}{16}(a_j + a_{j-1})$$

для любого $j \geqslant 2$. Имеем:

$$R_j\alpha_j = \frac{a_j\alpha_j}{2}(q_{j+1} - q_j + q_{j-1}) > \frac{a_j\alpha_j}{2}(q_{j+1} - q_j).$$

Рассмотрим следующие случаи:

(i) $a_j \geqslant 2, a_{j-1} \geqslant 2$. Здесь $q_{j+1} - q_j = (a_j - 1)q_j + q_{j-1} \geqslant \frac{1}{2}q_{j+1}$, откуда $R_j\alpha_j > \frac{a_j\alpha_j}{4}q_{j+1} > \frac{1}{8}a_j$, ибо $q_{j+1}\alpha_j > \frac{1}{2}$ по формуле (7). Аналогично, $R_{j-1}\alpha_{j-1} > \frac{1}{8}a_{j-1}$.

(ii) $a_j \geqslant 2, a_{j-1} = 1$. Для этого случая $R_j\alpha_j + R_{j-1}\alpha_{j-1} > R_j\alpha_j > \frac{1}{8}a_j \geqslant \frac{a_j + a_{j-1}}{16}$.

(iii) $a_j = 1, a_{j-1} \geqslant 2$. Данный случай аналогичен предыдущему.

(iv) $a_j = a_{j-1} = 1$. Здесь $q_{j+1} = q_j + q_{j-1} = 2q_{j-1} + q_{j-2} < 3q_{j-1}$, и $R_j\alpha_j = q_{j-1}\alpha_j > \frac{1}{3}q_{j+1}\alpha_j > \frac{1}{6} = \frac{1}{6}a_j$, откуда, наконец, $R_j\alpha_j + R_{j-1}\alpha_{j-1} > R_j\alpha_j > \frac{1}{6}a_j = \frac{1}{12}(a_j + a_{j-1})$.

Доказательство завершено.

Итак, мы получили требуемое асимптотическое равенство $C_n \asymp \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, и, вследствие этого,

$$S_n = C_n q_n + O(q_n), \quad n \to \infty.$$

Вернемся к оценке собственно $S(N)$. Итак, из (2) следует, что

$$S(N) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varepsilon_k q_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k^2 q_k + O(N).$$

Предположим, что условие $(*)$ из теоремы 3.1 выполнено для исследуемого случая. Тогда, используя преобразование Абеля, мы получаем:

$$S(N) = C_n \cdot N + \sum_{k=1}^{n-1}(C_k - C_{k+1})\sum_{1}^{k}\varepsilon_j q_j + O(\max(a_1, \dots, a_n)\cdot N) = \\ = C_n \cdot N + O(\max(a_1, \dots, a_n)\cdot N)$$

по лемме 3.2. Таким образом, мы доказали основной результат данной работы.

Теорема 3.3.

(1) *Если иррациональное* $\alpha = [a_1, a_2, \dots]$ *удовлетворяет условию* $(*)$, *то имеет место следующая асимптотическая формула для* $S(N)$:

$$S(N) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} R_k\alpha_k\right)\cdot N + O(\max_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \cdot N), \tag{8}$$

где

$$R_k = \frac{a_k}{2}(q_{k+1} - q_k + q_{k-1}), \quad \alpha_k = |q_k\alpha - p_k|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

(2) *Главный член асимптотической формулы* (8) *растет как* $\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) \cdot N$.

Следующие утверждения являются ответами на вопрос о поведениии $S(N)$ в случае, если условие $(*)$, возможно, не выполняется.

Утверждение 3.4. *И для разложения Кантора, и для разложения Островского*

$$\left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N = O(S(N))$$

для любого $N \in \mathbb{N}$ *любых параметров* $(a_1, a_2, \ldots)$.

Доказательство. Из уравнения (2) следует, что достаточно показать, что

$$\left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N = O\left(\sum_1^{n} C_k \varepsilon_k q_k\right),$$

что, в свою очередь, следует из неравенств

$$\sum_1^{n} C_k \varepsilon_k q_k \geqslant C_n \cdot N > \frac{1}{16}\left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N,$$

справедливых для обоих разложений.

