Г. И. Бижанова

О КЛАССИЧЕСКОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ФЛОРИНА, МАСКЕТА–ВЕРИГИНА И СТЕФАНА

Посвящается памяти
Анатолия Петровича Осколкова

Введение

В настоящей статье рассматриваются одномерные задачи со свободными границами, а именно задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана, в весовых пространствах Гельдера в малом по времени.

Наиболее полно изучена задача Стефана. Имеется большое количество работ, в которых исследуется классическая разрешимость задачи, стабилизация, устойчивость решений. Среди них работы Л. И. Рубинштейна [1], А. Фридмана [2], И. И. Данилюка [3, 4], В. Кайнера [5], Б. Шермана [6], В. В. Пухначева [7], А. Фазано и М. Примичерио [8], А. М. Мейрманова [9], Б. В. Базилия и В. Ю. Шелепова [10, 11], С. В. Салея [12], Е. И. Кима и Г. И. Бижановой [13, 14] и др. Подробную библиографию можно найти в работах [1–3, 9].

Значительно более короткую историю имеет задача, сформулированная В. А. Флориным в статье 1951 г., в которой исследовались процессы фильтрации жидкости в пористых телах. Вопросы существования и единственности классического решения однофазной одномерной задачи Флорина изучались Т. Д. Вентцель [16], Нгуеном Дин Чи [17], Д. М. Сайонсом и Р. Мартином [18]. Асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$ рассматривалось И. В. Бочаровой [19], а также в работах [17, 18].

Одномерная задача Маскета–Веригина, описывающая, как и задача Флорина, фильтрацию жидкости в пористой среде, была сформулирована Н. Н. Веригиным в 1952 г. в статье [20]. Им было найдено точное автомодельное решение двухфазной задачи с рассогласованием начальных и краевых данных и вырождением области начального существования одной из фаз, аналогичное точному автомодельному решению задачи Стефана, полученному Стефаном [21, с. 260], в частности, уравнение свободной границы выражалось в виде $x = 2\beta\sqrt{t}$, где β – положительный корень некоторого трансцендентного уравнения. Однако раньше, в 1946 г., М. Маскетом [22] были выведены в трехмерном случае условия на свободной границе вида

$$\Phi_1 = \Phi_2, \quad c_1 D_n \Phi_1 = c_2 D_n \Phi_2, \quad D_t F - c_{1,2} \nabla \Phi_{1,2} \nabla F = 0,$$

где Φ_1, Φ_2 – неизвестные функции, $F(x,y,z,t) = 0$ – уравнение свободной границы, n – нормаль к ней, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Существование и единственность решения одномерной задачи Маскета–Веригина исследовали Л. И. Рубинштейн [23], Л. И. Камынин [24, 25], В. Фалкс, Р. Б. Гюнтер [26], А. Бегматов [27], Л. Эванс [28, 29], А. Фридман [29], Ирена Павлов [30], А. М. Мейрманов [31], Л. Джин [32]. В работе [29] рассматривалось также асимптотическое поведение решения при $t \to \infty$.

Следует отметить, что основным методом решения одномерных задач со свободной границей является метод интегральных уравнений.

В настоящей работе задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана будут изучены в весовых гельдеровских пространствах $C_s^l(Q_T)$, $s \leqslant l$, с весом в виде степени t, введенных в рассмотрение В. С. Белоносовым [33]. Исследование задач в этом пространстве позволяет рассматривать решения $u(x,t)$, производные которых $D_t^k D_x^r u$ могут иметь особенность при $t = 0$ вида $t^{-\nu}$, $\nu = \frac{2k+r-s}{2}$, $s < 2k + r \leqslant [l]$, что дает возможность понизить порядок условий согласования начальных и краевых данных за счет уменьшения числа s, а в случае $s = l$ получить автоматически результаты исследований в пространстве Гельдера $C_{x\ t}^{l,l/2}(\bar{Q}_T)$.

В этом пространстве общие начально-краевые задачи для параболических уравнений и систем изучались В. С. Белоносовым [33, 34], Т. И. Зеленяком [33], В. А. Солонниковым [35–37], А. Г. Хачатряном [36], Е. В. Домановой [38], Г. И. Бижановой [37, 39], задачи со свободными границами исследовали В. В. Пухначев [7], Г. И. Бижанова [40, 41].

§1. Постановка задач. Основные результаты

Чтобы различать рассматриваемые задачи, будем приписывать индекс k, принимающий значения 1, 2, 3, к функциям $w_k = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \alpha_k(t)\}$ – решениям задач Флорина ($k = 1$), Маскета–Веригина ($k = 2$) и Стефана ($k = 3$) соответственно. Иногда для сокращения записей этот индекс будем опускать.

Пусть $\Omega = (0, b)$, $b > 0$, $\gamma(t)$-кривая $x = \alpha(t)$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < b$, причем α_0, $b - \alpha_0 > d_0 = \text{const} > 0$. Обозначим $Q_T^{(1)} = \{(x,t)|0 < x < \alpha(t), t \in (0,T)\}$, $Q_T^{(2)} = \{(x,t)|\alpha(t) < x < b, t \in (0,T)\}$, $\Omega_1 = (0, \alpha_0)$, $\Omega_2 = (\alpha_0, b)$, $Q_T = \Omega_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega_T^{(m)} = \Omega_m \times (0,T)$, $\Gamma_T = \{(x,t)|x = \gamma(t), t \in [0,T]\}$, $S_T^{(1)} = \{0\} \times [0,T]$, $S_T^{(2)} = \{b\} \times [0,T]$, $S_T = \{\alpha_0\} \times [0,T]$, $\sigma_T = (0,T)$, $D_T = R^1$.

Положим $\pi = \{x|\,|x - \alpha_0| < d_0, x \in \Omega\}$, $\Pi_m = \Omega_m \cup \pi$, $\pi_T = \pi \times (0,T)$, $\Pi_T^{(m)} = \Pi_m \times (0,T)$, $m = 1, 2$.

Пусть L_m – параболический оператор второго порядка

$$L_m\left(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} - a_m(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b_m(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - c_m(x,t),$$

коэффициенты которого удовлетворяют условиям

$$a_m(x,t) \geqslant a_0 = \text{const} > 0 \ \forall (x,t) \in \bar{\Pi}_T^{(m)}, \quad m = 1, 2,$$
$$a_1(x,t) \neq a_2(x,t) \ \forall (x,t) \in \bar{\pi}_T.$$

Сформулируем задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана, отличающиеся друг от друга только условиями на свободной границе. Требуется определить функции $u_1^{(k)}(x,t)$, $u_2^{(k)}(x,t)$ и $\alpha_k(t)$, удовлетворяющие следующим параболическим уравнениям, начальным и граничным условиям:

$$L_m u_m^{(k)} = f_m(x,t) \quad \text{в} \quad Q_T^{(m)}, \quad m = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$u_m^{(k)}\big|_{t=0} = u_{om}(x) \quad \text{в} \quad \Omega_m, \ \alpha_k\big|_{t=0} = \alpha_0, \tag{1.2}$$

$$u_1^{(k)}\big|_{S_T^{(1)}} = p_1(t), \quad u_2^{(k)}\big|_{S_T^{(2)}} = p_2(t) \tag{1.3}$$

и условиям сопряжения на свободной границе Γ_T в задаче Флорина ($k = 1$)

$$u_1^{(1)} = u_2^{(1)} = g(x,t), \tag{1.4}$$

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial x} = g_1(x,t), \tag{1.5}$$

в задаче Маскета–Веригина ($k=2$)

$$u_1^{(2)} = u_2^{(2)} + g(x,t), \tag{1.6}$$

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial x} + g_1(x,t) = \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial x} + g_2(x,t) = -\frac{d\alpha_2}{dt} \tag{1.7}$$

и в задаче Стефана ($k=3$)

$$u_1^{(3)} = u_2^{(3)} = g(x,t), \tag{1.8}$$

$$\lambda_1(x,t)\frac{\partial u_1^{(3)}}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial u_2^{(3)}}{\partial x} = -\frac{d\alpha_3}{dt} + g_1(x,t). \tag{1.9}$$

Замечание. Вместо условий (1.3) можно рассмотреть условия с производной по x или с производной по времени.

Задачи Флорина (1.1)–(1.5), Маскета–Веригина (1.1)–(1.3), (1.6), (1.7) и Стефана (1.1)–(1.3), (1.8), (1.9) будут изучены в весовом пространстве Гельдера. Приведем его определение [33, 35].

Пусть l – нецелое положительное число, $s \leqslant 1$. Под $C_s^l(Q_T)$ будем понимать банахово пространство функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{s,Q_T}^{(l)} = \sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} [u]_{Q_t'}^{(l)} + + \sum_{s<2j_0+j<l} \sup_{t<T} t^{\frac{2j_0+j-s}{2}} |D_t^{j_0} D_x^j u|_\Omega + \\ + \begin{cases} |u|_{Q_T}^{(s)}, & s \geqslant 0 \\ o, & s<0 \end{cases},$$

где

$$[u]_{Q_T}^{(l)} = \sum_{2j_0+j=[l]} [D_t^{j_0} D_x^j u]_{x,Q_T}^{(l-[l])} + \sum_{o<l-2j_0-j<2} [D_t^{j_0} D_x^j u]_{t,Q_T}^{(\frac{l-2j_0-j}{2})},$$

$$[v]_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(z,t)\in\bar{Q}_T} |v(x,t)-v(z,t)|\,|x-z|^{-\alpha},$$

$$[v]_{t,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t)(x,\tau)\in\bar{Q}_T} |v(x,t)-v(x,\tau)|\,|t-\tau|^{-\alpha},$$

$Q_t' = \Omega \times \left(\frac{t}{2}, t\right)$, $|u|_{Q_T}^{(s)}$ – норма пространства Гельдера $C_{xt}^{s,\frac{s}{2}}(\bar{Q}_T)$.

Под $C_s^{l/2}(\sigma_T)$ $(\sigma_T=(0,T))$ будем понимать банахово пространство функций $u(t)$, имеющих конечную норму

$$|u|_{s,\sigma_T}^{(l/2)}=\sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} \sum_{o<l-2j_0<2} [D_t^{j_0}u]_{\sigma_t'}^{(\frac{l-2j_0}{2})}+$$
$$+\sum_{s<2j_0<l} \sup_{t<T} t^{\frac{2j_0-s}{2}}|D_t^{j_0}u|+\begin{cases} |u|_{\sigma_T}^{(s/2)}, & s\geqslant 0\\ o, & s<0\end{cases},$$

где $\sigma_t'=\left(\frac{t}{2},t\right)$, $|u|_{\sigma_T}^{(s/2)}$ – норма пространства Гельдера $C^{s/2}(\bar\sigma_T)$.

При $s=l$ эти пространства совпадают с пространствами Гельдера $C_{xt}^{l,\frac{1}{2}}(\bar Q_T)$ и $C^{l/2}(\bar\sigma_T)$. При $s\geqslant 0$ определим $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T)$ и $\overset{\circ}{C}{}_s^{l/2}(\sigma_T)$ как подпространства функций из $C_s^l(Q_T)$ и $C_s^{l/2}(\sigma_T)$ соответственно, удовлетворяющих условиям $D_t^k u\big|_{t=0}=0$, $2k\leqslant s$. При $s<0$ положим $\overset{\circ}{C}{}_s^l(Q_T)=C_s^l(Q_T)$, $\overset{\circ}{C}{}_s^{l/2}(\sigma_T)=C_s^{l/2}(\sigma_T)$.

