Ф. В. Андреев, А. В. Китаев

О ФОРМУЛАХ СВЯЗИ ДЛЯ АСИМПТОТИК НЕКОТОРЫХ СПЕЦИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

1. Введение

Это третья из серии наших работ [1, 2], цель которых решить задачу о классификации решений пятого уравнения Пенлеве

$$\frac{d^2y}{d^2t}=\left(\frac{1}{2y}+\frac{1}{y-1}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-\frac{1}{t}\frac{dy}{dt}+\frac{(y-1)^2}{t^2}\left(\alpha y+\frac{\beta}{y}\right)+\frac{\gamma y}{t}+\frac{\delta y(y+1)}{y-1}. \tag{1.1}$$

где α, β, γ, $\delta \in \mathbb{C}$, посредством описания их асимптотик на вещественной оси. Уравнение (1.1) имеет две особые точки: регулярную при $t=0$ и иррегулярную при $t=\infty$. Поэтому задача асимптотического описания решений уравнения (1.1) состоит в построении асимптотик в окрестностях особых точек $t=0$ и $t=\infty$, и нахождении явных формул связи соответствующих асимптотических параметров.

В двух наших предыдущих работах мы охарактеризовали общие решения уравнения (1.1). Однако, целый ряд специальных однопараметрических решений остался неизученным. Уравнение (1.1) имеет достаточно богатый запас таких решений. В этой работе мы начинаем их исследование.

Конкретным стимулом этой работы послужила задача о классификации поверхностей вращения гармонической обратной средней кривизны, рассмотренная в [3]. Оказывается, что эта задача связана с классификацией вещественных решений уравнения

$$x\phi''-2x\sin 2\phi+\phi'+2\sin\phi=0, \tag{1.2}$$

которое эквивалентно третьему уравнению Пенлеве при специальном выборе параметров. А именно, если положить

$$p(x)=e^{\imath\phi(x)}, \tag{1.3}$$

то функция $p(x)$ удовлетворяет третьему уравнению Пенлеве

$$p'' = \frac{p'^2}{p} - \frac{p'}{x} - \frac{p^2}{x} + \frac{1}{x} + p^3 - \frac{1}{p}. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4), в свою очередь, связано с пятым уравнением Пенлеве (1.1) при помощи подстановки

$$y(t) = \left(\frac{p(x)+1}{p(x)-1}\right)^2, \quad t = 4x. \tag{1.5}$$

Как утверждалось в работе [3], существует вещественное решение уравнения (1.2), имеющее такую асимптотику

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{5}{6(2x)^3} + O(\frac{1}{x^5}) \tag{1.6}$$

при $x \to +\infty$. Однако вопрос о числе таких решений остался невыясненным. Все вещественные решения уравнения (1.2) такие, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \phi(x) = \frac{\pi}{2}$, имеют при $x \to 0$ следующее асимптотическое разложение

$$\phi \underset{x\to 0}{=} \sigma_0 \ln x + \beta_0 + o(1), \quad |\beta_0| < \pi. \tag{1.7}$$

Численное решение (1.2) на компьютере при помощи программы Mathematica (см. [3]) дало следующие значения для параметров σ_0 и β_0

$$\sigma_0 = 0.56108 \pm 0.00005, \quad \beta_0 = 0.908 \pm 0.005.$$

Основные результаты нашей работы, относящиеся к уравнению (1.1), сформулированы в части 3. Из Следствия 3.2 и формул (1.3)-(1.5) следует

Теорема 1.1. *Существует одно и только одно решение уравнения (1.2), имеющее асимптотику (1.6) при $x \to +\infty$ и асимптотику (1.7) при $x \to +0$. Точные значения соответствующих параметров σ_0 и β_0 таковы:*

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{\pi}\ln(3+\sqrt{8}) = \frac{2}{\pi}\ln(1+\sqrt{2}) = 0.5610998522\ldots, \\ \beta_0 &= \pi - 2\sigma_0 \ln 2 + 2\arg\Gamma(\frac{\imath\sigma_0}{2})\Gamma^2(\frac{1}{2} - \frac{\imath\sigma_0}{2}) = 0.907634370\ldots. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Функция arg *дается здесь своим главным значением:* $-\pi < \arg \leq \pi$.

