И. В. Денисова

ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ДВУХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ, РАЗДЕЛЕННЫХ ЗАМКНУТОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Посвящается памяти
Анатолия Петровича Осколкова

Введение

В данной работе мы рассмотрим задачу о совместной эволюции двух вязких капиллярных сжимаемых жидкостей и докажем ее локальную (по времени) однозначную разрешимость в пространствах Соболева–Слободецкого. Для анализа этой проблемы мы используем схему, разработанную В. А. Солонниковым для изучения одной несжимаемой жидкости ограниченного объема [1, 2] и адаптированную этим автором совместно с А. Тани [3] на случай сжимаемой жидкости. Ключевыми моментами этой схемы можно назвать следующие. Это переход от начально-краевой задачи для системы Навье–Стокса с краевыми условиями на эволюционирующей (свободной) поверхности к задаче со стационарной границей путем замены эйлеровых координат на лагранжевые. Это доказательство существования локального (по времени) единственного решения полученной задачи с нелинейными коэффициентами методом последовательных приближений на основе однозначной разрешимости линейных краевых задач с замкнутой границей. Наконец, это построение в двойственном пространстве Фурье–Лапласа явного решения для задачи с бесконечной плоской граничной поверхностью как базы доказательства разрешимости упомянутых задач с замкнутой границей раздела жидкостей.

Задача о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей изучалась в соболевских пространствах в работах [4–6], где была получена ее локальная однозначная разрешимость.

Проведем некоторые аналогии со случаем несжимаемых жидкостей. Если сравнить анализ сжимаемой и несжимаемой жидкостей, то, в некотором смысле, исследование эволюции сжимаемой жидкости проще, чем несжимаемой. Дело в том, что если считать давление жидкости известной функцией плотности и перейти к лагранжевым координатам, то удается исключить одну из неизвестных, а именно плотность жидкости, из системы уравнений. Получившаяся начально-краевая задача после линеаризации включает в себя параболическую по Петровскому систему относительно скорости жидкости, исследование которой значительно проще, чем системы Стокса. Конечно, при учете поверхностного натяжения остаются некоэрцитивные краевые условия даже в линейной задаче, но операторы их составляющие уже исследованы в случае несжимаемой жидкости. Таким образом, можно заключить, что отсутствие давления как неизвестной функции сильно упрощает анализ.

Изучение движения двух сжимаемых жидкостей, разделенных замкнутой поверхностью, или, другими словами, движения пузырька в сжимаемой жидкой среде по сравнению с анализом эволюции того же пузырька в вакууме осложняется громоздкостью упомянутого выше явного решения модельной задачи в переменных Фурье–Лапласа и трудностью доказательства отделенности от нуля знаменателя этого решения. В процессе оценки полинома-знаменателя возникают ограничения на вязкости жидкостей, не наблюдавшиеся ни в случае одной сжимаемой жидкости, ни в случае двух несжимаемых жидкостей. Иначе говоря, мы можем гарантировать стабильное совместное существование только двух сжимаемых жидкостей с близкими характеристиками, а именно: их основные динамические вязкости могут отличаться друг от друга не более, чем в два раза. Что же касается дополнительных вязкостей, то они не должны превосходить основные. Эти ограничения являются вполне физичными: превышение вторых коэффициентов вязкости над первыми наблюдается довольно редко, например, когда происходит резкое изменение давления жидкости. Однако надо сказать, что упомянутые ограничения не являются необходимыми.

В заключение этого краткого введения отметим, что подобную двухфазовую задачу без учета поверхностного натяжения изучал А. Тани в [7].

Настоящая работа была частично выполнена во время пребывания автора в Университете Тулона и Вара во Франции. Автор благодарит профессора Пенеля из этого университета за полезные дискуссии и внимание к его работе, а также выражает признательность Комитету по задачам со свободными границами при Европейском научном фонде за финансовую поддержку.

§1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

Сформулируем задачу о неустановившемся движении двух сжимаемых баротропных жидкостей, разделенных замкнутой свободной поверхностью в полной постановке.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в ограниченной области Ω_0^+ находится жидкость с динамическими вязкостями $\mu^+ > 0$, $\lambda^+ \equiv \beta^+\mu^+$, а во "внешней" области $\Omega_0^- \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega_0^+}$ находится жидкость с динамическими вязкостями $\mu^- > 0$, $\lambda^- \equiv \beta^-\mu^-$. При $t > 0$ нужно найти свободную поверхность раздела жидкостей $\Gamma_t = \partial\Omega_t^+$, а также их плотность $\rho(x,t) > 0$ и поле скоростей $\mathbf{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, удовлетворяющие начально-краевой задаче для системы Навье–Стокса

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\rho + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v}) = 0,\\
\rho(\mathcal{D}_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}) - \nabla\mathbb{T} = \rho\mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega_t^- \cup \Omega_t^+,\ t > 0,\\
\rho|_{t=0} = \rho_0(x), \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{в} \quad \Omega_0^- \cup \Omega_0^+,\\
[\mathbf{v}]\big|_{\Gamma_t} \equiv \lim_{\substack{x\in\Omega_t^+\\ x\to x_0\in\Gamma_t}} \mathbf{v}(x) - \lim_{\substack{x\in\Omega_t^-\\ x\to x_0\in\Gamma_t}} \mathbf{v}(x) = 0, \quad \mathbf{v} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,\\
[\mathbb{T}\mathbf{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H\mathbf{n} - p_e\mathbf{n} \quad \text{на} \quad \Gamma_t,
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$, тензор напряжений $\mathbb{T} = (-p(\rho) + \lambda^\pm\nabla\cdot\mathbf{v})\mathbb{I} + \mu^\pm\mathbb{S}(\mathbf{v})$, $(\mathbb{S}(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, $\mathbb{I}$ – единичная матрица; $\mu^\pm$, $\lambda^\pm$ – ступенчатые функции динамических вязкостей, равные μ^+, λ^+ в Ω_t^+ и μ^-, λ^- в Ω_t^-, соответственно; $p(\rho)$ – давление жидкостей, заданное известной гладкой функцией плотности; $\mathbf{f}$ – заданное поле внешних сил, $p_e = p_e(x,t)$ – внешнее давление, заданное при $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$; ρ_0 и $\mathbf{v}_0$ – начальные значения плотности и скорости жидкостей, $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к Ω_t^+, $\sigma \geqslant 0$ – коэффициент поверхностного натяжения; $H(x,t)$ – удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t, причем $H < 0$ в точках выпуклости Γ_t в сторону Ω_t^-. Запись $\nabla\mathbb{T}$ обозначает вектор с компонентами $(\nabla\mathbb{T})_j = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_i}$, $j = 1,2,3$. Здесь и далее по повторяющимся индексам мы будем подразумевать суммирование. Мы предполагаем, что введены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$. Точкой обозначено декартово скалярное произведение.