В §3 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1.1 (об эквивалентности). [35]. *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}_s^{l/2}(\sigma_T)$ *норма* $|u|_{s,\sigma_T}^{(l/2)}$ *эквивалентна норме*

$$\|u\|_{s,\sigma_T}^{(l/2)}=\sup_{t<T} t^{\frac{l-s}{2}} \sum_{0<l-2j_0<2} [D_t^{j_0}u]_{\sigma_t'}^{(\frac{l-2j_0}{2})}+\sup_{t<T} t^{-s/2}|u|.$$

Определим следующие банаховы пространства функций. Пусть

$$\mathcal{B}_{s,l}^{2+l}(Q_T)=C_s^{2+l}(Q_T^{(1)})\times C_s^{2+l}(Q_T^{(2)})\times C_s^{1+l/2}(\sigma_T),$$
$$\mathcal{B}_{s,k}^{2+l}(Q_T)=C_s^{2+l}(Q_T^{(1)})\times C_s^{2+l}(Q_T^{(2)})\times C_{s+1}^{\frac{3+l}{2}}(\sigma_T),\quad k=2,3,$$

– пространства решений $w_k=\{u_1^{(k)},u_2^{(k)},\alpha_k\}$ задач Флорина ($k=1$), Маскета–Веригина ($k=2$) и Стефана ($k=3$);

$$\mathcal{H}_{s,k}^{2+l}(Q_T)=H_{s,k}^{2+l}(Q_T)\times C_s^{1+l/2}(\sigma_T)\times C_s^{1+l/2}(\sigma_T),$$

$$H_{s,2}^{2+l}(Q_T)=$$
$$=C_{s-2}^l(\Pi_T^{(1)})\times C_{s-2}^l(\Pi_T^{(2)})\times C_s^{2+l}(Q_T)\times C_{s-1}^{1+l}(\pi_T)\times C_{s-1}^{1+l}(\pi_T),$$
$$H_{s,k}^{2+l}(Q_T)=$$
$$=C_{s-2}^l(\Pi_T^{(1)})\times C_{s-2}^l(\Pi_T^{(2)})\times C_s^{2+l}(Q_T)\times C_s^{2+l}(Q_T)\times C_{s-1}^{1+l}(\pi_T),$$

$k=1,3$, есть пространства с элементами $\{h_1,...,h_7\}$ и $\{h_1,\dots,h_5\}$ соответственно.

Аналогично введем пространства функций $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(Q_T)\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(Q_T)$, $\overset{\circ}{H}{}^{2+l}_{s,k}(Q_T)$, например,

$$\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,l}(Q_T)=\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(Q_T^{(1)})\times\overset{\circ}{C}{}^{2+l}_{s}(Q_T^{(2)})\times\overset{\circ}{C}{}^{1+l/2}_{s}(\sigma_T).$$

Замечание. В определении пространств $\mathcal{B}^{2+l}_{s,k}(Q_T)$, $\mathcal{H}^{2+l}_{s,k}(Q_T)$, $H^{2+l}_{s,k}(Q_T)$ указаны области определения функций Q_T, $Q_T^{(m)}$, $\Pi_T^{(m)}$, $\pi_T^{(m)}$, которые в §2 будут заменены на Ω_T, $\Omega_T^{(m)}$, S_T, в §3 – на D_T, $D_T^{(m)}$, S_T.

Нормы векторов w_k, h_k в этих пространствах определяются как суммы норм их компонент, например,

$$|w_k|_{\mathcal{B}^{2+l}_{s,l}(Q_T)}=\sum_{m=1}^{2}|u_m^{(1)}|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}}+|\alpha_1|^{(1+l/2)}_{s,\sigma_T},$$

$$|w_k|_{\mathcal{B}^{2+l}_{s,l}(Q_T)}=\sum_{m=1}^{2}|u_m^{(k)}|^{(2+l)}_{s,Q_T^{(m)}}+|\alpha_k|^{(\frac{3+l}{2})}_{s,\sigma_T},\quad k=2,3.$$

Приведем условия, которым будут удовлетворять данные задач Флорина, Маскета–Веригина и Стефана.

А$_1$) Коэффициенты операторов L_m принадлежат пространству $C^{1+l}_{s-1}(\Pi_T^{(m)})$, $\lambda_m\in C^{2+l}_{s}(\pi_T)$, причем $\lambda_m\geqslant\lambda_0=\mathrm{const}>0$ $\forall(x,t)\in\bar\pi_T$, $m=1,2$.

А$_2$) Коэффициенты операторов L_m принадлежат пространству $C^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x\ t}(\bar\Pi_T^{(m)})$, $\lambda_m\in C^{2+l,1+l/2}_{x\ t}(\bar\pi_T)$, причем $\lambda_m\geqslant\lambda_0$ $\forall(x,t)\in\bar\pi_T$, $m=1,2$.

Б$_1$) $u_{0m}(x)\in C^{1+s}(\bar\Omega_m)$, $f_m(x,t)\in C^{1+l}_{s-1}(\Pi_T^{(m)})$. $p_m(t)\in C^{\frac{3+l}{2}}_{1+s}(\sigma_T)$, $g(x,t)\in C^{3+l}_{1+s}(Q_T)$, $g_i(x,t)\in C^{2+l}_{s}(\pi_T)$, $m=1,2$, $i=1,2$.

Б$_2$) $u_{0m}(x)\in C^{3+l}(\bar\Omega_m)$, $f_m(x,t)\in C^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x\ t}(\bar\Pi_T^{(m)})$, $p_m(t)\in C^{\frac{3+l}{2}}(\bar\sigma_T)$, $g(x,t)\in C^{3+l,\frac{3+l}{2}}_{x\ t}(\bar Q_T)$, $g_i(x,t)\in C^{2+l,1+l/2}_{x\ t}(\bar\pi_T)$, $m=1,2$, $i=1,2$.

В) $$D_xu_{0m}(x)-D_xg(x,0)\big|_{x=\alpha_0}\neq0,\quad m=1,2,$$

$$D_xu_{01}(x)D_xu_{02}(x)\big|_{x=\alpha_0}\geqslant d_1=\mathrm{const}>0$$

в задаче Флорина;

$$D_x u_{01}(x) - D_x u_{02}(x) - D_x g(x,0)\big|_{x=\alpha_0} \neq 0,$$
$$D_x u_{02}(x) - D_x u_{01}(x)\big|_{x=\alpha_0} \geqslant d_1$$

в задаче Маскета–Веригина;

$$D_x u_{0m}(x) - D_x g(x,0)\big|_{x=\alpha_0} \neq 0,$$
$$D_x u_{0m}(x)\big|_{x=\alpha_0} \leqslant -d_1, \quad m=1,2,$$
$$u_{01}(x) > g(x,0) \quad \text{в} \quad \Omega_1, \quad u_{02}(x) < g(x,0) \quad \text{в} \quad \Omega_2,$$
$$p_1(t) > g(0,t), \quad p_2(t) < g(b,t) \quad \forall t \in [0,T]$$

в задаче Стефана.

Сформулируем теоремы, которые составляют основное содержание настоящей работы.

Теорема 1.1. *Пусть l – нецелое положительное число, $s_k < s \leqslant 2+l$, $s_1 = 1$, $s_k = \max(1,l)$, $k = 2,3$, и выполнены условия* А$_1$), Б$_1$) В), *а также условия согласования порядка $\left[\frac{1+s}{2}\right]$ на границах Γ_T, $S_T^{(m)}$, $m=1,2$.*

Тогда найдется такое $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T$, что каждая из задач (1.1)–(1.9) *имеет единственное решение $w_k(x,t) = \{u_1^{(k)}(x,t), u_2^{(k)}(x,t), \alpha_k(t)\} \in \mathcal{B}^{3+l}_{1+s,k}(Q_{T_0})$, для которого при всех $t \leqslant T_0$ справедлива оценка*

$$|w_k|_{\mathcal{B}^{3+l}_{1+s,k}(Q_t)} \leqslant c_1\biggl(\sum_{m=1}^{2}\bigl(|f_m|^{(1+l)}_{s-1,\Pi_t^{(m)}} + |u_{0m}|^{(1+s)}_{\Omega_m} + |p_m|^{(\frac{3+l}{2})}_{1+s,\sigma_t}\bigr) +$$
$$+|g|^{(3+l)}_{1+s,Q_t} + I_{1,k}\biggr), \quad k=1,2,3,$$
$$I_{1,k} = |g_1|^{(2+l)}_{s,\pi_t}, \quad k=1,3, \quad I_{1,2} = \sum_{i=1}^{2}|g_i|^{(2+l)}_{s,\pi_t}. \tag{1.11}$$

Из этой теоремы, если положить $s = 2+l$, автоматически вытекает теорема о разрещимости задач в пространстве Гельдера.

Обозначим

$$\mathcal{B}_k^{3+l}(Q_T) = C_{x\ t}^{3+l,\frac{3+l}{2}}(\bar{Q}_T^{(1)}) \times C_{x\ t}^{3+l,\frac{3+l}{2}}(\bar{Q}_T^{(2)}) \times C^{2+l/2}(\bar{\sigma}_T), \quad k=2,3,$$
$$\mathcal{B}_1^{3+l}(Q_T) = C_{x\ t}^{3+l,\frac{3+l}{2}}(\bar{Q}_T^{(1)}) \times C_{x\ t}^{3+l,\frac{3+l}{2}}(\bar{Q}_T^{(2)}) \times C^{\frac{3+l}{2}}(\bar{\sigma}_T). \tag{1.12}$$

Теорема 1.2. *Пусть l – нецелое положительное число. Пусть выполнены условия* А$_2$), Б$_2$), В, *а также условия согласования порядка $\left[\frac{3+l}{2}\right]$ на границах Γ_T, $S_T^{(m)}$, $m=1,2$.*

Тогда найдется такое $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T$, что каждая из задач (1.1)–(1.9) *имеет единственное решение $w_k = \{u_1^{(k)}(x,t),\ u_2^{(k)}(x,t), \alpha_k(t)\} \in \mathcal{B}_k^{3+l}(Q_{T_0})$, $k=1,2,3$, для которого при всех $t \leqslant T_0$ справедлива оценка*

$$|w_k|_{\mathcal{B}_k}^{3+l}(Q_t) \leqslant c_2 \left(\sum_{m=1}^{2} (|f_m|_{\Pi_t^{(m)}}^{(1+l)} + |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(3+l)} + |p_m|_{\sigma_t}^{\frac{3+l}{2}}) + |g|_{Q_t}^{(3+l)} + I_{2,k} \right),$$

$$I_{2,k} = |g_1|_{\pi_t}^{(2+l)}, \quad k=1,3, \quad I_{2,2} = \sum_{i=1}^{2} |g_i|_{\pi_t}^{(2+l)}.$$

Пусть в задачах (1.1)–(1.9) правые части уравнений (1.1) и заданные функции в условиях (1.4)–(1.9) на свободной границе равны нулю:

$$f_m = 0, \quad m=1,2, \quad g=0, \quad g_i=0, \quad i=1,2. \tag{1.13}$$

Теорема 1.3. *Пусть l – нецелое положительное число, $s_k < s \leqslant 2+l$, $s_1 = 1$, $s_k = \max(1,l)$, $k=2,3$. Пусть коэффициенты операторов L_m и функции λ_m подчиняются условиям* А$_1$), *или* А$_2$), *или они являются постоянными и выполнены условия* В).