Статья организована следующим образом. В части 2 дано определение данных монодромии матричного линейного обыкновенного дифференциального уравнения, ассоциированного с пятым уравнением Пенлеве (1.1). В части 3 представлены результаты об асимптотиках решений уравнения пятого уравнения Пенлеве при $t \to +0$ и $t \to +\infty$. Часть 4 содержит наброски доказательств теорем части 3.

Один из авторов (Ф. В. Андреев) благодарит учредителей гранта PRO-MATH за финансовую поддержку.

2. Определение данных монодромии

С пятым уравнением Пенлеве тесно связано следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\lambda}Y = \left(\frac{t}{2}\sigma_3 + \frac{A_0}{\lambda} + \frac{A_1}{\lambda - 1}\right)Y, \tag{2.1}$$

где матрицы $A_p \in sl(2, \mathbb{C})$, $p = 0, 1$ не зависят от $\lambda \in \mathbb{C}$. Следуя работе [4] параметризуем матрицы A_p следующим образом:

$$A_0 = \begin{pmatrix} z + \frac{\Theta_0}{2} & -u(z + \Theta_0) \\ \frac{z}{u} & -z - \frac{\Theta_0}{2} \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} -z - \frac{\Theta_0 + \Theta_\infty}{2} & uy\left(z + \frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\right) \\ -\frac{1}{uy}\left(z + \frac{\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\right) & z + \frac{\Theta_0 + \Theta_\infty}{2} \end{pmatrix}.$$

Напомним определение данных монодромии для уравнения (2.1). Более подробное изложение см. в работе [1].

Всюду в нашей работе мы считаем $t \in \mathbb{R}_+$. Тогда канонические решения $Y_k = Y_k(\lambda)$ уравнения (2.1) определяются в окрестности особой точки $\lambda = \infty$ с помощью их асимптотики при больших $|\lambda|$

$$Y_k(\lambda) \underset{|\lambda| \to \infty}{=} \left(I + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) \exp\left(\frac{\lambda t}{2}\sigma_3 - \frac{\Theta_\infty}{2}\ln \lambda \sigma_3\right), \tag{2.2}$$

в секторах

$$-\frac{\pi}{2} + \pi(k-2) < \arg \lambda < \frac{3\pi}{2} + \pi(k-2), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Канонические решения связаны матрицами Стокса S_k:

$$Y_{k+1}(\lambda) = Y_k(\lambda) S_k. \tag{2.3}$$

Используя (2.2), можно доказать, что

$$Y_{k+2}(\lambda e^{2\pi\imath}) = Y_k(\lambda) e^{-\pi\imath\Theta_\infty\sigma_3}. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$S_{k+2} = e^{\pi\imath\Theta_\infty\sigma_3} S_k e^{-\pi\imath\Theta_\infty\sigma_3}.$$

Таким образом, можно найти все матрицы Стокса, если известны две из них S_1 и S_2. Используя определение матриц Стокса, можно установить, что они имеют следующую структуру:

$$S_{2k} = \begin{pmatrix} 1 & s_{2k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{2k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s_{2k+1} & 1 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где параметры s_{2k}, s_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}$ называются *множителями Стокса*. Матрица монодромии на бесконечности, M^∞, для функции Y_2 определяется следующим уравнением

$$Y_2(\lambda e^{-2\pi\imath}) = Y_2(\lambda) M^\infty.$$

Можно выразить M^∞ через матрицы Стокса

$$M^\infty = S_2 e^{\pi\imath\Theta_\infty\sigma_3} S_1.$$

Далее, мы определим матрицы монодромии в регулярных особых точках уравнения (2.1). Для этого мы аналитически продолжим каноническое решение $Y_2(\lambda)$, определенное при $\lambda \to +\imath\infty$, в конечную часть верхней полуплоскости и на вещественную ось по путям, лежащим в верхней полуплоскости. Тогда, функция Y_2 имеет следующее разложение

$$Y_2(\lambda) \underset{\lambda\to p}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{Y}_n^p (\lambda - p)^{n+\Theta_p\sigma_3/2} E_p, \; p = 0, 1$$

в окрестности особой точки $\lambda = p$. Предполагается, что $\Theta_p \notin \mathbb{Z}$. Матрицы монодромии M^p в конечных особых точках определяются следующим образом

$$M^p = E_p^{-1} e^{\pi\imath\Theta_p\sigma_3} E_p.$$

Матричные элементы m_{ij}^p, $(i, j = 1, 2)$, $p = 0, 1$, множители Стокса s_k, $k = 1, 2$ называются *данными монодромии* для уравнения (2.1).