Замыкает систему (1.1) кинематическое условие на границу Γ_t. Оно заключается в том, что в момент времени $t > 0$ поверхность раздела жидкостей состоит из точек $x(\xi,t)$, соответствующий радиус-вектор которых является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t\mathbf{x} = \mathbf{v}(x(\xi,t),t), \quad \mathbf{x}(\xi,0) = \boldsymbol{\xi}, \quad \xi \in \Gamma. \tag{1.2}$$

Здесь $\Gamma \equiv \Gamma_0 = \partial\Omega_0^+$ – заданная поверхность. Таким образом, $\Gamma_t = \{x(\xi,t)|\xi \in \Gamma_0\}$, а $\Omega_t^\pm = \{x(\xi,t)|\xi \in \Omega_0^\pm\}$.

Следуя [3], проведем преобразования, которые позволят нам изучать вместо (1.1), (1.2) задачу с постоянной границей раздела жидкостей.

Перейдем от эйлеровских координат $\{x\}$ к лагранжевым $\{\xi\}$ по формуле

$$\mathbf{x}(\xi,t) = \boldsymbol{\xi} + \int_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)d\tau \equiv \mathbf{X}_\mathbf{u}(\xi,t), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}(\xi,t)$ – поле скоростей в лагранжевых координатах. Якобиан этого преобразования $J_\mathbf{u}(\xi,t) = \det\{a_{ij}\}_{ij=1}^3$,

$$a_{ij}(\xi,t) = \delta_j^i + \int_0^t \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j}\,d\tau,$$

является решением задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{\partial J_\mathbf{u}(\xi,t)}{\partial t} \equiv \frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\,A_{ij} = A_{ij}\,\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} \equiv \mathbb{A}\nabla\cdot\mathbf{u}\\ J_\mathbf{u}(\xi,0) = 1.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь δ_j^i – символы Кронекера, а через A_{ij} обозначены алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы Якоби (1.3); $\mathbb{A} \equiv \{A_{ij}\}_{i,j=1}^3$.

Далее, поскольку $A_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} = A_{ij}a_{kj}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\big|_{x=X_\mathbf{u}} = J_\mathbf{u}(\xi,t)(\nabla\cdot\mathbf{v}|_{x=X_\mathbf{u}})$, то из (1.4) следует, что

$$J_\mathbf{u}(\xi,t) = e^{\int_0^t \nabla\cdot\mathbf{v}|_{x=X_\mathbf{u}}d\tau} \equiv e^{\int_0^t \nabla_\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}d\tau}, \tag{1.5}$$

где $\nabla_{\mathbf{u}} \equiv \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right\}_{k=1}^{3} = J_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbb{A} \nabla$.

Для функций плотности $\widehat{\rho}$ и скорости $\mathbf{u}$ в лагранжевых координатах мы получаем задачу

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \widehat{\rho} + \widehat{\rho} \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} = 0, \\
\widehat{\rho} \mathcal{D}_t \mathbf{u} - \nabla_{\mathbf{u}} \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \widehat{\rho} \widehat{\mathbf{f}} \quad \text{на} \quad \Omega^{\pm} \equiv \Omega_0^{\pm},\, t > 0, \\
\widehat{\rho}|_{t=0} = \rho_0, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \quad \text{на} \quad \Omega^- \cup \Omega^+, \\
[\mathbf{u}]\big|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{u} \underset{|\xi| \to \infty}{\longrightarrow} 0, \\
[\mathbb{T}_{\mathbf{u}} \mathbf{n}]\big|_{\Gamma} = \sigma H \mathbf{n} - \widehat{p}_e \mathbf{n}\big|_{\Gamma},
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

в которой мы используем следующие обозначения: $\widehat{\rho}(\xi, t) = \rho(X_{\mathbf{u}}, t)$, $\widehat{\mathbf{f}}(\xi, t) = \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}}, t)$, $\widehat{p}_e(\xi, t) = p_e(X_{\mathbf{u}}, t)$,

$$
\begin{gathered}
\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}) = (-p(\widehat{\rho}) + \lambda^{\pm} \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w}) \mathbb{I} + \mu^{\pm} \mathbb{S}(\mathbf{w}), \\
(\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}))_{ij} = J_{\mathbf{u}}^{-1} \left(A_{jk} \frac{\partial w_i}{\partial \xi_k} + A_{ik} \frac{\partial w_j}{\xi_k} \right).
\end{gathered}
$$

Внешние нормали $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{n}$ к Γ и Γ_t соответственно связаны соотношением

$$
\mathbf{n} = \frac{J_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbb{A} \mathbf{n}_0}{|J_{\mathbf{u}}^{-1} \mathbb{A} \mathbf{n}_0|}.
$$

Из первого уравнения в (1.6) согласно формуле Коши с учетом (1.5) выводим:

$$
\widehat{\rho}(\xi, t) = \rho_0(\xi) e^{-\int_0^t \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u} d\tau} = \rho_0(\xi) J_{\mathbf{u}}^{-1}(\xi, t).
$$

Подставив это выражение во второе уравнение в системе (1.6), мы получим начально-краевую задачу относительно одной неизвестной функции – скорости $\mathbf{u}$.