Тогда при любых функциях $u_{0m} \in C^s(\bar{\Omega}_m)$, $p_m \in C_s^{1+l/2}(\sigma_T)$, $m=1,2$, удовлетворяющих условиям согласования порядка $\left[\frac{s}{2}\right]$ на границах Γ_T, $S_T^{(1)}$ и $S_T^{(2)}$, найдется такое $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T$, что каждая из задач (1.1)–(1.9) *имеет единственное решение $w_k(x,t) = \{u_1^{(k)}(x,t), u_2^{(k)}(x,t), \alpha_k(t)\} \in \mathcal{B}_{s,k}^{2+l}(Q_{T_0})$, для которого при всех $t \leqslant T_0$ справедлива оценка*

$$|w_k|_{\mathcal{B}_{s,k}^{2+l}(Q_t)} \leqslant c_3 \sum_{m=1}^{2} (|u_{0m}|_{\Omega_m}^{(s)} + |p_m|_{s,\sigma_t}^{(1+l/2)}), \quad k=1,2,3.$$

Замечание. Из этой теоремы следует, что при $l \in (0,1)$, $1 < s = 1+\mu < 2$, $\mu \in (0,1)$, порядок условий согласования на Γ_{T_0}, $S^{(m)}_{T_0}$, $m = 1,2$ во всех трех задачах равен нулю, свободная граница $\gamma_1(t)$ в задаче Флорина принадлежит пространству $C^{\frac{1+\mu}{2}}(\bar\sigma_{T_0})$, то есть она является кривой Ляпунова. (В задачах Маскета–Веригина и Стефана свободная граница имеет гладкость выше: $\alpha_k(t) \in C^{1+\mu/2}(\bar\sigma_{T_0})$. Кроме того, производные $D_t u^{(k)}_m$, $D^2_x u^{(k)}_m$, $k = 1,2,3$, $m = 1,2$ $D_t\alpha_1$ могут иметь особенность при $t = 0$ порядка $t^{\frac{\mu-1}{2}}$.

При выполнении условий (1.13), если положить $s = 2+l$, справедлива теорема о разрешимости всех трех рассматриваемых задач в пространствах $\mathcal{B}^{2+l}_k(Q_{T_0})$ (см. (1.12)).

Теорема 1.4. *Пусть l – нецелое положительное число, коэффициенты операторов L_m и функции λ_m подчиняются условиям* A$_2$) *или они являются постоянными и выполнены условия* B).

Тогда при любых функциях $u_{0m} \in C^{2+l}(\bar\Omega_m)$, $p_m \in C^{1+l/2}(\sigma_T)$, $m = 1,2$, удовлетворяющих условиям согласования порядка $1 + \left[\frac{l}{2}\right]$ на границах Γ_T, $S^{(1)}_T$ и $S^{(2)}_T$, найдется такое $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T$, что каждая из задач (1.1)–(1.9) *имеет единственное решение $w_k = \{u^{(k)}_1(x,t),\, u^{(k)}_2(x,t),\, \alpha_k(t)\} \in \mathcal{B}^{2+l}_k(Q_{T_0})$, $k = 1,2,3$, для которого при всех $t \leqslant T_0$ справедлива оценка*

$$|w_k|_{\mathcal{B}^{2+l}_k(Q_t)} \leqslant c_4 \sum_{m=1}^{2} \left(|u_{0m}|^{(2+l)}_{\Omega_m} + |p_m|^{(1+l/2)}_{\sigma_t}\right).$$

§2. Нелинейные задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана

Рассмотрим задачи Флорина ($k = 1$), Маскета–Веригина ($k = 2$) и Стефана ($k = 3$) (1.1)–(1.9). Докажем Теорему 1.1.

При помощи замен неизвестных функций

$$u^{(k)}_m = v^{(k)}_m + g(x,t), \quad k = 1,3, \quad m = 1,2, \tag{2.1}$$

$$u^{(2)}_1 = v^{(2)}_1 + g(x,t), \quad u^{(2)}_2 = v^{(2)}_2 \tag{2.2}$$

мы сведем задачи (1.1)–(1.9) к задачам с однородными условиями (1.4), (1.6), (1.8) на свободной границе; $v^{(k)}_m = 0$, $k = 1,3$;

$v_1^{(2)} = v_2^{(2)}$ на Γ_T. Затем преобразуем полученные задачи к задачам с нулевыми начальными данными. Для этого построим вспомогательные функции $V_m^{(k)}(x,t) \in C_{1+s}^{3+l}(D_T)$, $k=1,2,3$; $\beta_1(t) \in C_{1+s}^{\frac{3+l}{2}}(\sigma_T)$ и $\beta_k(t) \in C_{2+s}^{2+l/2}(\sigma_T)$, $k=2,3$, по следующим начальным условиям:

$$V_m^{(k)}\big|_{t=0} = \widetilde{u}_{0m}(x) - \widetilde{g}(x,0) \in C^{1+s}(D), \quad D_t^i V_m^{(k)}\big|_{t=0} = (\widetilde{u}_m^{(k)})^{(j)}(x) - \\ -\widetilde{g}^{(j)}(x) \in C^{1+s-2j}(D), \quad k=1,3, \quad m=1,2, \quad k=2, \quad m=1;$$

$$V_2^{(2)}\big|_{t=0} = \widetilde{u}_{02}(x) \in C^{1+s}(D), \quad D_t^j V_2^{(2)}\big|_{t=0} = (\widetilde{u}_2^{(2)})^{(j)}(x) \in C^{1+s-2j}(D);$$

$$\beta_k\big|_{t=0} = 0, \quad D_t^j \beta_k\big|_{t=0} = \alpha_k^{(j)},$$

где $j=1,\ldots,\left[\frac{1+s}{2}\right]$ при $k=1$; $j=1,\ldots,1+[s/2]$ при $k=2,3$, знак $\sim$ означает гладкое продолжение функции во все пространство $D=R^1$, функции $(u_m^{(k)})^{(j)}(x) = D_t^j u_m^{(k)}\big|_{t=0}$, числа $\alpha_k^{(j)} = D_t^j \alpha_k\big|_{t=0}$ определяются из уравнений (1.1) и при выводе условий согласования на свободной границе; $g^{(j)}(x) = D_t^j g(x,t)\big|_{t=0}$. Потребуем, чтобы для построенных функций были справедливы оценки

$$|V_m^{(k)}|_{1+s,D_T}^{(3+l)} \leqslant c_1 \left(|f_m|_{s-1,\Pi_T^{(m)}}^{(1+l)} + |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(1+s)}) + I_m^{(k)} \right), \tag{2.3}$$

$$I_m^{(k)} = |g|_{1+s,Q_T}^{(3+l)}, \quad k=1,3, \quad m=1,2, \quad k=2, \quad m=1, \quad I_2^{(2)}=0,$$

$$|\beta_1|_{s+1,\sigma_T}^{(\frac{3+l}{2})} \leqslant c_2 \left(\sum_{m=1}^{2} (|f_m|_{s-1,\Pi_T^{(m)}}^{(1+l)} + |u_{0m}|_{\Omega_m}^{(1+s)}) + |g|_{1+s,Q_T}^{(3+l)} \right) \tag{2.4}$$

$$|\beta_k|_{s+2,\sigma_T}^{(2+l/2)} \leqslant c_3 \big(|f_1|_{s-1,\Pi_T^{(1)}}^{(1+l)} + (k-2)|f_2|_{s-1,\Pi_T^{(2)}}^{(1+l)} + |u_{01}|_{\Omega_1}^{(1+s)} + \\ +(k-2)|u_{02}|_{\Omega_2}^{(1+s)} + |g_1|_{s,\pi_T}^{(2+l)} \big), \quad k=2,3. \tag{2.5}$$

Заметим, что в правой части (2.5) при $k=2$ не будет второго и четвертого слагаемых.

Представим функцию $\alpha_k(t)$ в виде

$$\alpha_k(t) = \alpha_0 + \beta_k(t) + \rho_k(t), \tag{2.6}$$

где $\rho_k(t)$ – новая неизвестная функция.

Возьмем положительное число $\delta_0 < d_0/4$. (Напомним, что α_0, $b - \alpha_0 > d_0$.) Пусть $\chi(\lambda)$ – гладкая срезающая функция, равная единице при $|\lambda| < \delta_0$ и нулю при $|\lambda| \geqslant 2\delta_0$ и имеющая оценку $|D^r\chi| < c_r\delta_0^{-r}$.

Определим преобразование координат по формуле

$$x = z + \chi(z-\alpha_0)(\beta_k(t) + \rho_k(t)), \tag{2.7}$$

Преобразование (2.7) рассмотрим как уравнение, определяющее неявно z как функцию x и t. При достаточно малом $T_1 \in (0,T]$ найдутся такие постоянные $0 < d_2 < 1$, $d_3 > 0$, что будет выполняться неравенство

$$d_2 \leqslant \frac{\partial x}{\partial z} = 1 + \chi'(z-\alpha_0)(\beta_k + \rho_k) \leqslant d_3 \quad \forall t \in [0, T_1],$$

и тогда существует решение $z = \eta(x, \beta_k + \rho_k)$ уравнения (2.7), имеющее производные любого порядка по x, а по t столь же гладкое, как сумма $\beta_k(t) + \rho_k(t)$, кроме того, $z = x - \beta_k - \rho_k$ при $|z-\alpha_0| < \delta_0$ и $z = x$ при $|z - \alpha_0| \geqslant 2\delta_0$ и $t = 0$.

Таким образом, обратный переход к переменной x осуществится по формуле

$$z = x - \chi(\eta(x, \beta_k+\rho_k) - \alpha_0)(\beta_k(t) + \rho_k(t)) \quad \forall t \in [0, T_1]. \tag{2.8}$$

Легко видеть, что преобразование (2.7) переводит свободную границу $\alpha_k(t)$ в точку α_0, неизвестные области $Q_{T_1}^{(m)}$ – в фиксированные $\Omega_{T_1}^{(m)}$.

Для сокращенной записи формул введем обозначения

$$\begin{gathered} F(z,t)\circ\chi(\beta+\rho) = F(z+\chi(\beta+\rho),t) = F'(z,t),\\ F\circ\chi\beta = F''(z,t), \quad F\circ\chi(\beta+\rho^*) = F^*(z,t), \end{gathered} \tag{2.9}$$

знаки $'$, $''$, $*$ у дифференциальных операторов будут означать, что их коэффициенты преобразоны по формулам (2.9). Очевидно, при $|z-\alpha_0| \geqslant 2\delta_0$ $F' = F'' = F^* = F(z,t)$.