Утверждение 3.5.

(1) *Если последовательность* $(a_1, a_2, \ldots)$ *такова, что* $a_n = O(\sum_1^{n-1} a_k)$, *то для обоих разложений*

$$S(N) \asymp \left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N.$$

(2) *Если, напротив, последовательность* $(a_1, \ldots)$ *удовлетворяет условию* $\alpha_n \gg \sum_1^{n-1} a_k$, *то для любого из двух рассматриваемых разложений существует такое* N, *что*

$$S(N) \gg \left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N.$$

Доказательство. (1) Как было показано выше, для обоих разложений

$$\sum_1^n C_k \varepsilon_k q_k < C_n \cdot N < \frac{1}{2}\left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N,$$

и по нашему предположению,

$$\sum_1^n \varepsilon_k^2 q_k \leqslant \max(a_1, \ldots, a_n) = O\left(\left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N\right).$$

(2) Пусть N таково, что $\varepsilon_1 = a_1 - 1, \varepsilon_2 = a_2 - 1, \ldots, \varepsilon_n = a_n - 1$. Здесь

$$\sum_1^n \varepsilon_k^2 q_k > \varepsilon_n^2 q_n = (a_n - 1)^2 q_n > \frac{1}{4} a_n^2 q_n > \frac{1}{8} a_n q_{n+1} >$$

$$> \frac{1}{8} a_n \cdot N \gg \left(\sum_1^{n-1} a_k\right) \cdot N. \quad \bullet$$

Заключительные замечания. Автор надеется, что метод, описанный выше, может быть применен к классу баз $\mathcal{Q}$, рассмотренных в [1], то есть к базам с

$$q_{n+1} = a_n q_n + b_1 q_{n-1} + \cdots + b_{s-1} q_{n-s+1}, \quad n \geqslant s,$$

где $s, b_1, \ldots, b_{s-1}$ — константы, а a_n могут различаться (и, как обычно, $a_n \geqslant b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_{s-1}$ для каждого n). Основная техническая трудность здесь состоит в том, как представить решение соответствующего неоднородного дискретного уравнения для S_n в таком виде, чтобы стало возможным доказать результат, подобный лемме 3.2. Мы планируем вернуться к этому вопросу в последующих работах.

Благодарность. Автор выражает благодарность А. Вершику за постановку задачи, а также П. Лиарде и П. Грабнеру за детальные объяснения. Автор признателен Ж. М. Дюмону, с которым содержание настоящей статьи обсуждалось во время его пребывания в Санкт-Петербурге.

Список литературы:

1. A. Fraenkel, *Systems of numeration.* — Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105–114.

2. H. Delange, *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme de chiffres"*. — Enseign. Math. **21** (1975), 31–47.
3. L. Mirsky, *A theorem on representaions of integer in the scale of r*. — Scripta Math. **15** (1949), 11–12.
4. P. Kirschenhofer and R. Tichy, *On the distribution of digits in Cantor representation of integers*. — J. Number Th. **18** (1984), 121–134.
5. P. Grabner and R. Tichy, *Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences*. — J. Number Theory **36** (1990), 160–169.
6. P. Grabner and R. Tichy, *α-expansions, linear recurrences, and the sum-of-digits function*. — Manuscr. Math. **70** (1991), 311–324.
7. А. Вершик, Н. Сидоров, *Арифметические разложения, ассоциированные с поворотом окружности и непрерывными дробями*. — Алгебра и анализ **5** (1993), 97–115.
8. J. Schoissengeier, *On the discrepancy of $n\alpha$*. — Acta Arithm. **44** (1984), 241–279.
9. A. Ostrowski, *Bemerkungen zur Theorie der Diophantischen Approximationen*. — Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. **1** (1922), 77–98.
10. А. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*. М., "Наука", 1967.

Sidorov N. A. Sum-of-digits function for certain non-stationary bases.

We introduce a new approach to the study of sum-of-digits functions for integral non-stationary bases and apply it to certain classical examples, namely to the Cantor and Ostrowski number systems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 3 июня 1996г.