Воспользуемся известной формулой для удвоенной средней кривизны поверхности:

$$
H \mathbf{n} = \Delta(t) \mathbf{x} = \Delta(t) \mathbf{X}_{\mathbf{u}},
$$

где $\Delta(t)$ – оператор Бельтрами–Лапласа на Γ_t. Спроектируем затем последнее краевое условие в (1.6) на касательную плоскость сначала к Γ_t, а затем – к Γ. В результате, мы придем к задаче, эквивалентной (1.6) при $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0>0$:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{u}-\rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})=\mathbf{f}-\rho_0^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla p(\rho_0J_{\mathbf{u}}^{-1})\text{ на }\Omega^{\pm},\ t>0\\
\mathbf{u}\big|_{t=0}=\mathbf{v}_0,\quad \mathbf{u}\underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow}0,\\
[\mathbf{u}]\big|_{\Gamma}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{n}]\big|_{\Gamma}=0,\\
[\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\big|_{\Gamma}-\sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(t)\mathbf{X}_{\mathbf{u}}\big|_{\Gamma}=\\
=(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n})\{[p(\rho_0J_{\mathbf{u}}^{-1})]\big|_{\Gamma}-p_e(X_{\mathbf{u}},t)\big|_{\Gamma}\},
\end{gathered}
\tag{1.7}
$$

где $\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})=\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})+p(\widehat{\rho})\mathbb{I}$, $\Pi_0\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}-(\mathbf{n}_0\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}_0$, $\Pi\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\omega}-(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})\mathbf{n}$.

Разрешимость задачи (1.7) доказывается путем ее линеаризации и применения метода последовательных приближений. Роль этих приближений играют системы вида:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w}-\rho^{-1}(\xi)\mathbb{A}\nabla\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})=\mathbf{f}\quad\text{в}\quad Q_T^{\pm}=\Omega^{\pm}\times(0,T),\\
\mathbf{w}\big|_{t=0}=\mathbf{w}_0\quad\text{в}\quad\Omega^-\cup\Omega^+,\quad \mathbf{w}\underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow}0,
\end{gathered}
\tag{1.8}
$$

$$
[\mathbf{w}]\big|_{G_T}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]\big|_{G_T}=\Pi_0\mathbf{a},\quad (G_T\equiv\Gamma\times(0,T)),
$$

$$
[\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]\big|_{\Gamma}-\sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(t)\int\limits_0^t\mathbf{w}\,d\tau\big|_{\Gamma}=b+\sigma\int\limits_0^t B\,d\tau,\ \ t\in(0,T).
$$

Если в системе (1.8) положить $\mathbf{u}=0$, то она перейдет в следующую задачу:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t\mathbf{w}-\rho_0^{-1}(\xi)\nabla\mathbb{T}'(\mathbf{w})=\mathbf{f}\quad\text{в}\quad Q_T^-\cup Q_T^+,\\
\mathbf{w}\big|_{t=0}=\mathbf{w}_0\quad\text{в}\quad\Omega^-\cup\Omega^+,\quad \mathbf{w}\underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow}0,\\
[\mathbf{w}]\big|_{G_T}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w})\mathbf{n}_0]\big|_{G_T}=\Pi_0\mathbf{a},
\end{gathered}
\tag{1.9}
$$

$$
[\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}'(\mathbf{w})\mathbf{n}_0]\big|_{\Gamma}-\sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(0)\int\limits_0^t\mathbf{w}\,d\tau\big|_{\Gamma}=b+\sigma\int\limits_0^t B\,d\tau,\ \ t\in(0,T),
$$

$$
(\mathbb{T}'(\mathbf{w})=(\lambda^{\pm}\nabla\cdot\mathbf{w})\mathbb{I}+\mu^{\pm}\mathbb{S}(\mathbf{w})).
$$

Задачи (1.7)–(1.9) мы будем изучать в пространствах Соболева–Слободецкого, как в весовых так и в обычных. Напомним определение обычных соболевских пространств.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Соболевскую производную от функции u обозначим через $\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u = \frac{\partial^{|\boldsymbol{\alpha}|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$ (здесь мультииндекс $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ порядка $|\boldsymbol{\alpha}| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ имеет целые неотрицательные компоненты α_i, $i = 1, \ldots, n$).

Для $l > 0$ определим пространство Соболева–Слободецкого $W_2^l(\Omega)$ как пространство функций u с конечной нормой

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)} = \left(\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|<l} \|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_\Omega^2 + \|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

где $\|\cdot\|_\Omega$ – норма в $L_2(\Omega)$, а

$$\|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2 = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=l} \|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u\|_\Omega^l \quad \text{для} \quad l \in \mathbb{N}$$

и

$$\|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2 = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=[l]} \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega \frac{|\mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(x) - \mathcal{D}^{\boldsymbol{\alpha}} u(y)|^2}{|x-y|^{n+2(l-[l])}} \, dxdy$$

для нецелого l; через $[l]$ здесь обозначена целая часть l.

Анизотропное пространство $W_2^{l,l/2}(Q_T)$ состоит из функций, определенных в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $0 < T \leqslant \infty$, и имеющих конечную норму

$$\|u\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T)} = \left(\int\limits_0^T \|u\|_{W_2^l(\Omega)}^2 dt + \int\limits_\Omega \|u\|_{W_2^{l/2}(0,T)}^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пространства Соболева–Слободецкого с экспоненциальным весом были введены М. С. Агроновичем и М. И. Вишиком в [8], их свойства также изучал В. А. Солонников в [1].

Пусть $\gamma \geqslant 0$. Весовое пространство $H_\gamma^{l,l/2}(Q_T)$ – это пространство функций, допускающих нулевое продолжение в область $t < 0$ без потери гладкости. Это пространство снабжено нормой

$$\|u\|_{H_\gamma^{l,l/2}(Q_T)} = \left(\|u\|_{H_\gamma^{l,0}(Q_T)}^2 + \|u\|_{H_\gamma^{0,l/2}(Q_T)}^2 \right)^{1/2}.$$

Здесь

$$\|u\|^2_{H^{l,0}_\gamma(Q_T)} = \int\limits_0^T e^{-2\gamma t}\left(\|u\|^2_{\dot W^l_2(\Omega)} + \gamma^l \|u\|^2_\Omega\right) dt,$$

$$\|u\|^2_{H^{0,l/2}_\gamma(Q_T)} = \int\limits_0^T e^{-2\gamma t}\left\|\frac{\partial^{l/2} u}{\partial t^{l/2}}\right\|^2_\Omega dt \quad \text{для} \quad [l/2] = l/2,$$

$$\|u\|^2_{H^{0,l/2}_\gamma(Q_T)} = \int\limits_0^T e^{-2\gamma t}\int\limits_0^\infty \left\|\frac{\partial^k u_0(\cdot,t)}{\partial t^k} - \frac{\partial^k u_0(\cdot,t-\tau)}{\partial t^k}\right\|^2_\Omega \frac{d\tau}{\tau^{1+l-2k}}\, dt$$

для $k = [l/2] < l/2$, где u_0 – это функция u, продолженная нулем в область $t < 0$. Кроме того, при $l > 1$ $\left.\frac{\partial^i u}{\partial t^i}\right|_{t=0} = 0$, $i = 0, \dots, \left[\frac{l-1}{2}\right]$.