После замены неизвестных функций (2.1), (2.2), (2.6), преобразования координат координат (2.7) и еще одной замены

$$v_m(z+\chi(\beta+\rho),t) = \Theta_m^{(k)}(z,t) + V_m''(z,t), \quad m = 1,2, \tag{2.10}$$

мы получим нелинейные задачи на нахождение функций $w_k(z,t) = \{\Theta_1^{(k)}(z,t), \Theta_2^{(k)}(z,t), \rho_k(t)\}$, $k = 1,2,3$, удовлетворяющих параболическим уравнениям

$$P_m'(z,t,D_z,D_t;\rho_k,\varkappa)\Theta_m^{(k)} - \frac{1}{\varkappa}\chi D_z(V_m'' + g' + \Theta_m^{(k)})\frac{d\rho_k}{dt} = F_{m,k}'(z,t),$$

в фиксированных областях $\Omega_T^{(m)}$, $k=1,3$, $m=1,2$, $k=2$, $m=1$;

$$P_2'\Theta_2^{(2)} - \frac{1}{\varkappa}\chi D_z(V_2'' + \Theta_2^{(2)})\frac{d\rho_2}{dt} = F_{2,2}'(z,t) \text{ в } \quad \Omega_T^{(2)}; \tag{2.11}$$

нулевым начальным условиям, краевым условиям

$$\Theta_1^{(k)}\big|_{S_T^{(1)}} = \psi_1^{(k)}(t), \quad \Theta_2^{(k)}\big|_{S_T^{(2)}} = \psi_2^{(k)}(t) \tag{2.12}$$

и следующим условиям сопряжения на границе $S_T = \{\alpha_0\}\times[0,T]$:

$$\Theta_m = -V_m'', \quad m=1,2,$$

$$E_1'(z,t,D_z;\varkappa)w \equiv \frac{\lambda_1'}{\varkappa}\frac{\partial\Theta_1}{\partial z} - \frac{\lambda_2'}{\varkappa}\frac{\partial\Theta_2}{\partial z} = \varphi_1'(z,t); \tag{2.13}$$

в задаче Флорина ($k=1$),

$$\Theta_1 - \Theta_2 = V_2'' - V_1'', \quad E_1'(z,t,D_z;\varkappa)w = \varphi_2'(z,t)$$

$$E_2'(z,t,D_z,D_t;\varkappa)w \equiv \frac{\lambda_1'}{\varkappa}D_z\theta_1 + \frac{d\rho_2}{dt} = \varphi_4'(z,t) \tag{2.14}$$

в задаче Маскета–Веригина ($k=2$) и

$$\Theta_m = -V_m'', \quad m=1,2,$$

$$E_3'(z,t,D_z,D_t;\varkappa)w \equiv \frac{\lambda_1'}{\varkappa}D_z\theta_1 - \frac{\lambda_2'}{\varkappa}D_z\Theta_2 + \frac{d\rho_3}{dt} = \varphi_3'(z,t) \tag{2.15}$$

в задаче Стефана ($k=3$). Здесь

$$P_m' = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\varkappa^2}a_m' D_z^2 + \left(\frac{1}{\varkappa^3}a_m' D^2\chi(\beta_k+\rho_k) - \frac{1}{\varkappa}\chi D_t\beta_k - \frac{1}{\varkappa}b_m'\right) - c_m';$$

$$F_{m,k}' = f_m' - P_m'(V_m'' + g'), \quad k=1,3, \quad m=1,2, \quad k=2, \quad m=1,$$

$$F_{2,2}' = f_2' - P_2'V_2''; \quad \varphi_1' = g_1' + \frac{1}{\varkappa}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\lambda_m' D_z(V_m''+g');$$

$$\varphi_2' = -g_1' + g_2' - \frac{1}{\varkappa}(\lambda_1' D_z(V_1''+g') - \lambda_2' D_z V_2'');$$

$$\varphi_4' = -g_1' - D_t\beta - \frac{1}{\varkappa}\lambda_1' D_z(V_1''+g');$$

$$\varphi_3' = g_1' - D_t\beta + \frac{1}{\varkappa}\sum_{m=1}^{2}(-1)^m\lambda_m' D_z(V_m''+g');$$

$$\psi_m^{(k)} = p_m - (g+V_m)\big|_{S_T^{(m)}}, \quad k=1,3, \quad m=1,2, \quad k=2, \quad m=1;$$

$$\psi_2^{(2)} = p_2 - V_2\big|_{S_T^{(2)}}; \quad \varkappa = 1 + D_z\chi(\beta_k(t)+\rho_k(t)).$$

Для дальнейшего исследования задач (2.11)–(2.15) нам потребуются следующие три линейные задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана на нахождение неизвестных функций $w_k(x,t)=\{v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \rho_k(t)\}$, удовлетворяющих параболическим уравнениям

$$L_m v_m^{(k)} - q_m^{(k)}(x,t)\chi(x-\alpha_0)\frac{d\rho_k}{dt} = F_m(x,t) \quad \text{в} \quad \Omega_T^{(m)}, \quad m=1,2, \tag{2.16}$$

нулевым начальным условиям, граничным условиям

$$v_1^{(k)}\big|_{S_T^{(1)}} = \psi_1(t), \quad v_2^{(k)}\big|_{S_T^{(2)}} = \psi_2(t) \tag{2.17}$$

и условиям сопряжения на границе $S_T=\{\alpha_0\}\times[0,T]$:

$$\begin{gathered} v_m^{(1)} = \varphi_m(x,t), \quad m=1,2, \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial v^{(1)}}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x} = \varphi_3(x,t), \end{gathered} \tag{2.18}$$

в линейной задаче Флорина ($k=1$),

$$\begin{gathered} v_1^{(2)} - v_2^{(2)} = \varphi_1(x,t), \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial x} = \varphi_2(t), \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{d\rho_2}{dt} = \varphi_3(x,t) \end{gathered} \tag{2.19}$$

в линейной задаче Маскета–Веригина ($k=2$)

$$\begin{gathered} v_m^{(3)} = \varphi_m(x,t), \quad m=1,2, \\ \lambda_1(x,t)\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial x} - \lambda_2(x,t)\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial x} + \frac{d\rho_3}{dt} = \varphi_3(x,t). \end{gathered} \tag{2.20}$$

в линейной задаче Стефана ($k=3$).

Теорема 2.1. *Пусть l – нецелое положительное число, $s_k < s \leqslant 2+l$, $s_1=2$, $s_k=\max(2,l)$, $k=2,3$. Пусть коэффициенты операторов L_m и функции q_m принадлежат пространству $C^l_{s-2}(\Omega_T^{(m)})$, $\lambda_m \in C^{1+l}_{s-1}(S_T)$ и выполнены условия*

$$\begin{aligned} &q_1^{(1)} q_2^{(2)} \geqslant d_1 = \text{const} > 0 \ \textit{на}\ S_T \ (k=1), \\ &q_2^{(2)} - q_1^{(2)} \geqslant d_1 \ \textit{на}\ S_T \ (k=2), \\ &q_m^{(3)} \leqslant -d_1 \ \textit{на}\ S_T \ (k=3), \quad m=1,2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Тогда при любом векторе $h_k = \{F_1, F_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2\} \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_T)$ *каждая из линейных задач* (2.16)–(2.20) *имеет единственное решение* $w_k = \{v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \rho_k\}$, *принадлежащее пространству* $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_T)$, *для которого справедлива оценка*

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,1}(\Omega_T)} \leqslant c_{3+k}|h_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_T)}, \quad k = 1, 2, 3 \tag{2.22}$$

Теорема будет доказана в §3. Заматим только, что величина T здесь произвольна.

Обратимся к задачам (2.11)–(2.15). Определим векторы h'_k по правым частям уравнений и условий на границах $S_T^{(m)}$, S_T

$$h'_k(z,t;\varkappa) = \{F'_{1,k}, F'_{2,k}, -V''_1\big|_{S_T}, -V''_2\big|_{S_T}, \varphi'_k\big|_{S_T}, \psi_1^{(k)}, \psi_2^{(2)}\},\ k = 1, 3,$$
$$h'_2 = \{F'_{1,2}, F'_{2,2}, V''_2 - V''_1\big|_{S_T}, \varphi'_2\big|_{S_T}, \varphi'_4\big|_{S_T}, \psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}\}. \tag{2.23}$$

Представим вектор $h'_k(z,t;\varkappa)$ в виде

$$h'_k(z,t;\varkappa) = h''_k(z,t;\varkappa_0) + (h'_k(z,t;\varkappa) - h''_k(z,t;\varkappa_0)), \tag{2.24}$$

где $\varkappa = 1 + D_z\chi(\beta_k(t) + \rho_k(t))$, $\varkappa_0 = 1 + D_z\chi\beta_k(t)$.

По построению, в силу условий согласования и на основании лемм 2.2–2.6 о произведении и композиции функций из весового пространства Гельдера [40, с.23] вектор-функция h''_k принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_1})$. Кроме того, в параболических уравнениях (2.11) коэффициенты при производных $D_t\rho$ удовлетворяют условиям (2.21) Теоремы 2.1

$$D_z(V''_1 + g'')D_z(V''_2 + g)\Big|_{\substack{t=0\\ z=\alpha_0}} = D_z u_{01}(z) D_z u_{02}(z)\Big|_{z=\alpha_0} \geqslant d_1 > 0,\ k=1,$$
$$D_z V''_2 - D_z(V''_1 + g'')\Big|_{\substack{t=0\\ z=\alpha_0}} = D_z u_{02}(z) - D_z u_{01}(z)\Big|_{z=\alpha_0} \geqslant d_1,\ k = 2,$$
$$D_z(V''_m + g'')\Big|_{\substack{t=0\\ z=\alpha_0}} = D_z u_{0m}(z)\Big|_{z=\alpha_0} \leqslant -d_1,\ k = 3,\ m = 1, 2.$$

Будем доказывать Теорему 1.1 в два этапа, как в работах [40, 41], сначала в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_{T_0})$, затем – в $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_0})$.

Теорема 2.2. *Пусть* l *– нецелое положительное число,* $s_k < s \leqslant 2 + l$, $s_1 = 1$, $s_k = \max(1, l)$, $k = 2, 3$, *и выполнены условия Теоремы* 1.1. *Тогда найдется такое* $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T_1$, *что каждая из задач*

(2.11)–(2.15) *имеет единственное решение* $w_k = \{\Theta_1^{(k)}, \Theta_2^{(k)}, \rho_k\} \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_{T_0})$, *для которого справедлива оценка*

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_t)} \leqslant c_7 |h_k''|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_t)} \quad \forall t \in (0, T_0), \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.25}$$

Доказательство. В параболических уравнениях и условиях на свободной границе S_T выделим линейные выражения с помощью тождества $P_m'(\cdot;\rho,\varkappa) = P_m''(\cdot;0,\varkappa_0) + (P_m' - P_m'')$ и т.п. (Напомним, что $F' = F \circ \chi(\beta + \rho)$, $F'' = F \circ \chi\beta$.) Затем, оставив в левых частях уравнений и условий на S_T линейные выражения и перенеся в правые части остальные слагаемые, представим задачи (2.11)–(2.15) в операторной форме

$$B_k w_k = h_k'' + N w_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

где B_k – линейные операторы, к примеру,

$$\begin{gathered} B_2 w_2 = \{P_1''(\cdot;0,\varkappa_0)\Theta_1 - \frac{1}{\varkappa_0}\chi D_z (V_1'' + g'') D_t \rho; \quad P_2''(\cdot;0,\varkappa_0)\Theta_2 - \\ -\frac{1}{\varkappa_0}\chi D_z V_2'' D_t \rho;\ \Theta_1 - \Theta_2\big|_{S_{T_1}}; \quad E_1''(\cdot,\varkappa_0) w_2\big|_{S_{T_1}}; E_2''(\cdot;\varkappa_0) w_2\big|_{S_{T_1}}; \\ \Theta_1\big|_{S_{T_1}^{(1)}};\ \Theta_2\big|_{S_{T_1}^{(2)}}\}, \end{gathered}$$

N_k – нелинейные операторы, векторы h_k'' определяются по формулам (2.23), (2.24).