Матрицы монодромии связаны следующим циклическим соотношением [1, 5]

$$M^{\infty} M^{1} M^{0} = I,$$

из которого следует, что

$$\det M_p = 1, \operatorname{tr} M_p = 2\cos \pi\Theta_p, m^1_{11} m^0_{11} + m^1_{12} m^0_{21} = e^{-\pi\imath\Theta_\infty}.$$

По определению данные монодромии уравнения (1.1) являются функциями от параметров y, z, u и t. Пусть теперь y, z и u суть дифференцируемые функции параметра t.

Утверждение 2.1 [4]. *Данные монодромии уравнения* (2.1) *не зависят от t тогда и только тогда, когда функции $y(t)$, $z(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений,* системе изомонодромных деформаций,

$$\begin{aligned}
t\frac{dy}{dt} &= ty - 2z(y-1)^2 - (y-1)\Big(\frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2} y - \frac{3\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big),\\
t\frac{dz}{dt} &= yz\Big(z + \frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big) - \frac{1}{y}(z + \Theta_0)\Big(z + \frac{\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big),\\
t\frac{d}{dt}\ln u &= -2z - \Theta_0 + y\Big(z + \frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big) + \frac{1}{y}\Big(z + \frac{\Theta_0 + \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Если система (2.5) выполнена, то, исключая $z(t)$ из ее первых двух уравнений, нетрудно доказать, что функция $y(t)$ является решением пятого уравнения Пенлеве (1.1), где

$$\alpha = \frac{1}{2}\Big(\frac{\Theta_0 - \Theta_1 + \Theta_\infty}{2}\Big)^2, \beta = -\frac{1}{2}\Big(\frac{\Theta_0 - \Theta_1 - \Theta_\infty}{2}\Big)^2,$$
$$\gamma = 1 - \Theta_0 - \Theta_1, \delta = -\frac{1}{2}.$$

Говорят, что решение системы (2.5) порождает *изомонодромную деформацию* уравнения (2.1), поскольку данные монодромии уравнения (2.1) не зависят в этом случае от t.

Утверждение 2.1 является основой метода построения так называемых формул связи асимптотик для решений системы (2.5) и, сответственно, для пятого уравнения Пенлеве. Метод этот состоит в следующем: находятся асимптотики функции $y(t)$ в окрестности существенно особых точек $t=\infty$ и $t=0$. Эти асимптотики, вообще говоря, содержит некоторые комплексные параметры (асимптотические параметры). Далее, используя различные асимптотические методы, удается получить точные формулы, связывающие асимптотические параметры с данными монодромии. Такая процедура проводится для каждой особой точки системы (2.5). Затем, приравнивая полученные выражения для данных монодромии, получаем равенства, связывающие асимптотические параметры разложений в разных особых точках, которые и представляют собой формулы связи. Этим методом, в частности, получена формула связи, анонсированная в Теореме 1.1. Отметим, что метод этот часто называют методом изомонодроных деформаций [6].

3. Формулы связи

Пусть $\sigma \in \mathbb{C}$. Введем следующие обозначения:

$$b(\sigma)=\frac{\Theta_1+\Theta_0+\sigma}{2},\ c(\sigma)=\frac{\Theta_1-\Theta_0+\sigma}{2},\ d(\sigma)=\frac{\Theta_\infty+\sigma}{2},\ a(\sigma)=b(\sigma)c(\sigma).$$