Все эти нормы можно ввести и на любом гладком многообразии с помощью локальных карт и разбиения единицы.

Как обычно, мы считаем, что

$$\|u\|_{\bigcup\limits_{i=-,+} H^{l,l/2}_\gamma(Q^i_T)} = \|u\|_{H^{l,l/2}_\gamma(Q^-_T)} + \|u\|_{H^{l,l/2}_\gamma(Q^+_T)}$$

и что вектор принадлежит какому-то пространству, если этому пространству принадлежат все его компоненты. Норму вектора мы определяем как сумму норм его компонент. Нумерацию констант будем проводить по параграфам.

Сформулируем теперь основные результаты данной работы.

На протяжении всего дальнейшего изложения мы будем предполагать, что для вязкостей жидкостей выполнены следующие неравенства

$$\frac{\mu^-}{2} \leqslant \mu^+ \leqslant 2\mu^-, \quad 0 < \beta^\pm \leqslant 1, \tag{1.10}$$

где константы $\beta^\pm = \lambda^\pm/\mu^\pm$. На самом деле, как мы увидим дальше, полученные результаты будут верны и при более широких предположениях, в частности, при $-1 \leqslant \beta^\pm < 0$. Однако физический смысл вторых вязкостей $\lambda^\pm$, которые должны быть неотрицательными, заставляет нас ограничиться условиями (1.10).

Теорема 1.1. *Пусть для некоторого* $l > 1/2$ $\Gamma \in W^{3/2+l}_2$, $\rho_0 \in \bigcup\limits_{i=-,+} W^{1+l}_2(\Omega^i)$, $\rho_0(x) \geqslant R_0 > 0$, $\mathbf{f} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{H}^{l,l/2}_\gamma(Q^i_T)$, $\mathbf{a} \in$

$\mathbf{H}_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$, $b \in H_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$, $B \in H_{\gamma}^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)$ *с* $T \leqslant \infty$. *Предположим также, что* $\mathbf{w}_0 = 0$. *Тогда для достаточно большого* $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$ *система* (1.9) *имеет единственное решение* $\mathbf{w} \in \bigcup \mathbf{H}_{\gamma}^{2+l,1+l/2}(Q_T^i)$, *которое подчиняется неравенству*

$$\|\mathbf{w}\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_{\gamma}^{2+l,1+l/2}(Q_T^i)} \leqslant c_1(\|\mathbf{f}\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_{\gamma}^{l,l/2}(Q_T^i)} + \|\mathbf{a}\|_{\mathbf{H}_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + \\ + \|b\|_{H_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + \sigma\|B\|_{H_{\gamma}^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)}) \quad (1.11)$$

с константой c_1, *не зависящей от* T.

Для формулировки следующей теоремы нам нужны будут нормы, квадраты которых определяются формулами

$$\left(\|u\|_{\bigcup\limits_i Q_T^i}^{(l,l/2)}\right)^2 = \|u\|^2_{\bigcup\limits_i W_2^{l,l/2}(Q_T^i)} + T^{-l}\|u\|^2_{\bigcup\limits_i Q_T^i},$$

$$\left(\|u\|_{Q_T^-\cup Q_T^+}^{(2+l,1+l/2)}\right)^2 = \|u\|^2_{\bigcup\limits_i W_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^i)} + \\ + T^{-l}\left\{\|\mathcal{D}_t u\|^2_{Q_T^-\cup Q_T^+} + \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2}\|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{\alpha}} u\|^2_{Q_T^-\cup Q_T^+}\right\} + \sup_{t\leqslant T}\|u(\cdot,t)\|^2_{\bigcup\limits_i W_2^{1+l}(\Omega^i)}.$$

Заметим, что норма $\|u\|_{\bigcup\limits_i Q_T^i}^{(l,l/2)}$ эквивалентна $\|u\|_{H_0^{l,l/2}(Q_T)}$ при $l < 1$ и $\|u\|_{W_2^{l,l/2}(Q_T)}$ при $\forall T < \infty$.

Теорема 1.2. *Предположим, что* $\Gamma \in W_2^{3/2+l}$, $\rho_0 \in \bigcup\limits_{i=-,+} W_2^{1+l}(\Omega^i)$ *при* $l \in (1/2, 1)$, $\rho_0(\xi) \geqslant R_0 > 0$. *Кроме того, пусть для* $T < \infty$ *вектор* $\mathbf{u}$ *непрерывен при переходе через границу* Γ *и удовлетворяет неравенству*

$$T^{1/2}\|\mathbf{u}\|_{Q_T^-\cup Q_T^+}^{(2+l,1+l/2)} \leqslant \delta \quad (1.12)$$

с некоторым малым числом δ.