На основании Теоремы 2.1 и оценки (2.22) можем записать

$$\begin{gathered} w_k = B_k^{-1} h_k'' + B_k^{-1} N_k w_k, \\ |w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_t)} \leqslant c_8 \left(|h_k''|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_t)} + |N_k w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_t)} \right),\ t \in (0, T_1), \end{gathered} \tag{2.26}$$

где B_k^{-1} – обратный к B_k оператор.

При малом T_0 к уравнению (2.26) применим принцип сжимающих отображений, на основании которого следует, что оно имеет единственное решение w_k, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_{T_0})$ и удовлетворяющее оценке (2.25) (см. [40, 41]).

Теорема 2.3. *Пусть l – нецелое положительное число, $s_k < s \leqslant 2+l$, $s_1 = 1$, $s_k = \max(1,l)$, $k = 2,3$ и выполнены условия Теоремы 1.1. Тогда найдется такое $T_0 : 0 < T_0 \leqslant T_1$, что каждая из задач (2.11)–(2.15) имеет единственное решение $w_k = \{\Theta_1^{(k)}, \Theta_2^{(k)}, \rho_k\}$, принадлежащее пространству $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_0})$, для которого справедлива оценка*

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_t)} \leqslant c_9 |h_k''|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{3+l}_{s+1,k}(\Omega_{T_1})} \ \forall t \in (0,T_0), \ k = 1,2,3. \tag{2.27}$$

Доказательство. В предыдущей теореме было доказано существование и единственность решений задач (2.11)–(2.15) в пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_{T_0})$, $k = 1,2,3$. Обозначим эти решения через $w_k^* = \{\Theta_1^{(k)*}, \Theta_2^{(k)*}, \rho_k^*\}$ и вместо задач (2.11)–(2.15) рассмотрим следующие задачи с “замороженными” коэффициентами и правыми частями. Требуется найти функции $w_k = \{\Theta_1^{(k)}, \Theta_2^{(k)}, \rho_k\}$, удовлетворяющие параболическим уравнениям

$$P_m^*(z,t,D_t;\rho^*,\varkappa^*)\Theta_m^{(k)} - \frac{1}{\varkappa^*}\chi D_z(V_m'' + g^* + \Theta_m^{(k)*})\frac{d\rho_k}{dt} = F_{m,k}^*(z,t)$$

$k = 1,3$, $m = 1,2$, $k = 2$, $m = 1$, в $\Omega_T^{(m)}$;

$$P_2^*\Theta_2^{(2)} - \frac{1}{\varkappa^*}\chi D_z(V_2'' + \Theta_2^{(2)*})\frac{d\rho_2}{dt} = F_{2,2}^*(z,t) \text{ в } \Omega_T^{(2)}; \tag{2.28}$$

нулевым начальным условиям, краевым условиям

$$\Theta_1^{(k)}\big|_{S_T^{(1)}} = \psi_1^{(k)}(t), \quad \Theta_2^{(k)}\big|_{S_T^{(2)}} = \psi_2^{(k)}(t) \tag{2.29}$$

и условиям сопряжения на границе S_T:

$$\Theta_m = -V_m'', \quad m = 1,2, \quad \frac{1}{\varkappa^*}\sum_{m=1}^{2}(-1)^{1+m}\lambda_m^*\frac{\partial\Theta_m}{\partial z} = \varphi_1^*(z,t) \tag{2.30}$$

в задаче Флорина ($k = 1$),

$$\begin{gathered}\Theta_1 - \Theta_2 = V_2'' - V_1'', \quad \frac{1}{\varkappa^*}\sum_{m=1}^{2}(-1)^{1+m}\lambda_m^*\frac{\partial\Theta_m}{\partial z} = \varphi_2^*(z,t) \\ \frac{\lambda_1^*}{\varkappa^*}\frac{\partial\Theta_1}{\partial z} + \frac{d\rho_2}{dt} = \varphi_4^*(z,t)\end{gathered} \tag{2.31}$$

в задаче Маскета–Веригина ($k=2$),

$$\Theta_m = -V_m'', \quad m=1,2,$$

$$\frac{1}{\varkappa^*}\sum_{m=1}^{2}(-1)^{1+m}\lambda_m^*\frac{\partial\Theta_m}{\partial z}+\frac{d\rho_3}{dt}=\varphi_3^*(z,t), \tag{2.32}$$

в задаче Стефана ($k=3$).

Знак * означает композицию функций и коэффициентов операторов по формуле (2.9): $F^* = F\circ\chi(\beta+\rho^*)$, $\varkappa^* = 1 + D\chi(\beta+\rho^*)$.

Мы получили линейные задачи вида (2.16)–(2.20). Вектор h_k^*, составленный из правых частей уравнений и условий (2.28)–(2.32), принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_0})$, коэффициенты операторов $P_m^*(\cdot;\rho^*,\varkappa^*)$ и λ_m^* – пространствам $C^{1+l}_{s-1}(\Omega_{T_0})$ и $C^{2+l}_s(S_{T_0})$ соответственно. На основании Теоремы 2.1 каждая из задач (2.28)–(2.32) имеет единственное решение, которое обозначим через w_k^{**}. Оно принадлежит $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_0})$ и удовлетворяет оценке

$$|w_k^{**}|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_t)} \leqslant c_{10}|h_k^{**}|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{3+l}_{s+1,k}(\Omega_t)} \leqslant c_{11}|h_k''|_{\overset{\circ}{\mathcal{H}}{}^{3+l}_{s+1,k}(\Omega_t)} \ \forall t\in(0,T_0),$$

где постоянная c_{11} зависит от ρ_k^*, $T_0 \leqslant T_1$, T_0 определено в Теореме 2.2, T_1 – при выводе обратного преобразования координат (2.8). Но по Теореме 2.2 решением задач (2.28)–(2.32) является и функция $w_k^* \in \overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{2+l}_{s,k}(\Omega_{T_0})$. Так как решение w_k^* единственно, то оно совпадает с w_k^{**}, но тогда решение задач (2.11)–(2.15) w_k^* принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}^{3+l}_{1+s,k}(\Omega_{T_0})$ и подчиняется оценке (2.27).

Завершим доказательство Теоремы 1.1. Вспоминая замены (2.10), (2.6)–(2.8) и (2.1), (2.2), получим выражения

$$u_m^{(k)}(x,t) = g(x,t) + \Theta_m^{(k)}(x-\chi(\eta(x,\beta_k+\rho_k)-\alpha_0)(\beta_k+\rho_k),t)+$$
$$+V_m^{(k)}(x-\chi(\eta(x,\beta_k+\rho_k)-\alpha_0)\rho_k,t),\ k=1,3,\ m=1,2,\ k=2,\ m=1;$$
$$u_2^{(2)}(x,t) = \Theta_2^{(2)}(x-\chi(\eta(x,\beta_2+\rho_2)-\alpha_0)(\beta_2+\rho_2),t)+$$
$$+V_2^{(2)}(x-\chi(\eta(x,\beta_2+\rho_2)-\alpha_0)\rho_2,t),$$

в которых функции, стоящие в правых частях, на основании лемм о композиции функций из весового пространства Гельдера [40] удовлетворяют оценкам

$$|\Theta_m^{(k)}(x-\chi(\beta_k+\rho_k),t|_{1+s,Q_t}^{(3+l)} \leqslant c_{12}|\Theta_m^{(k)}(z,t)|_{1+s,\Omega_t}^{(3+l)},$$
$$|V_m(x-\chi\rho_k,t)|_{1+s,Q_t}^{(3+l)} \leqslant c_{13}|V_m^{(k)}(z,t)|_{1+s,D_t}^{(3+l)},\ t\leqslant T_0,$$

причем константы c_{12}, c_{13} зависят от функций β_k и ρ_k.

Итак, решения задач (1.1)–(1.9) $w_k(x,t)=\{u_1^{(k)},u_2^{(k)},\rho_k\}$ принадлежат пространствам $\mathcal{B}_{1+s,k}^{3+l}(\Omega_{T_0})$, $k=1,2,3$. Далее, принимая во внимание оценки (2.27) функций $\Theta_1^{(k)}(z,t)$, $\Theta_2^{(k)}(z,t)$, $\rho_k(t)$ и оценки (2.3)–(2.5) функций $V_m^{(k)}$, β_k, а также учитывая, что функции h_k'' определяемые формулами (2.23), (2.24), оцениваются выражением, находящимся в правой части неравенства (1.11), получим требуемую оценку (1.11).

Теорема 1.1 доказана.

Доказательство Теоремы 1.3 состоит из одного этапа – Теоремы 2.2. Отличие от доказательства Теоремы 1.1 заключается в том, что вспомогательные функции $V_m^{(k)}(x,t)$ и β_k находятся в классах $C_s^{2+l}(D_T)$, $k=1,2,3$ и $C_s^{1+l/2}(\sigma_T)$, $k=1$, $C_{s+l}^{\frac{3+l}{2}}(\sigma_T)$, $k=2,3$ соответственно.

Точно так же можно доказать теоремы о разрешимости однофазных задач Флорина и Стефана, аналогичные Теоремам 1.1–1.4.

Отметим, что Теоремы 1.1–1.4 будут иметь место и для квазилинейных параболических уравнений

$$K_m u_m = \frac{\partial u_m}{\partial t} - a_m(x,t,u_m,D_x u_m)\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - b_m(x,t,u_m,D_x u_m)$$

для $s_k<s\leqslant 2+l$, $s_1=2$, $s_k=\max(2,l)$, $k=2,3$ и при условиях, что $a_m(x,t,p,q)$, $b_m(x,t,p,q)\in C^{1+l}$ по переменным x,p,q и $a_m(x,t,p,q)$, $b_m(x,t,p,q)\in C^{\frac{1+l}{2}}$ по переменной t.

§3. Модельные линейные задачи Флорина, Маскета–Веригина и Стефана

Докажем Теорему 2.1 о разрешимости задач (2.16)–(2.20). Доказательство проведем, как в [39–42], при помощи регуляризатора $R^{(k)}h_k=\{R_1^{(k)}h_k,R_2^{(k)}h_k,R_3^{(k)}h_k\}$. Для его построения нужно найти решения всех модельных задач, возникающих при локальном рассмотрении исходных задач (2.16)–(2.20), а именно: задач на прямой с условиями сопряжения (2.18)–(2.20), задачи Коши и первой граничной задачи на полупрямой. Однозначная разрешимость в пространствах $\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}_s^{2+l}$ задач Коши и с граничным условием первого рода установлена в работах [33–36]. Изучим модельные задачи сопряжения.

Пусть $D_1 = \{x|x < 0\}$, $D_2 = \{x|x > 0\}$, $D = R^1$, $D_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $D_T = D \times (0,T)$, $R_T = \{0\} \times [0,T]$, $\sigma_T = (0,T)$.

