Ф. В. Андреев

О СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

1. Формулировка результата

В настоящей работе описаны четыре типа решений следующей нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$t\frac{dy}{dt}=ty-2z(y-1)^2-(y-1)\Big(\frac{\Theta_0-\Theta_1+\Theta_\infty}{2}y-\frac{3\Theta_0+\Theta_1+\Theta_\infty}{2}\Big),$$
$$t\frac{dz}{dt}=yz\Big(z+\frac{\Theta_0-\Theta_1+\Theta_\infty}{2}\Big)-\frac{1}{y}(z+\Theta_0)\Big(z+\frac{\Theta_0+\Theta_1+\Theta_\infty}{2}\Big), \tag{1.1}$$

где параметры Θ_0, Θ_1, $\Theta_\infty \in \mathbb{C}$. Известно, что приведенная выше система эквивалентна пятому уравнению Пенлеве, при этом функция $y = y(t)$ оказывается пятым трансцендентом Пенлеве, см. [1, 2, 3]. Описание типов решений дается в терминах данных монодромии, см. [1, 2, 3, 4].

Доказан следующий результат.

Теорема 1.1. *Существуют решения системы* (1.1) *со следующей асимптотикой при* $t \to +\infty$*:*

$$y=\frac{\Theta_0-\Theta_1-\Theta_\infty}{2t}+O(t^{-2}),\ z=-\frac{\Theta_0+\Theta_1+\Theta_\infty}{2}+O(t^{-2}), \tag{1.2_{+1}}$$
$$y=\frac{\Theta_1-\Theta_0+\Theta_\infty}{2t}+O(t^{-2}),\ z=-\Theta_0+O(t^{-2}), \tag{1.2_{-0}}$$
$$y=\frac{2t}{\Theta_0-\Theta_1+\Theta_\infty}+O(1),\quad z=0+O(t^{-2}), \tag{1.2_{+0}}$$
$$y=\frac{2t}{\Theta_1-\Theta_0-\Theta_\infty}+O(1),\quad z=-\frac{\Theta_0-\Theta_1+\Theta_\infty}{2}+O(t^{-2}). \tag{1.2_{-1}}$$

Им соответствуют следующие данные монодромии:

$$m^1_{11} = e^{+\pi\imath\Theta_1}, m^1_{12} = 0, \tag{1.3_{+1}}$$

$$m^0_{11} = e^{-\pi\imath\Theta_0}, m^0_{21} = 0, \tag{1.3_{-0}}$$

$$m^0_{11} = e^{+\pi\imath\Theta_0}, m^0_{21} = 0, \tag{1.3_{+0}}$$

$$m^1_{11} = e^{-\pi\imath\Theta_1}, m^1_{12} = 0. \tag{1.3_{-1}}$$

Замечание 1.1. Каждой асимптотике (1.2_{qp}), $q = \pm$, $p = 0, 1$, отвечает однопараметрическое семейство решений системы (1.1), где параметром является коэффициент при экспоненциально малом члене.

Ниже описывается метод получения формул Теоремы 1.1. В части 2 представлен ВКБ-анализ ассоциированной с системой (1.1) линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В части 3 выписана асимптотика решений в окрестности особых точек. Часть 4 описывает способ вычисления двух матричных элементов m^1_{12} и m^0_{21}, без сшивки в точках поворота. В части 5 полученные решения сшиваются, что и дает искомые формулы (1.3).

Автор выражает благодарность учредителям гранта PRO-MATH за финансовую поддержку.

2. ВКБ-формула

Основным объектом исследования в методе изомонодромных деформаций применительно к пятому уравнению Пенлеве, или, эквивалентно, к системе (1.1), является следующее линейное матричное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda}Y = A(\lambda, t)Y = \left(\frac{t}{2}\sigma_3 + \frac{A_0}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda - 1}\right)Y, \tag{2.1}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} z + \frac{\Theta_0}{2} & -u(z+\Theta_0) \\ \frac{z}{u} & -z - \frac{\Theta_0}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -z - \frac{\Theta_0 + \Theta_\infty}{2} & uy\left(z + \frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\right) \\ -\frac{1}{uy}\left(z + \frac{\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\right) & z + \frac{\Theta_0 + \Theta_\infty}{2} \end{pmatrix}.$$

Наряду с (2.1) вводится следующее уравнение

$$\frac{d}{d\lambda}\tilde{Y} = \left(\frac{t}{2}\sigma_3 + \frac{\tilde{A}_0}{\lambda} + \frac{\tilde{A}_1}{\lambda - 1}\right)\tilde{Y}, \tag{2.2}$$