Тогда для любых $\mathbf{f} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{W}_2^{l,l/2}(Q_T^i)$, $\mathbf{w}_0 \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{W}_2^{1+l}(\Omega^i)$, $\mathbf{a} \in \mathbf{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$, $b \in W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)$ *и* $B \in W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)$, *подчиняющихся условиям согласования*

$$[\mathbf{w}_0]\big|_{\Gamma} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\mathbf{w}_0)\mathbf{n}_0]\big|_{\Gamma} = \Pi_0\mathbf{a}\big|_{t=0}, \\ [\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}'(\mathbf{w}_0)\mathbf{n}_0]\big|_{\Gamma} = b\big|_{t=0},$$

задача (1.8) *однозначно разрешима в пространстве* $\bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{W}_2^{2+l,1+l/2}(Q_T^i)$ *и для ее решения* $\mathbf{w}$ *верна оценка*

$$\|\mathbf{w}\|^{(2+l,1+l/2)}_{Q_T^-\cup Q_T^+} \leqslant c_2(T)\big\{\|\mathbf{f}\|^{(l,l/2)}_{Q_T^-\cup Q_T^+} + \|\mathbf{w}_0\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{W}_2^{1+l}(\Omega_i)} +$$

$$+\|\mathbf{a}\|_{W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + \|b\|_{W_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} + \sigma\|B\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)}\big\}$$

с неубывающей функцией $c_2(T)$.

Теорема 1.3. *Допустим, что при некотором* $l \in (1/2,1)$ $\Gamma \in W_2^{5/2+l}$, $\rho_0 \in \bigcup\limits_{i=-,+} W_2^{1+l}(\Omega_i)$, $\rho_0(\xi) \geqslant R_0 > 0$, $p \in C^3(\mathbb{R}_+)$, *кроме того,* $\mathbf{f}(\cdot,t) \in \mathbf{C}^2(\mathbb{R}^3)$ *для* $\forall t \in [0,T]$, $\mathbf{f}(\xi,\cdot)$, $\nabla\mathbf{f}(\xi,\cdot) \in \mathbf{C}^\beta(0,T)$ *для* $\forall \xi \in \mathbb{R}^3$ *при некотором* $\beta \in (1/2,1)$, $p_e(\cdot,t) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\forall t \in [0,T]$, $p_e(\xi,\cdot)$, $\nabla p_e(\xi,\cdot) \in \mathrm{Lip}(0,T)$, $\mathbf{v}_0 \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{W}_2^{1+l}(\Omega^i)$, $[\mathbf{v}_0]\big|_\Gamma = 0$, *и выполнено условие согласования*

$$[-p(\rho_0)\mathbf{n}_0 + \lambda^\pm(\nabla\cdot\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0 + \mu^\pm\mathbb{S}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0]\big|_{\xi\in\Gamma} = \sigma H\mathbf{n}_0 - p_e\mathbf{n}_0\big|_{t=0}.$$

Тогда существует $T_0 \in (0,T]$ *такое, что задача* (1.7) *однозначно разрешима на промежутке* $(0,T_0)$ *и ее решение* $\mathbf{u} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{W}_2^{2+l,1+l/2}(Q_{T_0}^i)$, *при этом величина* T_0 *зависит от норм* $\mathbf{f}$, $\mathbf{v}_0$, ρ_0, p_e *и от кривизны поверхности* Γ.

Три сформулированные теоремы являются аналогами теорем 1.1–1.3 из [3]. Их доказательство опирается на явное решение модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей, которое мы построим и оценим в следующих параграфах. Дальнейшие отличия в изучении двух жидкостей, занимающих все $\mathbb{R}^3$, по сравнению с одной жидкостью ограниченного объема являются совершенно незначительными для соболевских пространств.

Заметим, что такую же ситуацию мы имели и в "несжимаемом" случае, когда теоремы о разрешимости задач с замкнутой границей обобщались на случай двух жидкостей практически без измерений.

§2. Однородная модельная задача с плоской границей раздела жидкостей

Далее мы будем считать, что начальная скорость жидкостей $\mathbf{w}_0 = 0$, а их плотность есть ступенчатая функция $\rho_0^\pm$.

Введем обозначения: $D^3_\infty \equiv D^-_\infty \cup D^+_\infty$, $D^\pm_\infty = \mathbb{R}^3_\pm \times (0,\infty)$, $\mathbb{R}^3_\pm = \{\pm x_3 > 0\}$, $\mathbb{R}^2_\infty = \mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$.

Рассмотрим задачу (1.9), полагая, что в роли поверхности Γ выступает плоскость $\{x_3 = 0\}$. В этом случае задача (1.9) принимает вид

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{w} - (\nu^\pm + \varkappa^\pm)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{w}) - \nu^\pm \nabla^2 \mathbf{w} = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad D^3_\infty,\\
\mathbf{w}\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{w} \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad [\mathbf{w}]\big|_{x_3=0} = 0,\\
-\left[\mu^\pm\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial x_3} + \frac{\partial w_3}{\partial x_\alpha}\right)\right]\Big|_{x_3=0} = d_\alpha(x',t), \quad x' = (x_1,x_2,0),\ \alpha = 1,2,\\
[\lambda^\pm \nabla\cdot\mathbf{w}]\big|_{x_3=0} + \left[2\nu^\pm \frac{\partial w_3}{\partial x_3}\right]\Big|_{x_3=0} + \sigma\Delta' \int\limits_0^t w_3 d\tau = d_3 + \sigma \int\limits_0^t D d\tau \equiv d_3',
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где $\varkappa^\pm = \lambda^\pm/\rho_0^\pm$, $\nu^\pm = \mu^\pm/\rho_0^\pm$, $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

В этом параграфе мы будем изучать задачу (2.1) в пространствах $\bigcup\limits_{i=-,+} H^{l,l/2}_\gamma(D^i_\infty)$, $H^{l,l/2}_\gamma(\mathbb{R}^2_\infty)$, полагая $\mathbf{f} = 0$.

Для функции f из пространства $H^{l,l/2}_\gamma(D^\pm_\infty)$ преобразование Фурье по $x' = (x_1,x_2)$ и Лапласа по t, вычисленное по формуле

$$\widetilde{f}(\xi,x_3,s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,t) e^{-ix'\cdot\xi} dx' dt, \tag{2.2}$$
$$\operatorname{Re} s \geqslant 0, \quad \xi = (\xi_1,\xi_2),$$

определяет аналитическую функцию $\widetilde{f}$ в полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma$.