Требуется определить функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $\rho(t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} - a_m^2 \frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} - q_m^{(k)} \frac{d\rho}{dt} = f_m(x,t) \text{ в } D_T^{(m)},\ m = 1,2, \tag{3.1}$$

начальным условиям

$$u_m\big|_{t=0} = 0 \text{ в } D_m, \quad m = 1,2, \quad \rho\big|_{t=0} = 0 \tag{3.2}$$

и условиям сопряжения на границе R_T:

$$u_m = g_m(x,t), \quad m = 1,2, \quad \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = g_3(x,t), \tag{3.3}$$

в линейной задаче Флорина ($k = 1$),

$$\begin{gathered} u_1 - u_2 = g_1(x,t), \quad \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} = g_2(x,t), \\ \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{d\rho}{\partial t} = g_3(x,t) \end{gathered} \tag{3.4}$$

в линейной задаче Маскета–Веригина ($k = 2$) и

$$u_m = g_m(x,t),\ m = 1,2,\ \lambda_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{d\rho}{dt} = g_3(x,t), \tag{3.5}$$

в линейной задаче Стефана, где константы подчиняются условиям

$$\begin{gathered} \lambda_m > 0, \quad q_1^{(1)} q_2^{(1)} > 0\ (k = 1), \\ q = q_2^{(2)} - q_1^{(2)} > 0\ (k = 2),\ q_m^{(3)} < 0,\ m = 1,2\ (k = 3). \end{gathered} \tag{3.6}$$

Докажем, что решения $w_k = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \rho_k\}$ этих задач удовлетворяют оценке

$$|w_k|_{\overset{\circ}{\mathcal{B}}{}_{s,k}^{2+l}(D_T)} \leqslant c_1 |h_k|_{\overset{\circ}{H}{}_{s,k}^{2+l}(\Omega_T)}, \quad k = 1,2,3, \tag{3.7}$$

где $h_k = \{f_1, f_2, g_1, g_2, g_3\}$.

Преобразуем задачи (3.1)–(3.5). Для этого построим вспомогательные функции $\omega_m^{(k)}(x,t)(x,t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^{2+l}_{s,k}(D_T)$, определяемые как решения следующих задач:

$$\frac{\partial \omega_m^{(k)}}{\partial t} - a_m^2 \frac{\partial^2 \omega_m^{(k)}}{\partial x^2} = f_m(x,t) \text{ в } D_T^{(m)},\ m = 1,2,\ k = 1,2,3, \tag{3.8}$$

$$\omega_m^{(k)} = g_m \text{ на } R_T,\ k = 1,3,\ m = 1,2, \tag{3.9}$$

$$\omega_1^{(2)} = \omega_2^{(2)} + g_1,\ \lambda_1 \frac{\partial \omega_1^{(2)}}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial \omega_2^{(2)}}{\partial x} = g_2 \text{ на } R_T,\ k = 2. \tag{3.10}$$

На основании работ [33–36, 43] задачи (3.8)–(3.10) разрешимы, а их решения подчиняются оценкам

$$\begin{gathered} \sum_{m=1}^{2} |\omega_m^{(k)}|^{(2+l)}_{s,D_T^{(m)}} \leqslant c_{1+k} \left(\sum_{m=1}^{2} |f_m|^{(l)}_{s-2,D_T^{(m)}} + I_k \right) \\ I_k = \sum_{i=1}^{2} |g_i|^{(2+l)}_{s,R_T},\ k = 1,3, \quad I_2 = |g_1|^{(2+l)}_{s,R_T} + |g_2|^{(1+l)}_{s-1,R_T}. \end{gathered} \tag{3.11}$$

Теперь в задачах (3.1)–(3.5) произведем замены

$$u_m^{(k)} = q_m v_m^{(k)} + \omega_m^{(k)} + q_m \rho_k,\ k = 1,3,\ u_m^{(2)} = v_m^{(2)} + \omega_m^{(2)} + q_m \rho_2, \tag{3.12}$$

где $v_m^{(k)}$ – новые неизвестные функции. В результате эти задачи преобразуются к следующим:

$$\frac{\partial v_m}{\partial t} - a_m^2 \frac{\partial^2 v_m}{\partial x^2} = 0 \text{ в } D_T^{(m)}, \quad m = 1,2, \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered} v_m^{(1)} + \rho_1 = 0, \quad m = 1,2, \\ \lambda_1 q_1 \frac{\partial v_1^{(1)}}{\partial x} - \lambda_2 q_2 \frac{\partial v_2^{(1)}}{\partial x} = \Phi_1(t) \text{ на } R_T\ (k = 1) \end{gathered} \tag{3.14}$$

$$\begin{gathered} v_1^{(2)} - v_2^{(2)} = (q_2 - q_1)\rho_2(t), \quad \lambda_1 \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial v_2^{(2)}}{\partial x} = 0, \\ \lambda_1 \frac{\partial v_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{d\rho_2}{dt} = \Phi_2(t) \text{ на } R_T\ (k = 2), \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$v_m^{(3)}+\rho_3=0,\quad m=1,2,$$
$$\lambda_1 q_1\frac{\partial v_1^{(3)}}{\partial x}-\lambda_2 q_2\frac{\partial v_2^{(3)}}{\partial x}+\frac{d\rho_3}{dt}=\Phi_3(t)\ \text{на}\ R_T\ (k=3) \tag{3.16}$$

где

$$\Phi_k=g_3-\lambda_1\frac{\partial\omega_1^{(k)}}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\omega_2^{(k)}}{\partial x}\bigg|_{R_T},\ k=1,3,\ \Phi_2=g_3-\lambda_1\frac{\partial\omega_1^{(2)}}{\partial x}\bigg|_{R_T},$$
$$|\Phi_k|_{s,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}\leqslant c_5\left(|\omega_1^{(k)}|_{s,D_T^{(1)}}^{(2+l)}+|2-k||\omega_2^{(k)}|_{s,D_T^{(2)}}^{(2+l)}+|g_3|_{s-1,S_T}^{(1+l)}\right). \tag{3.17}$$

Таким образом, нужно установить следующие неравенства для функций $v_m^{(k)}$, ρ_k, $k=1,2,3$:

$$\sum_{m=1}^{2}|v_m^{(1)}|_{s,D_T^{(m)}}^{(2+l)}+|\rho_1|_{s,\sigma_T}^{(1+l/2)}\leqslant c_6|\Phi_1|_{s,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}, \tag{3.18}$$

$$\sum_{m=1}^{2}|v_m^{(k)}|_{s,D_T^{(m)}}^{(2+l)}+|\rho_k|_{s,\sigma_T}^{(\frac{3+l}{2})}\leqslant c_7|\Phi_k|_{s,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},\ k=2,3, \tag{3.19}$$

из них (с учетом формул (3.12) и оценок (3.17), (3.11)) будут следовать требуемые оценки (3.7).

Найдем функции $v_m^{(k)}$, ρ_k в явном виде.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (3.6). *Тогда решения линейных задач Флорина, Маскета–Веригина и Стефана* (3.13)–(3.16) *имеют вид*

$$v_m^{(k)}(x,t)=\int_0^t\Phi_k(\tau)G_m^{(k)}(x,t-\tau)d\tau,\quad 1,2,3; \tag{3.20}$$

$$\rho_k(t)=-\int_0^t\Phi_k(\tau)G_m^{(k)}(0,t-\tau),\quad k=1,3;$$

$$\rho_2(t)=\int_0^t\Phi_2(\tau)G^{(2)}(0,t-\tau)d\tau), \tag{3.21}$$

где

$$G_m^{(1)}=\operatorname{sgn}q_m\frac{1}{\varkappa_1\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a_m^2t}\right); \tag{3.22}$$

$$G_m^{(2)} = (-1)^{1+m}\frac{a_m\varkappa_2}{\lambda_m}\int\limits_0^t \frac{|x|+a_m\varkappa_2 u}{2a_m\sqrt{\pi(t-u)^3}}\,\exp\left(-\frac{(|x|+a_m\varkappa_2 u)^2}{4a_m^2(t-u)}\right)du, \tag{3.23}$$

$$G^{(2)} = \int\limits_0^t \frac{\varkappa_2 u}{2\sqrt{\pi(t-u)^3}}\,\exp\left(-\frac{\varkappa_2^2 u^2}{4(t-u)}\right)du \equiv \frac{1}{q}(G_1^{(2)}(0,t)-G_2^{(2)}(0,t)),$$

$$G_m^{(3)} = -\int\limits_0^t \frac{|x|+a_m\varkappa_3 u}{2a_m\sqrt{\pi(t-u)^3}}\,\exp\left(-\frac{(|x|+a_m\varkappa_3 u)^2}{4a_m^2(t-u)}\right)du. \tag{3.24}$$

Доказательство. К задачам (3.13)–(3.16) применим преобразование Лапласа

$$\widetilde{F}(p) \equiv L[F] = \int\limits_0^\infty F(t)e^{-pt}\,dt$$

и в области изображений найдем функции $\widetilde{v}_m^{(k)}$, $\widetilde{\rho}_k$

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_m^{(1)}(x,p) = \operatorname{sgn} q_m\,\frac{1}{\varkappa_1\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_1(p)e^{-\sqrt{p}|x|/a_m},\\ \widetilde{\rho}_1(p) = -\operatorname{sgn} q_m\,\frac{1}{\varkappa_1\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_1(p),\ \ \varkappa_1 = \frac{\lambda_1}{a_1}|q_1| + \frac{\lambda_2}{a_2}|q_2|;\end{gathered} \tag{3.25}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_m^{(2)}(x,p) = (-1)^m\frac{\varkappa_2 a_m}{p+\varkappa_2\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_2(p)e^{-\sqrt{p}|x|/a_m},\\ \widetilde{\rho}_2(p) = \frac{1}{p+\varkappa_2\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_2(p),\ \ \varkappa_2 = q\left(\frac{a_1}{\lambda_1}+\frac{a_2}{\lambda_2}\right)^{-1},\ \ q = q_2 - q_1;\end{gathered} \tag{3.26}$$

$$\begin{gathered}\widetilde{v}_m^{(3)}(x,p) = -\frac{1}{p+\varkappa_3\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_3(p)e^{-\sqrt{p}|x|a_m},\\ \widetilde{\rho}_3(p) = \frac{1}{p+\varkappa_3\sqrt{p}}\,\widetilde{\Phi}_3(p),\ \ \varkappa_3 = \varkappa_1.\end{gathered} \tag{3.27}$$

Пользуясь формулами для обратных преобразований Лапласа [44, с. 200, форм. (4); с. 220, форм. (6)], сразу получим оригиналы функций (3.25)–(3.27) $L^{-1}[\widetilde{v}_m^{(k)}] = v_m^{(k)}$ и $L^{-1}[\widetilde{\rho}_k(p)] = \rho_k$ в виде (3.20), (3.21).

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что построенные функции (3.20), (3.21) удовлетворяют всем условиям задач (3.13)–(3.16) соответственно.

Для функций Грина (3.23), (3.24) имеют место следующие равенства:

$$D_t G_m^{(2)}(x,t) = -\frac{\varkappa_2 x}{2\lambda_m\sqrt{\pi t^3}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4a_m^2 t}\right) + (-1)^m \varkappa_2 a_m D_x G_m^{(2)},$$

$$D_t G_m^{(3)}(x,t) = (-1)^{m+1}\frac{x}{2a_m\sqrt{\pi t^3}}\,\exp\left(-\frac{x^2}{4a_m^2 t}\right) + \\ +(-1)^m \varkappa_3 a_m D_x G_m^{(3)}. \tag{3.28}$$

Их легко можно получить, произведя в интегралах (3.23), (3.24) замену переменной интегрирования $t-u=u_1$.