Теорема 3.1. *Пусть $\sigma, s^2, r \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ и $\Re\sigma \in [0,1)$, Пусть также $\Theta_0, \Theta_1 \notin \mathbb{Z}$. Существует единственное решение системы (2.5) со следующим асимптотическим разложением при $t \to 0$:*

$$\begin{gathered}
y=\frac{(a(\sigma)+s^2d(-\sigma)a(-\sigma)t^\sigma)(b(\sigma)+s^2d(\sigma)b(-\sigma)t^\sigma)}{(a(\sigma)+s^2d(\sigma)a(-\sigma)t^\sigma)(b(\sigma)+s^2d(-\sigma)b(-\sigma)t^\sigma)}+\\
+\frac{1-\Theta_1-\Theta_0}{(1-\sigma)^2}t+O(t^{1+\Re\sigma}), \qquad (3.1)\\
z=\frac{(c(\sigma)+s^2d(\sigma)c(-\sigma)t^\sigma)(b(\sigma)+s^2d(-\sigma)b(-\sigma)t^\sigma)}{\sigma^2s^2t^\sigma}+\\
+2\left(\frac{b(\sigma)c(\sigma)}{\sigma^2(1-\sigma)s^2t^\sigma}\right)^2t+O(t^{1-\Re\sigma}),\\
u=-rt^{\Theta_\infty}\left(\frac{b(\sigma)+s^2d(-\sigma)b(-\sigma)t^\sigma}{b(\sigma)+s^2d(\sigma)b(-\sigma)t^\sigma}\right)(1+o(1)).
\end{gathered}$$

Теорема 3.2. *Решение системы (2.5), определенное в Теореме 3.1, порождает изомонодромную деформацию системы (2.1) со следу-*

ющими данными монодромии

$$m_{11}^p = \frac{1}{\hat d}\Big(-\frac{e^{-\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{11}^p}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\sigma-\Theta_\infty) - \frac{e^{\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{22}^p}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\sigma+\Theta_\infty) -$$
$$- \frac{e^{-\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{21}^p}{\hat s_2\Gamma(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\Gamma(1-\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})} - \frac{\hat s_2 e^{\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{12}^p}{\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})}\Big),$$
$$m_{22}^p = \frac{1}{\hat d}\Big(-\frac{e^{\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{11}^p}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\sigma+\Theta_\infty) - \frac{e^{-\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{22}^p}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}(\sigma-\Theta_\infty) +$$
$$+ \frac{e^{-\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{21}^p}{\hat s_2\Gamma(1-\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})\Gamma(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})} + \frac{\hat s_2 e^{\frac{\pi\imath}{2}\sigma}\hat m_{12}^p}{\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})}\Big), \qquad (3.2)$$

$$m_{12}^p = \frac{re^{\frac{\pi\imath}{2}\Theta_\infty}}{\hat d}\Big(\frac{\hat m_{22}^p-\hat m_{11}^p}{\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\Gamma(1-\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})} - \frac{\hat m_{21}^p}{\hat s_2\Gamma^2(1-\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})} + \frac{\hat s_2\hat m_{12}^p}{\Gamma^2(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})}\Big),$$

$$m_{21}^p = \frac{e^{-\frac{\pi\imath}{2}\Theta_\infty}}{r\hat d}\Big(\frac{\hat m_{22}^p-\hat m_{11}^p}{\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})\Gamma(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})} + \frac{\hat m_{21}^p e^{-\pi\imath\sigma}}{\hat s_2\Gamma^2(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})} - \frac{\hat s_2\hat m_{12}^p e^{\pi\imath\sigma}}{\Gamma^2(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})}\Big),$$

$$s_2 = -\frac{2\pi\imath r e^{\Theta_\infty\pi\imath}}{\Gamma(1-\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})},\ s_1 = -\frac{2\pi\imath r^{-1}}{\Gamma(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})}.$$