После преробразования (2.2) задача (2.1) переходит в систему обычных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
s\widetilde{v}_\alpha - (\varkappa^\pm + \nu^\pm) i\xi_\alpha \left(i\xi_1\widetilde{v}_1 + i\xi_2\widetilde{v}_2 + \frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}\right) -\\
-\nu^\pm\left(\frac{d^2\widetilde{v}_\alpha}{dx_3^2} - \xi^2\widetilde{v}_\alpha\right) = 0, \quad \alpha = 1,2,\\
s\widetilde{v}_3 - (\nu^\pm + \varkappa^\pm)\frac{d}{dx_3}\left(i\xi_1\widetilde{v}_1 + i\xi_2\widetilde{v}_2 + \frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}\right) -\\
-\nu^\pm\left(\frac{d^2\widetilde{v}_3}{dx_3^2} - \xi^2\widetilde{v}_3\right) = 0
\end{gathered} \tag{2.3}$$

с граничными условиями

$$\widetilde{\mathbf{v}} \underset{|x_3|\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad [\widetilde{\mathbf{v}}]\big|_{x_3=0} = 0,$$

$$-\left[\mu^{\pm}\left(\frac{d\widetilde{v}_\alpha}{dx_3} + i\xi_\alpha \widetilde{v}_3\right)\right]\Big|_{x_3=0} = \widetilde{b}_\alpha, \quad \alpha = 1,2,$$

$$\left[\lambda^{\pm}\left(i\xi_1\widetilde{v}_1 + i\xi_2\widetilde{v}_2 + \frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}\right) + 2\mu^{\pm}\frac{d\widetilde{v}_3}{dx_3}\right]\Big|_{x_3=0} - \frac{\sigma}{s}\xi^2\widetilde{v}_3\big|_{x_3=0} = \widetilde{b}'_3. \tag{2.4}$$

Здесь мы сменили обозначения для правых частей с d_1, d_2, d'_3 на b_1, b_2, b'_3 и для неизвестной функции с $\mathbf{w}$ на $\mathbf{v}$. Кроме того, $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$.

Общим решением системы (2.3) в двух полупространствах являются функции $\widetilde{\mathbf{v}}^+ = \widetilde{\mathbf{v}}\big|_{x_3>0}$ и $\widetilde{\mathbf{v}}^- = \widetilde{\mathbf{v}}\big|_{x_3<0}$,

$$\widetilde{\mathbf{v}}^+ = C_1^+\begin{pmatrix} r^+ \\ 0 \\ i\xi_1 \end{pmatrix} e^{-r^+x_3} + C_2^+\begin{pmatrix} 0 \\ r^+ \\ i\xi_2 \end{pmatrix} e^{-r^+x_3} + C_3\begin{pmatrix} i\xi_1 \\ i\xi_2 \\ -r_1^+ \end{pmatrix} e^{-r_1^+x_3}, \quad x_3 > 0, \tag{2.5}$$

$$\widetilde{\mathbf{v}}^- = C_1^-\begin{pmatrix} -r^- \\ 0 \\ i\xi_1 \end{pmatrix} e^{r^-x_3} + C_2^-\begin{pmatrix} 0 \\ -r^- \\ i\xi_2 \end{pmatrix} e^{r^-x_3} + C_3^-\begin{pmatrix} i\xi_1 \\ i\xi_2 \\ r_1^- \end{pmatrix} e^{r_1^-x_3}, \quad x_3 < 0,$$

где $r^{\pm} = \sqrt{\frac{s}{\nu^{\pm}} + \xi^2}$, $r_1^{\pm} = \sqrt{\frac{s}{2\nu^{\pm}+\varkappa^{\pm}} + \xi^2}$, при этом мы считаем, что $|\arg\sqrt{z}| < \pi/2$ для $\forall z$; $C_k^{\pm}$ – свободные постоянные.

Отметим, что для двух несжимаемых жидкостей решение задачи, аналогичной (2.1), было построено и оценено в [4].

Для удобства последующих оценок частное решение системы (2.3), (2.4) будем искать в виде, эквивалентном (2.5),

$$\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{V}^{\pm}\frac{e^{\mp r^{\pm}x_3} - e^{\mp r_1^{\pm}x_3}}{r^{\pm} - r_1^{\pm}} + \mathbf{W}^{\pm}e^{\mp r^{\pm}x_3}, \quad \pm x_3 > 0. \tag{2.6}$$

Здесь $\mathbf{V}^{\pm} = -C_3^{\pm}(r^{\pm} - r_1^{\pm})\begin{pmatrix} i\xi_1 \\ i\xi_2 \\ \mp r_1^{\pm} \end{pmatrix}$, $\mathbf{W}^{\pm} = \begin{pmatrix} \omega_1^{\pm} \\ \omega_2^{\pm} \\ \omega_3^{\pm} \end{pmatrix}$, $\omega_3^{\pm}$ – линейные комбинации $C_3^{\pm}$. Подставляя выражение (2.6) в граничные условия (2.4) и решая полученную систему, находим:

$$\begin{aligned}
&C_3^+ = \frac{A}{P}\left\{\rho_0^- s(r^+ + r^-) + (r_1^- r^- - \xi^2)\left[2(\mu^+ - \mu^-)r^+ + \frac{\sigma}{s}\xi^2\right]\right\} +\\
&\quad + \frac{\widetilde{b}_3'}{P}\{\rho_0^- s r_1^-(r^+ + r^-) + (r_1^- r^- - \xi^2)[\mu^+(r^{+^2} + \xi^2) - \mu^-(r^{-^2} + \xi^2)]\},\\
&C_3^- = \frac{A}{P}\left\{\rho_0^+ s(r^+ + r^-) - (r_1^+ r^+ - \xi^2)\left[2(\mu^+ - \mu^-)r^- - \frac{\sigma}{s}\xi^2\right]\right\} -\\
&\quad - \frac{\widetilde{b}_3'}{P}\{\rho_0^+ s r_1^+(r^+ + r^-) - (r_1^+ r^+ - \xi^2)[\mu^+(r^{+2} + \xi^2) - \mu^-(r^{-^2} + \xi^2)]\},\\
&\omega_k^+ = \omega_k^- \equiv \omega_k, \quad k = 1, 2, 3,\\
&\omega_\alpha = \frac{1}{\mu^+ r^+ + \mu^- r^-}\times\\
&\quad \times \left\{\widetilde{b}_\alpha + i\xi_\alpha C_3^+\left[\mu^+(r^+ - r_1^+) - \frac{(\mu^+ - \mu^-)(r_1^+ r^+ - \xi^2)}{r^+ + r^-}\right] +\right.\\
&\quad \left. + i\xi_\alpha C_3^-\left[\mu^-(r^- - r_1^-) + \frac{(\mu^+ - \mu^-)(r_1^- r^- - \xi^2)}{r^+ + r^-}\right]\right\}, \quad \alpha = 1, 2,\\
&\omega_3 = \frac{-(r_1^+ r^+ - \xi^2)C_3^+ + (r_1^- r^- - \xi^2)C_3^-}{r^+ + r^-},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $A = i\xi_1\widetilde{b}_1 + i\xi_2\widetilde{b}_2$, $\widetilde{b}_3' = b_3 + \sigma\frac{\widetilde{B}}{s}$, а P – это полином, который можно записать в форме:

$$\begin{aligned}
P = {}& \rho_0^{+^2} s^2(r_1^- r^- - \xi^2) + \rho_0^{-^2} s^2(r_1^+ r^+ - \xi^2) + \rho_0^+\rho_0^- s^2(r_1^+ r^- +\\
&+ r_1^- r^+ + 2\xi^2) + 4(\mu^+ - \mu^-)\xi^2\{\mu^+ r^+(r^+ - r_1^+)(r_1^- r^- - \xi^2) -\\
&- \mu^- r^-(r^- - r_1^-)(r_1^+ r^+ - \xi^2)\} + \sigma\xi^2\{\rho_0^+ r_1^+(r_1^- r^- - \xi^2) +\\
&+ \rho_0^- r_1^-(r_1^+ r^+ - \xi^2)\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Оценка решения (2.6) опирается на оценку снизу знаменателя P.

Лемма 2.1. *Пусть выполнены условия* (1.10), *тогда для* $\forall\xi \in \mathbb{R}^2$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s = \gamma > 0$ *и* $\sigma \geqslant 0$ *выражение* P, *заданное формулой* (2.8), *подчиняется неравенствам*

$$|P| \geqslant \frac{\gamma}{12}(\rho_0^{+^2} + \rho_0^{-^2})|s|^2 + \frac{\sigma\gamma\xi^2}{6\sqrt{2}}(\rho_0^+|r_1^+| + \rho_0^-|r_1^-|) \geqslant \frac{(\rho_0^{+^2} + \rho_0^{-^2})\gamma^3}{12}, \tag{2.9}$$

$$|P| \geqslant c_1(|s|^3 + \beta^+\beta^-|s|^2\xi^2 + \sigma|\xi|^3|s|). \tag{2.10}$$

Доказательство. Представим полином P в виде, удобном для его оценки,

$$P = s^2\left(\frac{\rho_0^+}{r_1^+} + \frac{\rho_0^-}{r_1^-}\right) q + \rho_0^+\rho_0^- s^2\left(\frac{r_1^+}{r_1^-} + \frac{r_1^-}{r_1^+} + 2\right)\xi^2 +$$
$$+ 4\mu^+\left(\mu^+ - \frac{\mu^-}{2}\right)\frac{s\xi^2}{\nu^+}\frac{(1+\beta^+)r^+(r_1^-r^- - \xi^2)}{(2+\beta^+)(r_1^+ + r^+)} +$$
$$+ 4\mu^-\left(\mu^- - \frac{\mu^+}{2}\right)\frac{s\xi^2}{\nu^-}\frac{(1+\beta^-)r^-(r_1^+r^+ - \xi^2)}{(2+\beta^-)(r_1^- + r^-)} -$$
$$-\frac{2\rho_0^+\rho_0^- s\xi^2}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)(r_1^+ + r^+)(r_1^- + r^-)}\{r^+(1+\beta^+)s[r^- + (2+\beta^-)r_1^-] +$$
$$+ r^-(1+\beta^-)s[r^+ + (2+2\beta^+)r_1^+]\} + \sigma\xi^2 q \equiv \sum_{j=1}^{6} I_j,$$

где

$$q = \rho_0^+ r_1^+(r_1^- r^- - \xi^2) + \rho_0^- r_1^-(r_1^+ r^+ - \xi^2). \tag{2.11}$$

Чтобы получить оценку (2.9), воспользуемся неравенством

$$|P| \geqslant |q|\,|s|\left|\mathrm{Re}\left(\sum_{j=1}^{6}\frac{I_j}{sq}\right)\right|.$$

Любопытно заметить, что многочлен q, стоящий при $\sigma\xi^2$, так же, как и в случае несжимаемых жидкостей, играет роль универсального множителя для всего P в том смысле, что частное от деления P на sq имеет положительную вещественную часть. Покажем это, рассмотрев вещественные части отдельных слагаемых. Так

$$\mathrm{Re}\left(\frac{I_1}{sq}\right) = \sum_{i=-,+}\mathrm{Re}\left(\rho_0^- \frac{s}{r_1^i}\right) = \sum_{i=-,+}\rho_0^i\frac{|s|}{|r_1^i|}\{\cos(\arg s)\cos(\arg r_1^i) +$$
$$+ \sin(\arg s)\sin(\arg r_1^i)\} \geqslant \sum_i \rho_0^i \frac{\mathrm{Re}\, s}{\sqrt{2}|r_1^i|} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}\left(\frac{\rho_0^+}{|r_1^+|} + \frac{\rho_0^-}{|r_1^-|}\right). \tag{2.12}$$

В этой оценке мы использовали тот факт, что $\arg s$ и $\arg r_1^\pm$ имеют один знак, и потому произведение их синусов неотрицательно. Кроме того, $\arg r_1^\pm \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, откуда следует, что $\cos\arg r_1^\pm > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Далее для определенности мы будем считать, что $\arg s > 0$, и следовательно, $\arg r^{\pm}$, $\arg r_1^{\pm} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. (Для $\arg s < 0$ мы получим картину, зеркально отраженную относительно оси $\operatorname{Im} s = 0$.) Так как в этом случае $\arg \frac{r_1^{\pm} r^{\pm} - \xi^2}{s} = \arg \left(\frac{r_1^{\pm}(1+\beta^{\pm})}{r_1^{\pm} + r^{\pm}} + 1 \right) \in \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$, то легко видеть, что $\arg \frac{q}{s} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Поскольку $\arg \frac{r^{\pm}}{r_1^{\pm} + r^{\pm}} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, то при $\mu^+ \geqslant \frac{\mu^-}{2}$ и $\mu^- \geqslant \frac{\mu^+}{2}$ $\arg \frac{I_{3,4}}{s^2} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ и, следовательно, $\operatorname{Re}\left(\frac{I_{3,4}}{sq}\right) \geqslant 0$ и их можно отбросить при оценке $|P|$.