Лемма 3.2. *Функции Грина $G_m^{(k)}(x,t)$, $k=2,3$, $m=1,2$, линейных задач Маскета–Веригина и Стефана, определяемые формулами* (3.23), (3.24), *подчиняются оценкам*

$$|G_m^{(k)}(x,t)| \leqslant c_8(1+\sqrt{T}), \tag{3.29}$$

$$|D_t^r D_x^\beta G_m^{(k)}(x,t)| \leqslant c_9(T)(x^2+t^2)^{-\frac{r+\beta}{2}}\,\exp\left(-\delta_1^2\frac{x^2+t^2}{t}\right), \tag{3.30}$$

где коэффициент c_9 зависит от T экспоненциально.

Доказательство. Оценка (3.29) устанавливается сразу после замены переменной интегрирования $\frac{(-1)^m x+\varkappa_k a_m u}{2a_m\sqrt{t-u}}=z$. Для вывода неравенства (3.30) произведем в интегралах (3.23), (3.24) замену переменной интегрирования $t-u=u_1$. Теперь легко получаем

$$|D_t^r D_x^\beta G_m^{(k)}(x,t)| \leqslant c_{10}\int\limits_0^t u^{-\frac{2+r+\beta}{2}}\,\exp\left(-\delta_2^2\frac{x^2+t^2-2tu}{u}\right)du \leqslant$$

$$\leqslant c_{10}\exp\left(-\delta_2^2\frac{A^2+t^2}{2t}+2\delta_2^2 T\right)\int\limits_0^t \frac{A}{u^{3/2}}\,\frac{1}{Au^{\frac{r+\beta-1}{2}}}\,\exp\left(-\delta_2^2\frac{A^2}{2u}\right)du,$$

где $A^2=x^2+t^2$, откуда после применения неравенства

$$x^p e^{-\delta^2x^2} \leqslant c_p, \quad p\geqslant 0, \quad x>0$$

получим требуемую оценку.

Итак, для функций $v_m^{(k)}$, ρ_k найденных в виде (3.20), (3.21), установим оценки (3.18), (3.19).

Функция Грина $G_m^{(1)}$ (3.22) линейной задачи Флорина (3.13), (3.14) выражается через фундаментальное решение уравнения теплопроводности, поэтому на основании работ [33–36, 42, 43] оценка (3.18) для функций $v_m^{(1)}$ справедлива, причем при $0 < s \leqslant 2 + l$. Но тогда из первого условия сопряжения (3.14) будет следовать оценка (3.18) и для функции ρ_1 ($k = 1$).

Рассмотрим линейную задачу Маскета–Веригина ($k = 2$) (3.13), (3.15). Покажем, что для вывода неравенства (3.19) при $k = 2$ достаточно установить оценку

$$|\rho_2|_{s+1,\sigma_T}^{(\frac{3+l}{2})} \leqslant c_{11}|\Phi_2|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}. \tag{3.31}$$

Действительно, из третьего условия сопряжения (3.15) автоматически будет следовать оценка для производной $D_x v_1^{(2)}\big|_{R_T}$

$$|D_x v_1^{(2)}||_{x=0}|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leqslant c_{12}|\Phi_2|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}. \tag{3.32}$$

В силу второго условия сопряжения (3.15) оценке (3.32) будет подчиняться и производная $D_x v_2^{(2)}\big|_{R_T}$, но тогда функции $v_m^{(2)}(x,t)$ $m = 1, 2$, как решения уравнений теплопроводности (3.13), будут принадлежать пространству $\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}_s^{2+l}(D_T^{(m)})$ и удовлетворять неравенству

$$|v_m^{(2)}|_{s,D_T^{(m)}}^{(2+l)} \leqslant c_{13}|D_x v_m^{(2)}|_{x=0}|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leqslant c_{14}|\Phi_2|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})}.$$

Таким образом, при выполнении (3.31) оценка (3.19) при $k = 2$ будет иметь место.

Обратимся к линейной задаче Стефана ($k = 3$) (3.13), (3.16). Пусть для ее решения справедлива оценка

$$|\rho_3|_{s+l,\sigma_T}^{(\frac{3+l}{2})} + |D_x v_m^{(3)}|_{x=0}|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})} \leqslant c_{15}|\Phi_3|^{(\frac{1}{+}l}2)_{s-1,\sigma_T}, \tag{3.33}$$

тогда в силу предыдущих рассуждений будет справедлива оценка (3.19) и при $k = 3$.

Итак, для доказательства оценок (3.18), (3.19) установим неравенства (3.31), (3.32). Для этого, принимая во внимание Лемму 1.1 об эквивалентности норм, оценим модули $|\rho_k|$, $k = 2, 3$, и

$|D_x v_m^{(3)}|_{x=0}|$ и получим неравенства

$$[(D_t^{\nu-1}\Phi_k * D_t G_m^{(k)})|_{x=0}]_{s+1-2\nu,\sigma_t}^{(\frac{3+l-2\nu}{2})} \leqslant c_{16}|\Phi_k|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})},$$
$$1+l < 2\nu < 3+l; \quad k = 2,3;$$

$$[(D_t^{\nu}\Phi_3 * D_x G_m^{(3)})|_{x=0}]_{s-1-2\nu,\sigma_t}^{(\frac{1+l-2\nu}{2})} \leqslant c_{17}|\Phi_3|_{s-1,\sigma_T}^{(\frac{1+l}{2})},$$
$$l-1 < 2\nu < 1+l,$$

где

$$[F]_{b,\sigma_T}^{(\frac{a}{b})} = \sup_{t<T} t^{\frac{a-b}{2}}[F]_{\sigma_t'}^{(\frac{a}{b})}, \ a \in (0,1), \ a > b, \ \sigma' = \left(\frac{t}{2}, t\right).$$

Для завершения доказательства Теоремы 2.1 оценим свертки (3.21). Введем обозначения $\alpha = l - [l]$, $r = s - [l]$, $\gamma = \frac{1}{2}(2+\alpha-r)$. Очевидно при $l < s \leqslant 2+l$ будем иметь соотношения $\alpha < r \leqslant 2+\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Пусть $\varphi(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}_{r-2}^{\frac{\alpha}{2}}(\sigma_T)$, $\psi(t) \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}_{r-1}^{\frac{1+\alpha}{2}}(\sigma_T)$.

Лемма 3.3. *Пусть $l < s \leqslant 2+l$. Справедливы оценки*

$$[(\psi * D_t G_m^{(k)})|_{x=0}]_{r-1,\sigma_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c_{18}|\psi|_{r-1,\sigma_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \tag{3.34}$$

$$[(\varphi * D_t G_m^{(k)})|_{x=0}]_{r-2,\sigma_t}^{(\frac{\alpha}{2})} \leqslant c_{19}|\varphi|_{r-2,\sigma_t}^{(\frac{\alpha}{2})}, \tag{3.35}$$

$$[(\psi * D_x G_m^{(3)})|_{x=0}]_{r-1,\sigma_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})} \leqslant c_{20}|\psi|_{r-1,\sigma_t}^{(\frac{1+\alpha}{2})}, \tag{3.36}$$

$$[(\varphi * D_x G_m^{(3)})|_{x=0}]_{r-2,\sigma_t}^{(\frac{\alpha}{2})} \leqslant c_{21}|\varphi|_{r-2,\sigma_t}^{(\frac{\alpha}{2})}, \tag{3.37}$$

$$|(\Phi_k * G_m^{(k)})|_{x=0}|_{\sigma_t} \leqslant c_{22} t^{\frac{1+s}{2}}|\Phi_k|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})}, \ k=2,3, \tag{3.38}$$

$$|(\Phi_3 * D_x G_m^{(3)})|_{x=0}|_{\sigma_t} \leqslant c_{23} t^{\frac{s-1}{2}}|\Phi_3|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})}. \tag{3.39}$$

Доказательство. Для вывода оценок (3.34), (3.35) рассмотрим потенциал $p_1(t) = (\eta * D_t G_m^{(k)}|_{x=0})$, $\eta \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}{}_{r-2+\nu}^{\frac{\alpha+\nu}{2}}(\sigma_T)$, $\nu = 0,1$. Представим его в виде

$$p_1(t) = \int_0^t (\eta(\tau) - \eta(t)) D_t G_m^{(k)}(0, t-\tau)d\tau + \eta(t)\int_0^t D_r G_m^{(k)}(0,\tau)d\tau.$$

Положив, для определенности, $t_1 < t$, сформируем разность

$$\Delta_1 = t^\gamma (p_1(t) - p_1(t_1)) = t^\gamma \Bigg(\int\limits_{t_1}^{t} (\eta(\tau) - \eta(t)) D_t G_m^{(k)}(0, t-\tau) d\tau +$$
$$+ \int\limits^{t_1} (\eta(\tau) - \eta(t_1)) d\tau \int\limits_{t_1}^{t} D_{t_2}^2 G_m^{(k)}(0, t_2 - \tau) dt_2 +$$
$$+ (\eta(t) - \eta(t_1)) G_m^{(k)}(0, t - t_1) + \eta(t_1) \int\limits_{t_1}^{t} D_r G_m^{(k)}(0, \tau) d\tau \Bigg)$$

и оценим ее, пользуясь оценками (3.29), (3.30) функции Грина. Имеем

$$|\Delta_1| \leqslant c_{24} M t^\gamma \int\limits_{t_1}^{t} (t-\tau)^{\frac{\alpha+\nu}{2}-1} \tau^{-\gamma} d\tau +$$
$$+ c_{25} M t^\gamma \int\limits_{t_1}^{t} dt_2 \int\limits_{0}^{t_1} (t_1 - \tau)^{\frac{\alpha+\nu}{2}} \tau^{-\gamma} (t_2 - \tau)^{-2} d\tau + c_{26} M (t - t_1)^{\frac{\alpha+\nu}{2}} +$$
$$+ c_{27} M_1 t^\gamma t^{\frac{r-2+\nu}{2}} \int\limits_{t_1}^{t} \tau^{-1+\frac{\alpha+\nu}{2}} \tau^{-\frac{\alpha+\nu}{2}} d\tau,$$

где $M = [\eta]_{r-2+\nu,\sigma_t}^{(\frac{\alpha+\nu}{2})}$, $M_1 = [\eta]_{r-2+\nu,\sigma_t}^{(\frac{\alpha+\nu}{2})}$.