В предыдущих формулах

$$\hat d = -\frac{e^{\frac{\pi\imath}{2}\Theta_\infty}}{\pi}\sin\pi\sigma,\ \hat m_{ij}^p = \{\hat M^p\}_{ij},\ p=0,1,\ \hat s_2 = s^2\frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(-\sigma)}, \qquad (3.3)$$
$$\hat M^0 = -\frac{\imath}{\sin\pi\sigma}\begin{pmatrix} -\cos\pi\Theta_1 + e^{\pi\imath\sigma}\cos\pi\Theta_0 & -e^{-\pi\imath\sigma}\hat p \\ -e^{\pi\imath\sigma}\hat q & \cos\pi\Theta_1 - e^{-\pi\imath\sigma}\cos\pi\Theta_0\end{pmatrix},$$
$$\hat M^1 = -\frac{\imath}{\sin\pi\sigma}\begin{pmatrix} -\cos\pi\Theta_0 + e^{\pi\imath\sigma}\cos\pi\Theta_1 & \hat p \\ \hat q & \cos\pi\Theta_0 - e^{-\pi\imath\sigma}\cos\pi\Theta_1\end{pmatrix},$$
$$\hat p = \frac{\Gamma(1+\sigma)}{\Gamma(1-\sigma)}\frac{2\pi^2}{\Gamma(1+b(\sigma))\Gamma(-b(-\sigma))\Gamma(1+c(\sigma))\Gamma(-c(-\sigma))},$$
$$\hat q = -\frac{\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(1+\sigma)}\frac{2\pi^2}{\Gamma(1+b(-\sigma))\Gamma(-b(\sigma))\Gamma(1+c(-\sigma))\Gamma(-c(\sigma))}.$$

Замечание 3.1. В препринте [1] допущены опечатки в знаках матриц $\hat M^0$, $\hat M^1$ и переменных $\hat p$ и $\hat q$, а также, в формуле для $z(t)$ (см. (4.1) [1]), в которой правильная оценка погрешности $O(t^{1-2\Re\sigma})$.

Теорема 3.3. *Пусть $\hat{u} \in \mathbb{C}\backslash 0$. Существует единственное решение системы (2.5) со следующей асимптотикой*

$$y = -1 + \frac{4(\Theta_0 + \Theta_1 - 1)}{t} + O(t^{-2}),\ z = -\frac{t}{8} - \frac{1}{4}(2\Theta_0 + \Theta_\infty) + O(t^{-1}),$$
$$u = \hat{u}e^{\frac{t}{2}}(1 + o(1)) \tag{3.4}$$

при $t \to +\infty$.

Теорема 3.4. *Решение системы (2.5), определенное в Теореме 3.3, порождает изомонодромную деформацию уравнения (2.1) со следующими данными монодромии*

$$m^0_{11} = 0,\ m^0_{21} = -\frac{\imath}{\hat{u}}e^{-\pi\imath\Theta_\infty}e^{2\Theta_\infty \ln 2},\ m^1_{11} = 0,\ m^1_{12} = \imath\hat{u}e^{-2\Theta_\infty \ln 2},$$
$$s_2 = -2\imath\hat{u}e^{\pi\imath\Theta_\infty}e^{-2\Theta_\infty \ln 2}\cos\pi\Theta_0,\ s_1 = \frac{2\imath}{\hat{u}}e^{2\Theta_\infty \ln 2}\cos\pi\Theta_1. \tag{3.5}$$

Следствие 3.1. *Пусть $\Theta_\infty \in 2\mathbb{Z}$. Существует единственное решение системы (2.5) с асимптотикой (3.4) при $t \to +\infty$ и с асимптотикой (3.1) при $t \to +0$. Параметры асимптотических разложений связаны следующим образом*

$$\sigma = \frac{1}{\pi}\arccos(1 + \frac{1}{2}\cos\pi\Theta_1\cos\pi\Theta_0), \tag{3.6}$$

$$s^2 = (-1)^{\frac{\Theta_\infty}{2}}\frac{\cos\pi\Theta_1 + \cos\pi\Theta_0}{2\pi^3}\sin\frac{\pi\sigma}{2}\frac{\Gamma^2(-\sigma)}{\Gamma^2(\sigma)}\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\times$$
$$\times\Gamma(1+\frac{\Theta_0+\Theta_1+\sigma}{2})\Gamma(\frac{\sigma-\Theta_0-\Theta_1}{2})\Gamma(1+\frac{\Theta_1-\Theta_0+\sigma}{2})\Gamma(\frac{\Theta_0-\Theta_1+\sigma}{2}),$$
$$r = -\frac{\pi\hat{u}2^{-2\Theta_\infty}}{\cos\pi\Theta_1\Gamma(1-\frac{\sigma-\Theta_\infty}{2})\Gamma(\frac{\sigma+\Theta_\infty}{2})}.$$

Замечание 3.2. Функция arccos в (3.6) определена так, чтобы $0 \le \Re\sigma < 1$.