где $\tilde{Y} = y^{-\frac{1}{2}\sigma_3} Y y^{\frac{1}{2}\sigma_3}$ и

$$A_0 = \begin{pmatrix} z + \frac{\Theta_0}{2} & -\frac{u}{y}(z+\Theta_0) \\ \frac{z}{u}y & -z - \frac{\Theta_0}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -z - \frac{\Theta_0+\Theta_\infty}{2} & u\big(z + \frac{\Theta_0-\Theta_1+\Theta_\infty}{2}\big) \\ -\frac{1}{u}\big(z + \frac{\Theta_0+\Theta_1+\Theta_\infty}{2}\big) & z + \frac{\Theta_0+\Theta_\infty}{2} \end{pmatrix}.$$

Утверждение 2.1. *Для решений* (1.2_{q1}), $q = \pm$, $A_p = O(1)$, $A_1 = q\frac{\Theta_1}{2}\sigma_3 + O(\frac{1}{t})$ *при* $t \to +\infty$. *Для решений* (1.2_{q0}), $q = \pm$, $\tilde{A}_p = O(1)$, $\tilde{A}_0 = q\frac{\Theta_0}{2}\sigma_3 + O(\frac{1}{t})$ *при* $t \to +\infty$.

Далее мы будем рассматривать уравнение (2.1), при весьма общих предположениях, которые можно непосредственно перенести на уравнение (2.2). Поэтому будем говорить об уравнении типа (2.1).

Рассмотрим ВКБ-схему (см., например, [5]) для уравнения типа (2.1), при следующем предположении: обе $A_p \le O(1)$.

Легко проверить, что имеет место следующая точная формула для $l^2(\lambda) \equiv -\frac{1}{t^2}\det A(\lambda, t)$

$$l^2(\lambda) = \frac{1}{4t^2\lambda^2(\lambda-1)^2}\times$$
$$\times\big(t^2\lambda^2(\lambda-1)^2 + 4\lambda(\lambda-1)(-tz - t\frac{\Theta_0}{2} - v - t\lambda\frac{\Theta_\infty}{2}) + \sum_{p=0,1}\Theta_{1-p}^2(\lambda-p)^2\big).$$

Здесь $v = -\operatorname{tr}(A_1A_0)$. Для $l(\lambda)$ получаем

$$l(\lambda) = \frac{1}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2t(\lambda-1)} + \frac{\hat{\eta}}{t\lambda(\lambda-1)} + O(t^{-2}),$$
$$\hat{\eta} = -z - \frac{1}{2}\Theta_0 - \frac{v}{t} = -z - \frac{1}{2}\Theta_0 + O(t^{-2}).$$

Точки поворота, определяются как нули функции $l(\lambda)$.

Утверждение 2.2. *Четыре точки поворота уравнения* (2.1) *таковы*

$$\lambda_{mp} = p + O(\frac{1}{t^m}),\ p = 0, 1,\ m = 1, 2.$$

Из точек поворота выходят кривые Стокса, которые оканчиваются либо в особых точках $\lambda = p$, $p = 0, 1$, либо выходят на осциллирующие лучи, $\arg\lambda = \pm\frac{\pi}{2}$, $|\lambda| \to \infty$. Канонические области ограничены кривыми Стокса и содержат ровно одну из них. Нам понадобятся информация о следующих двух канонических областях (см. [1], где более детально дано определение канонических областей для уравнения типа (2.1)).

Утверждение 2.3. *Существуют такие две канонические области Γ_1 и Γ_0 для уравнения* (2.1), *что*

1) Γ_1 *есть область содержащая сектор* $-\frac{\pi}{2} < \arg\lambda < \frac{\pi}{2}$ *и подходящая к точке* $\lambda = 1$ *на расстояние* $O(\frac{1}{t})$;

2) Γ_0 *есть область содержащая сектор* $\frac{\pi}{2} < \arg\lambda < 3\frac{\pi}{2}$ *и подходящая к точке* $\lambda = 0$ *на расстояние* $O(\frac{1}{t})$.