Во втором интеграле, умножив числитель и знаменатель на t_2, представим t_2 в числителе в виде $t_2 = t_2 - \tau + \tau$ и примем во внимание, что $t/2 \leqslant t_1 \leqslant t$. Будем иметь

$$|\Delta_1| \leqslant c_{28} M_1 (t - t_1)^{\frac{\alpha+\nu}{2}} + c_{29} M t^{\gamma - 1} \times$$
$$\times \left(\int\limits_{0}^{t_1} \tau^{-\gamma} d\tau \int\limits_{t_1}^{t} (t_2 - t_1)^{-1+\frac{\alpha+\nu}{2}} dt_2 + t^{\frac{r-\alpha}{2}} \int\limits_{t_1}^{t} dt_2 \int\limits_{0}^{t_1} (t_2 - \tau)^{-2+\frac{\alpha+\nu}{2}} d\tau \right) \leqslant$$
$$\leqslant c_{30} M_1 (t - t_1)^{\frac{\alpha+\nu}{2}}, \ \nu = 0, 1.$$

Отсюда при $\nu = 1$ следует оценка (3.34), при $\nu = 0$ – (3.35). Оценки (3.36) и (3.37) вытекают из оценок (3.34) и (3.35) в силу равенства (3.28). Действительно, сформируем следующее выражение, состоящее из сверток функции η с ядрами из (3.28):

$$(\eta * D_t G_m^{(3)}(x,t) = (-1)^m \int\limits_0^t \eta(\tau) \frac{x}{2a_m\sqrt{\pi(t-\tau)^3}} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{4a_m^2(t-\tau)}\right) d\tau + (-1)^m \varkappa_3 a_m (\eta * D_x G_m^{(3)})(x,t).$$

Устремив x к нулю, будем иметь равенство

$$(\eta * D_t G_m^{(3)})(0,t) + \eta(t) = (-1)^m \varkappa_3 a_m (\eta * D_x G_m^{(3)})(0,t), \qquad (3.41)$$

из которого с учетом (3.34) и (3.35) сразу получим требуемые оценки (3.36), (3.37).

Установим неравенство (3.38) для потенциала $p_2(t) = (\Phi_k * G_m^{(k)})(0,t)$. Привлекая оценку функции Грина (3.29), получаем

$$|p_2(t)| \leqslant c_{31} |\Phi_k|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})} \int\limits_0^t \tau^{\frac{s-1}{2}} d\tau \leqslant c_{22} t^{\frac{1+s}{2}} |\Phi_k|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})}.$$

Для вывода оценки (3.39) представим рассматриваемый потенциал $p_3(t) = (\Phi_3 * G_m^{(3)})(0,t)$ в виде

$$p_3(t) = \int\limits_0^t [\Phi_3(\tau) - \Phi_3(t)] D_x G_m^{(3)}(0,t-\tau) d\tau +$$

$$+ \Phi_3(t) \int\limits_0^t D_x G_m^{(3)}(0,t-\tau) d\tau \equiv J_1 + J_2.$$

Оценим интеграл J_1. В случае $l < 1$ имеем

$$|J_1| \leqslant c_{32} M_2 \int\limits_0^t (t-\tau)^{\frac{1+l}{2}-1} \tau^{-\frac{2+l-s}{2}} d\tau =$$

$$= c_{32} M_2 t^{\frac{s-1}{2}} B\left(\frac{1+l}{2}, \frac{s-l}{2}\right) (l < s \leqslant 2+l),$$

где $B(\cdot,\cdot)$ – бета-функция Эйлера, $M_2 = |\Phi_3|_{s-1,\sigma_t}^{(\frac{1+l}{2})}$.

Если $l > 1$, а значит и $s > 1$, то получим

$$|J_1| \leqslant c_{33} \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1} d\tau \int\limits_\tau^t |\Phi'(\tau_1)| d\tau_1 \leqslant$$

$$\leqslant c_{34} M_2 \int\limits_0^t (t-\tau)^{-1} d\tau \int\limits_\tau^t \tau_1^{-1+\frac{s-1}{2}} d\tau_1 \leqslant c_{35} M_2 \int\limits_0^t \tau^{\frac{s-3}{2}} d\tau \leqslant c_{36} M_2 t^{\frac{s-1}{2}}.$$

В J_2 заменим свертку $(1 * D_x G_m^{(3)})(0,t)$ по формуле (3.41) и применим оценку (3.29) функции $G_m^{(3)}$, это даст

$$|J_2| \leqslant c_{37} M_2 t^{\frac{s-1}{2}}.$$

Таким образом, неравенство (3.39) установлено.

Теорема 2.1 доказана полностью.

Литература

1. Л. И. Рубинштейн, *Проблема Стефана.* Рига, Звайгзне, 1967.
2. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа.* М, Мир, 1968.
3. И. И. Данилюк, *Задача Стефана.* — Успехи Мат. Наук **40, No. 5** (1985), 133–185.
4. И. И. Данилюк, *О процессе кристаллизации при образовании гарнисажа.* — Мат. Физика **17** (1975), 99–111.
5. W. T. Kyner, *An existence and uniqueness theorem for a nonlinear Stefan problem.* — J. Math. Mech. **8,** No. **4** (1959), 483–498.
6. B. Sherman, *Free boundary problems for the heat equation in which the moving interface coincides initially with the fixed face.* — J. Math. Anal. Appl. **33,** No. **2** (1971), 449–465.
7. В. В. Пухначев, *О задаче Стефана, возникающей в одной модели электрического взрыва проводников.* — Тр. семинара С. Л. Соболева No. 2 (1976), 69–82.
8. A. Fasano, M. Primicerio, *General free boundary problems for the heat equation I, II, III.* — J. Math. Anal. Appl. **57** (1977), 694–723; **58** (1977), 202–231; **59** (1977), 1–14.
9. А. М. Мейрманов, *Задача Стефана.* Новосибирск, Наука, 1986.
10. Б. В. Базалий, В. Ю. Шелепов, *Об асимптотическом поведении решения одной задачи Стефана.* — ДАН УССР. Сер. А No. 12 (1978), 1059–1061.

11. Б. В. Базалий, В. Ю. Шелепов, *Оценки скорости стабилизации решения задачи Стефана.* — ДАН УССР. Сер. А No. 4 (1981), 4–6.
12. С. В. Салей, *О скорости сходимости свободной границы к предельному значению в одной задаче Стефана.* — ДАН УССР. Сер. А No. 6 (1981), 19–23.
13. Е. И. Ким, Г. И. Бижанова, *Исследования второй граничной задачи Стефана при малых значениях времени.* — Вестн. АН КазССР No. 6 (1981), 76–86.
14. Е. И. Ким, Г. И. Бижанова, *Об одном классе интегродифференциальных уравнений.* — Вестн. АН КазССР No. 5 (1982), 38–48.
15. В. А. Флорин, *Уплотнение земляной среды и фильтрация при переменной пористости с учетом влияния связанной воды.* — Изв. АН СССР. ОТН No. 1 (1951), 1635–1649.
16. Т. Д. Вентцель, *Об одной задаче со свободной границей для уравнения теплопроводности.* — ДАН СССР **131, No. 5** (1960), 1000–1003.
17. Нгуен Дин Чи, *Об одной задаче со свободной границей для параболического уравнени.* — Вестн. Моск. ун-та. Сер.I. Математика, механика No. 2 ((1966)), 40–54; No. 5 (1966), 51–62.
18. D. M. Syons, R. H. Martin, *A moving boundary problem modelling diffusion with nonlinear absorption.* — J. Differ. Equat. **51,** No. **2** (1984), 267–294.
19. И. В. Бочарова, *Об асимптотике решений одной задачи со свободной границей для уравнения теплопроводности.* — ДАН СССР **143, No. 2** (1962), 259–261.
20. Н. Н. Веригин, *Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений.* — Изв. АН СССР. ОТН No. 5 (1952), 674–687.
21. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики.* М, Наука, 1972.
22. M. Muskat, Русский перевод: М., Л., ГНТИ НГТЛ, 1949, *The flow of homogeneous fluids throwgh porous media.* Michigan, 1946.
23. Л. И. Рубинштейн, *О решении задачи Н. Н. Веригина.* — ДАН СССР **113, No. 1** (1957), 50–53.
24. Л. И. Камынин, *О существовании решения задачи Веригина.* — Журн. выч. мат. и мат. физики **2, No. 5** (1962), 833–858.
25. Л. И. Камынин, *О линейной задаче Веригина.* — ДАН СССР **150, No. 6** (1963), 1210–1213.
26. W. Fulks, R. B. Guenther, *A free boundary problem and an extention of Musket's model.* — Acta Math. **122,** No. **3/4** (1969), 273–300.
27. А. Бегматов, *Об асимптотических решениях некоторых плоских задач фильтрации и диффузии со свободной границей.* — Краевые задачи для дифференциальных уравнений (1973), 135–144.

28. L. S. Evans, *A free boundary problem: the flow of two immiscible fluids in a one dimensional porous medium I, II.* — Indiana Univ. Math. J. **26**, No. **5** (1977), 915–932; **27**, No. 1 (1978), 93–111.

29. L. S. Evans, A. Friedman, *Regularity and asymptotic behavior of two immiscible fluids in a one-dimensional porous medium.* — J. Differ. Equat. **31**, No. **3** (1979), 366–391.

30. Irena Pavlov, *О задаче со свободной границей раздела для параболических уравнений.* — Contr. and cybern. **7**, No. **4** (1978), 19–37.

31. А. М. Мейрманов, *О разрешимости задачи Веригина в точной постановке.* — ДАН СССР **253**, **No. 3** (1980), 588–591.

32. L. Jin, *The one-dimensional Verigin problem.* — J. Part. Differ. Equat. **4** No. **2** (1991), 74–96.

33. В. С. Белоносов, Т. И. Зеленяк, *Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений.* Новосибирск, 1975.

34. В. С. Белоносов, *Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения.* — Мат. сб. **110**, **No. 2** (1979), 163–188.

35. В. А. Солонников, *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально-краевой задачи.* — Препринт ЛОМИ, P–2–77 (1977), 3–20.

36. В. А. Солонников, А. Г. Хачатрян, *Оценки решений параболических начально-краевых задач в гельдеровских нормах.* — Тр. МИАН СССР **147** (1980), 147–155.

37. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гельдеровском пространстве функций.* — Алгебра и Анализ **5**, **No. 1** (1993), 99–134.

38. Е. В. Доманова, *Оценки решений параболических систем в весовых гельдеровских классах при отсутствии условий согласования.* — Теоремы вложения и их приложения к задачам мат. физики (1989), 70–85.

39. Г. И. Бижанова, *Решение в весовом пространстве Гельдера начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в условии сопряжения.* — Алгебра и Анализ **6**, **No. 1** (1994), 62–92.

40. Г. И. Бижанова, *Исследование разрешимости в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка (задачи Коши–Стефана и Коши–Флорина).* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **213** (1994), 14–47.

41. Г. И. Бижанова, *Решение в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области.* — Алгебра и Анализ **7, No. 2** (1995), 46–76.
42. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, В. А. Солонников, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М, Наука, 1967.
43. Г. И. Бижанова, *Оценки решения n-мерной задачи сопряжения для уравнения теплопроводности в весовых гельдеровских нормах, I, II.* — Изв. АН РК. Сер. физ.-мат. No. 5 (1992), 7–13; No. 1 (1993), 11–17.
44. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований.* М, Наука, 1969.

Bizhanova G. I. On the classical solvability of one-dimensional free boundary Florin, Muskat–Verigin and Stefan problems.

Three one-dimensional free boundary problems (Florin, Muskat–Verigin and Stefan) for the second order parabolic equations are studied. The theorems of existence and uniqueness for the solutions in Holder spaces for small time are proved, the coercive estimates for the solutions are obtained.

Институт теоретической и прикладной математики Национальной Академии наук Республики Казахстан, г.Алма-Ата

Поступило 2 октября 1996 г.