Следствие 3.2. *Пусть $\Theta_\infty = \Theta_0 = \Theta_1 = 0$. Существует единственное решение системы (2.5) с асимптотикой*

$$y = -1 - \frac{4}{t} + O(t^{-2}),\ z = -\frac{t}{8} + O(t^{-1}),\ u = \hat{u}e^{\frac{t}{2}}(1 + o(1)) \tag{3.7}$$

при $t \to +\infty$ *и асимптотикой*

$$
\begin{gathered}
y = \frac{(\sigma s^2 t^\sigma - 2)^2}{(\sigma s^2 t^\sigma + 2)^2} + O(t), z = \frac{1}{4s^2 t^\sigma} - \frac{\sigma^2 s^2 t^\sigma}{16} + O(t), \\
u = -r\frac{2 + \sigma s^2 t^\sigma}{2 - \sigma s^2 t^\sigma}(1 + o(1))
\end{gathered} \tag{3.8}
$$

при $t \to +0$. *Параметры* σ, s^2 *и* r *даются следующими формулами*

$$
\sigma = \frac{\imath}{\pi}\ln(3+\sqrt{8}),\ r = -\imath\hat{u},\ s^2 = \frac{\imath\sigma^2}{4\pi^3}\frac{\Gamma^2(-\sigma)}{\Gamma^2(\sigma)}\Gamma^6(\frac{\sigma}{2}). \tag{3.9}
$$

4. Вывод формул части 3

В [1] (часть 6) доказаны формулы:

$$
M^p = R^{-1} C^{-1}_{\Theta_\infty \sigma} s^{\sigma_3} \hat{M}^p s^{-\sigma_3} C_{\Theta_\infty \sigma} R, \tag{4.1}
$$

$$
A_p \sim -\frac{\Theta_p}{2} + t^{\frac{\Theta_\infty}{2}\sigma_3} R^{-1} G A^p_{\text{in}} G^{-1} R t^{-\frac{\Theta_\infty}{2}\sigma_3}, \tag{4.2}
$$

где, следуя [1] использованы обозначения:

$$
G = G_{\Theta_\infty \sigma} t^{\frac{\sigma}{2}\sigma_3} s^{\sigma_3}, G_{\Theta_\infty \sigma} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\sigma - \Theta_\infty) & -1 \\ \frac{1}{2}(\sigma + \Theta_\infty) & 1 \end{pmatrix},
$$

$$
C_{\Theta_\infty \sigma} = \begin{pmatrix} \frac{-\Gamma(-\sigma)}{\Gamma(1 - \frac{\sigma - \Theta_\infty}{2})} e^{-\pi\imath(\sigma + \Theta_\infty)/2} & \frac{-\Gamma(-\sigma)}{\Gamma(1 - \frac{\sigma + \Theta_\infty}{2})} \\ \frac{-\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{\sigma + \Theta_\infty}{2})} e^{\pi\imath(\sigma - \Theta_\infty)/2} & \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\frac{\sigma - \Theta_\infty}{2})} \end{pmatrix}.
$$

Матрицы A^p_{in} определены следующим образом:

$$
A^0_{\text{in}} = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} c(-\sigma) \\ c(\sigma) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b(\sigma) & b(-\sigma) \end{pmatrix}, A^1_{\text{in}} = \frac{1}{\sigma}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(\sigma) & -a(-\sigma) \end{pmatrix},
$$

где $b(\sigma)$, $c(\sigma)$, $a(\sigma)$ те же, что и в Теореме 3.1. Матрицы $\hat{M}^p$ приведены в части 3, Теорема 3.2.

При выводе формул (4.1) и (4.2) в работе [1] предполагалось, что $1 > \Re\sigma > 0$. Анализ этого доказательства приводит к выводу, что оно справедливо и при $\Re\sigma = 0$, если $\Im\sigma \neq 0$. Отсюда непосредственно следуют Теоремы 3.1 и 3.2. Отметим, что в отличие от случая $\Re\sigma > 0$, рассмотренного в работе [1], для получения асимптотических формул Теоремы 3.1,требуется более аккуратное обращение с формулами (4.2).