Утверждение 2.4. *Существуют решения* $\Psi_p(\lambda)$ *уравнения* (2.1) *с асимптотикой*

$$\Psi_p(\lambda) = T\exp\{F(\lambda) - F(\lambda_p^*) - \int\limits_{\lambda_p^*}^{\lambda} \operatorname{diag} T^{-1}T_\lambda\, d\lambda\}, \lambda, \lambda_p^* \in \Gamma_p \qquad (2.3)$$

при $t \to +\infty$ *в секторах* Γ_p *(обозначения см. ниже).*

Для матрицы T мы используем следующее определение

$$T = \frac{\imath}{\sqrt{2l(l+\mathcal{A}_{11})}}(l\sigma_3 + \mathcal{A}), \mathcal{A} \equiv \frac{A(\lambda,t)}{t}.$$

Для $F \equiv t\int l(\lambda)\, d\lambda$ получаем

$$F(\lambda) = \frac{t\lambda}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln(\lambda-1) + \hat{\eta}\ln\frac{\lambda-1}{\lambda} + O(\frac{1}{t}).$$

Для последнего члена $-\operatorname{diag} T^{-1}T_\lambda\, d\lambda$ в ВКБ-формуле (2.3) получаем

$$F_1(\lambda)\sigma_3 \equiv -\int \operatorname{diag} T^{-1}T_\lambda\, d\lambda = -\frac{1}{t^2}\operatorname{diag}(A_1A_0)\int\frac{d\lambda}{2l(l+\mathcal{A}_{11})\lambda^2(\lambda-1)^2},$$

что в случае $A_p = O(1)$ дает $F_1(\lambda) = O(t^{-2})$. Следовательно, этим членом можно пренебречь.

Итак, мы можем записать нужные нам асимптотики

$$l(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} \frac{1}{2},$$

$$F(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} \frac{t\lambda}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln\lambda + O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{t}),$$

$$T(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} \imath\sigma_3 + O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{t}).$$

$$l(\lambda) \underset{\lambda\to 1}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{(\lambda-1)t}(\hat\eta - \frac{\Theta_\infty}{2}) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda-1),$$

$$F(\lambda) \underset{\lambda\to 1}{=} \frac{\lambda t}{2} + (\hat\eta - \frac{\Theta_\infty}{2})\ln(\lambda-1) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda-1),$$

$$T(\lambda) \underset{\lambda\to 1}{\sim} \sigma_3 + \frac{\hat\eta - \frac{\Theta_\infty}{2}}{t(\lambda-1)}\sigma_3 + \frac{A_1}{t(\lambda-1)} + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda-1).$$

$$l(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{\hat\eta}{t\lambda} + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda),$$

$$F(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{=} \frac{\lambda t}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln(-1) - \hat\eta\ln\lambda + \hat\eta\ln(-1) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda),$$

$$T(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{\sim} \sigma_3 - \frac{\hat\eta}{t\lambda}\sigma_3 + \frac{A_0}{t\lambda} + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda).$$

Точное положение двух нулей $l(\lambda)$ дается формулой

$$\lambda_{10} = -\frac{4z}{t} - \frac{2\Theta_0}{t} + O(t^{-2}), \lambda_{11} = 1 + 4\frac{z}{t} - 2\frac{\Theta_\infty}{t} + 2\frac{\Theta_0}{t} + O(t^{-2}).$$

Подчеркнем, что все вышеприведенные вычисления не предполагали ничего, кроме $A_p \le O(1)$ при $t \to +\infty$. Соберем все вместе и запишем асимптотики $\Psi(\lambda)$ в окрестностях особых точек:

$$\Psi(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} \big(\imath\sigma_3 + O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{t})\big)\times$$
$$\times \exp\{\frac{t\lambda}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln\lambda + O(\frac{1}{\lambda}) + O(\frac{1}{t})\}\sigma_3,$$

$$\Psi(\lambda) \underset{\lambda\to 1}{=} \big(\sigma_3 + \frac{\hat\eta - \frac{\Theta_\infty}{2}}{t(\lambda-1)}\sigma_3 + \frac{A_1}{t(\lambda-1)} + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda-1)\big)\times$$
$$\times \exp\{\frac{\lambda t}{2} + (\hat\eta - \frac{\Theta_\infty}{2})\ln(\lambda-1) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda-1)\}\sigma_3,$$

$$\Psi(\lambda) \underset{\lambda\to 0}{=} \big(\sigma_3 - \frac{\hat\eta}{t\lambda}\sigma_3 + \frac{A_0}{t\lambda} + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda)\big)\times$$
$$\times \exp\{\frac{\lambda t}{2} - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln(-1) - \hat\eta\ln\lambda + \hat\eta\ln(-1) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda)\}\sigma_3.$$

3. Решения в окрестностях особых точек

Рассмотрим уравнение типа (2.1) при следующих предположениях: обе $A_p \leq O(1)$ при $t \to +\infty$ и одна из A_p диагональна, см. Утверждение 2.1.

Можно явно выписать асимптотики решений в окрестностях особых точек, в которых A_p диагональна.

Утверждение 3.1. *Если $[A_p, \sigma_3] = O(\frac{1}{t})$, то существует решение $Y(p, \lambda)$ уравнения типа (2.1) со следующей асимптотикой в окрестности особой точки $\lambda = p$:*

$$Y(p, \lambda) \underset{\lambda \to p}{=} \exp\big(\frac{\lambda t}{2}\sigma_3 + A_p \ln(\lambda - p) + O(\frac{1}{t}) + O(\lambda - p)\big).$$

4. Метод вычисления элементов m_{12}^1 и m_{21}^0

Напомним (см. [1, 2, 3]), что данные монодромии для уравнения (2.1) определялись через каноническое решение — функцию $Y_2(\lambda)$, имеющую следующее асимптотическое разложение при $\arg\lambda = \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| \to \infty$

$$Y_2(\lambda) = \big(I + O(\lambda^{-1})\big)\exp\big(\frac{\lambda t}{2}\sigma_3 - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln\lambda\sigma_3\big). \tag{4.1}$$

Отметим, что луч $\arg\lambda = \frac{\pi}{2}$, $|\lambda| \to \infty$ не принадлежит ни одной из канонических областей Γ_p, $p = 0, 1$. Поэтому, мы не знаем асимптотику решений $\Psi_p(\lambda)$ на этом луче, и следовательно, не можем сосчитать матрицу связи $C_p \equiv \Psi_p^{-1}(\lambda)Y_2(\lambda)$. Для сшивки решений $\Psi_p(\lambda)$ и $Y_2(\lambda)$, в общем случае, необходимо проводить вычисление в окрестностях точек поворота, что и было сделано в [1, 2]. Однако, для определения элементов m_{12}^1 и m_{21}^0, вычисления в окрестности точки поворота можно избежать описанным ниже способом.

Определим классы $\mathcal{Y}_p$, $p = 0, 1$, решений уравнения (2.1) с элементами $Y_{(p)}(\lambda)$, их асимптотическим разложением

$$Y_{(p)}(\lambda) \underset{|\lambda| \to \infty}{=} (I + \hat{Y}_\infty^p \frac{1}{\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right))\exp\big(\frac{\lambda t}{2}\sigma_3 - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln\lambda\sigma_3\big), \tag{4.1}$$

при $\lambda \to \infty$ в секторе

$$-\frac{\pi}{2} + \pi p < \arg\lambda < \frac{\pi}{2} + \pi p. \tag{4.2}$$

Все таким образом, определенные функции отличаются правым матричным множителем

$$Y_{(p)}(\lambda) \to Y_{(p)}(\lambda) \begin{pmatrix} 1 & (1-p)s_{(0)} \\ ps_{(1)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Преобразование (4.3) не меняет правый вне-диагональный элемент матрицы монодромии для функции $Y_{(1)}(\lambda)$, $\{M^1(Y_{(1)})\}_{12}$ и левый вне-диагональный элемент матрицы монодромии для функции $Y_{(0)}(\lambda)$, $\{M^0(Y_{(0)})\}_{21}$. Таким образом, элемент $\{M^1(Y_{(1)})\}_{12}$ один и тот же для всех $Y_{(1)}(\lambda) \in \mathcal{Y}_1$. Причем,

$$\{M^1(Y_{(1)})\}_{12} = m^1_{12}, \tag{4.4$_1$}$$

поскольку каноническое решение принадлежит этому классу $Y_2 \in \mathcal{Y}_1$. Аналогично, получаем

$$\{M^0(Y_{(0)})\}_{21} = m^0_{21}. \tag{4.4$_0$}$$

Ввиду (4.4$_p$), если мы хотим вычислить m^1_{12} или m^0_{21}, нам не нужно точно определять каноническое решение $Y_2(\lambda)$ в классе $\mathcal{Y}_p$.

Теперь осталось представить необходимые рабочие формулы для вычислений $M^p(Y_{(p)})$, $p = 0, 1$.