В [1] было доказано, что существует решение системы (1.3) со следующей асимптотикой

$$y=-1+4\sqrt{\frac{2}{t}}e^{-\frac{\pi\imath}{4}}\sqrt{\beta_0}\sin(\frac{t}{2}+\imath\beta_0\ln t-\imath\ln\sqrt{\beta_0}+\imath\ln\hat{v})+O(t^{-1+2|\Re\beta_0|}),$$
$$z=-\frac{t}{8}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{2}}e^{-\frac{\pi\imath}{4}}\sqrt{\beta_0}\cos(\frac{t}{2}+\imath\beta_0\ln t-\imath\ln\sqrt{\beta_0}+\imath\ln\hat{v})+O(t^{2\Re|\beta_0|}),$$
$$u=\hat{u}e^{\frac{t}{2}}(1+o(1)) \tag{4.3}$$

при $t\to+\infty$. Отметим, что обозначение β_0 в (4.3) взято из работы [1] и не имеет ничего общего с β_0 из части 1. Это решение порождает следующие данные монодромии

$$\begin{aligned}
m_{11}^0 &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{\hat{v}\Gamma(\beta_0)}\exp(\beta_0\ln 2-\frac{\pi\imath\Theta_\infty}{2}+\frac{\pi\imath\beta_0}{2}),\\
m_{21}^0 &= \frac{1}{\hat{u}}\exp(\pi\imath\beta_0-\frac{\pi\imath}{2}+2\Theta_\infty\ln 2-\pi\imath\Theta_\infty),\\
m_{11}^1 &= \frac{\sqrt{2\pi}\hat{v}}{\Gamma(1-\beta_0)}\exp(\frac{\pi\imath}{2}-\beta_0\ln 2-\frac{\pi\imath\Theta_\infty}{2}+\frac{\pi\imath\beta_0}{2}),\\
m_{12}^1 &= \hat{u}\exp(\pi\imath\beta_0+\frac{\pi\imath}{2}-2\Theta_\infty\ln 2).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Переходя в (4.4) к пределу $\beta_0\to 0$ и $\beta_0/\hat{v}\to 0$ получаем формулы 3.5. В [1], в Дополнении А, были получены высшие члены в асимптотических разложениях функций $y(t)$ и $z(t)$. Предельный переход в этих разложениях приводит к формулам (3.4). Все оценки погрешностей в этих формулах полиномиальны по $\hat{v}$ и $\beta_0/\hat{v}$. Таким образом, предельный переход законен, что и доказывает Теоремы 3.3 и 3.4.

Следствие 3.1 получается непосредственно из Теорем 3.1, 3.2, 3.3, и 3.4. Для получения Следствия 3.2 мы совершаем предельный переход $\Theta_0\to 0$ и $\Theta_1\to 0$ в формулах 3.6, и затем полагаем $\Theta_\infty=0$.

References

1. F. V. Andreev, A. V. Kitaev, *Connection Formulas for Asymptotics of the Fifth Painlevé Transcendent on the Real Axis. I,*. Sfb 288 Preprint No. 160 (1995)..

2. F. V. Andreev, A. V. Kitaev, *Connection Formulas for Asymptotics of the Fifth Painlevé Transcendent on the Real Axis. II,*. in preparation..
3. A. Bobenko, U. Eitner, and A. Kitaev, *Harmonic Inverse Mean Curvature Surfaces and Painlevé equations.* Sfb 288 Preprint No. 182 (1995).
4. M. Jimbo, T. Miwa, *Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients II,*. — Physica **2D** (1981), 407–448.
5. M. Jimbo, *Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations,*. — Publ. RIMS, Kyoto Univ. **18** (1982), 1137–1161.
6. A. R. Its, *"Izomonodromnye" rexeniØ uravneniØ nulevoæ krivizny.* — DAN SSSR **49** no. 3 (1985), 530–565.

Andreev F. V, Kitaev A. V. On connection formulas for asymptotics of some special solutions of the fifth Painlevé equation.

Asymptotical expansions of some special solutions of the fifth Painlevé equation as $x \to 0$ and $x \to +\infty$ as well as the corresponding connection formulas are obtained. An example of application of the obtained formulas to the third Painlevé equation is given.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 сентября 1996г.