Матрицу монодромии $M^p(Y_{(p)})$ для решений $Y_{(p)}$ можно записать следующим образом, $p = 0, 1$,

$$M^p(Y_{(p)}) = E^{-1}_{(p)} e^{\pi\imath\Theta_p\sigma_3} E_{(p)}, \tag{4.5}$$

где матрица $E_{(p)}$ определена асимптотическим разложением

$$Y_{(p)} \underset{\lambda\to p}{=} G_p \lambda^{\frac{\Theta_p}{2}\sigma_3} E_{(p)}$$

аналитического продолжения $Y_{(p)}(\lambda)$ вдоль путей, лежащих в Γ_p. В области Γ_p мы можем факторизовать $E_{(p)}$ так:

$$E_{(p)} = K_p L_p C_p,\ L_p = Y^{-1}(p,\lambda)\Psi_p(\lambda),\ C_p = \Psi_p^{-1}(\lambda) Y_{(p)}(\lambda), \tag{4.6}$$

где решения $\Psi_p(\lambda)$ определены в части 2, а $Y(p,\lambda)$ определены в Утверждении 3.1 части 3. Матрицы K_p определяются разложением

$$Y(p,\lambda) \underset{\lambda\to p}{=} G_p \lambda^{\frac{\Theta_p}{2}\sigma_3} K_p.$$

Допуская небольшую неточность, я сохраняю за матрицей $\Psi_p^{-1}Y_{(1)}$ обозначение C_p, поскольку все такие матрицы отличаются только на соответствующее преобразование (4.3), что не затрагивает интересующий нас элемент m_{12}^1 или m_{21}^0.

5. Сшивка

Из определения матриц C_p и формул части 2 получаем

$$C_p = \lim_{\lambda\to\infty} \Psi_p^{-1}(\lambda)Y_{(p)}(\lambda) = -\imath\sigma_3(1+O(\frac{1}{t})).$$

Область сшивки решений $Y(p,\lambda)$ с ВКБ-решениями $\Psi_p(\lambda)$ такова: $(\lambda-p)t > t^{\varepsilon}$, $0<\varepsilon<\frac{1}{6}$. Если $[A_p,\sigma_3]=O(\frac{1}{t})$, то

$$L_p \sim \sigma_3 + O(\frac{1}{t}).$$

Здесь знак $\sim$ означает что правая часть равна левой с точностью до скалярного множителя. В случаях (1.2_{+p}) $K_p=1$, а в случаях (1.2_{-p}) $K_p=\sigma_1$. Итак, мы получаем следующий результат.

Утверждение 5.1. *Решениям системы* (1.1) *с асимптотиками* (1.2_{qp}) *при* $t\to+\infty$, $q=\pm$, $p=0,1$ *отвечает следующая матрица* E^p *с точностью до соответствующего преобразования* (4.3)

$$E^p \sim \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+q1 & 1-q1 \\ 1-q1 & 1+q1 \end{pmatrix}. \tag{5.1}$$

Отметим, что зная матрицу E^p с точностью до преобразования (4.3), мы ничего не можем сказать о матрице E^{1-p}. Используя соотношения, вытекающие из определения данных монодромии и циклического соотношения, см. [1, 2, 6]

$$\det M^p = 1,\ \mathrm{tr}\, M^p = 2\cos\pi\Theta_p,\ m_{11}^1 m_{11}^0 + m_{12}^1 m_{21}^0 = e^{-\pi\imath\Theta_\infty}$$

получаем формулы (1.3) Теоремы 1.1. Доказательство Теоремы 1.1 получается применением результатов работы [7] к изложенной выше схеме.

Литература

1. F. V. Andreev, A. V. Kitaev, *Connection Formulas for Asymptotics of the Fifth Painlevé Transcendent on the Real Axis. I.* Sfb 288 Preprint No. 160 (1995).

2. F. V. Andreev, A. V. Kitaev, *Connection Formulas for Asymptotics of the Fifth Painlevé Transcendent on the Real Axis. II.* in preparation.
3. Ф. В. Андреев, А. В. Китаев, *О формулах связи для асимптотик некоторых специальных решений пятого уравнения Пенлеве.* см. настоящий сборник, — Записки научных семинаров ПОМИ **243** (1996).
4. M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II.* — Physica **2D** (1981), 407–448.
5. М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва, Наука, 1983.
6. M. Jimbo, *Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations.* — Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18** (1982), 1137–1161.
7. А. В. Китаев, *Обоснование асимптотических формул, получаемых методом изомонодромных деформаций.* — Записки научных семинаров ЛОМИ **179** (1989).

Andreev F. V. On some special solutions of the fifth Painlevé equation.

Four kinds of special solutions of the fifth Painlevé equation are described. Their asymptotic expansions as $t \to +\infty$ are given. The corresponding monodromy data are calculated. This allows one immediately obtain the connection formulas.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 сентября 1996г.