Далее,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{I_6}{sq}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{\sigma \xi \bar{s}}{|s|^2}\right) = \frac{\sigma \xi^2 \gamma}{|s|^2}. \tag{2.13}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} I_7 \equiv I_2 + I_5 = \rho_0^+ \rho_0^- s^2 \xi^2 \Bigg\{ \frac{r_1^+}{r_1^-} + \frac{r_1^-}{r_1^+} + 2 \Bigg[\frac{(1+\beta^-) r^+}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)(r_1^+ + r^+)} + \\ + \frac{(1+\beta^+) r^-}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)(r_1^- + r^-)} + \frac{\beta^+ \beta^-}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)} + \\ + \frac{(1-\beta^+\beta^-)(r_1^- r^+ + r_1^+ r^-) + 2(2+\beta^+ + \beta^-) r_1^+ r^-}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)(r_1^+ + r^+)(r_1^- + r^-)} \Bigg] \Bigg\}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Очевидно, что при $|\beta^{\pm}| \leqslant 1$ и $\beta^+ \beta^- \geqslant 0$ аргументы первых пяти слагаемых в (2.14) лежат в промежутке $(-\pi/4, \pi/4)$. Дроби вида $\frac{r_1^- r^+}{(r_1^- + r^-)(r_1^+ + r^+)}$ представляют собой произведение векторов $\frac{r_1^-}{r_1^- + r^-}$ и $\frac{r^+}{r_1^+ + r^+}$, аргументы которых имеют разные знаки и по модулю не превосходят $\pi/4$, потому они тоже после деления на q/s остаются в правой полуплоскости.

Рассмотрим

$$\frac{r_1^+ r_1^- s}{(r_1^+ + r^+)(r_1^- + r^-) q} = \frac{1}{(r_1^+ + r^+)(r_1^- + r^-) \left(\frac{\rho_0^+ (r_1^- r^- - \xi^2)}{r_1^- s} + \frac{\rho_0^- (r_1^+ r^+ - \xi^2)}{r_1^+ s} \right)}.$$

Аргумент этой дроби принадлежит отрезку $(-\pi/2, \pi/2)$, так как $\arg(r_1^{\pm} + r^{\pm}) \in (0, \pi/4)$, а $\arg \frac{r_1^{\pm} r^{\pm} - \xi^2}{r_1^{\pm} s} \in (-\pi/2, 0)$.

Таким образом, с учетом (2.12), (2.13) имеем

$$|P| \geqslant |q|\,|s| \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_0^+}{|r_1^+|} + \frac{\rho_0^-}{|r_1^-|} \right) + \frac{\sigma\xi^2\gamma}{|s|^2} \right\},$$

откуда следует (2.9) ввиду леммы 2.2 (см. ниже).

Кроме того,

$$\begin{gathered} |P| \geqslant |q|\,|s| \operatorname{Re} \frac{I_7}{sq} \geqslant |q|\,|s| \operatorname{Re} \frac{\beta^+\beta^-\rho_0^+\rho_0^- s\xi^2}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)q} \geqslant \\ \geqslant \frac{|q|\,|s|}{\sqrt{2}} \frac{\beta^+\beta^-\rho_0^+\rho_0^-\xi^2}{(2+\beta^+)(2+\beta^-)\left|\frac{q}{s}\right|} \geqslant \frac{\beta^+\beta^-\rho_0^+\rho_0^-|s|^2\xi^2}{9\sqrt{2}}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

При доказательстве (2.10) рассмотрим сначала случай, когда $|s| < \xi^2$. Тогда $|s|^3 < |s|^2\xi^2 \leqslant \frac{9\sqrt{2}|P|}{\rho_0^+\rho_0^-\beta^+\beta^-}$.

Далее,

$$\sigma\xi^2|q| \leqslant |P| + |I_1| + |I_7| + |I_3| + |I_4|.$$

Используя оценку сверху для полинома q из леммы 2.2, получаем:

$$\begin{gathered} |I_1| \leqslant |s|^2|q| \left(\frac{\rho_0^+}{|r_1^+|} + \frac{\rho_0^-}{|r_1^-|} \right) \leqslant c_2|s|^3 \Bigg\{ {\rho^+}^2 + {\rho_0^-}^2 + \\ + \rho_0^+\rho_0^- \left(\sup_{s,\xi} \frac{|r_1^+|}{|r_1^-|} + \sup_{s,\xi} \frac{|r_1^-|}{|r_1^+|} \right) \Bigg\} \leqslant c_3|s|^3, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} |I_7| \leqslant \rho_0^+\rho_0^-|s|^2\xi^2 \Bigg\{ & \sup_{s,\xi} \frac{|r_1^+|}{|r_1^-|} + \sup_{s,\xi} \frac{|r_1^-|}{|r_1^+|} + \\ + 2\Bigg[2 \sum_{i=-,+} \sup_{s,\xi} \frac{|r^i|}{|r_1^i + r^i|} & + \beta^+\beta^- + 2 \max_{-,+} \sup_{s,\xi} \left(\frac{|r_1^\pm|}{|r_1^\pm + r^\pm|} \frac{|r^\mp|}{|r_1^\mp + r^\mp|} \right) + \\ + 8 \sup_{s,\xi} \left(\frac{|r_1^+|}{|r_1^+ + r^+|} \frac{|r_1^-|}{|r_1^- + r^-|} \right) \Bigg] \Bigg\} & \leqslant c_4(\nu^\pm, \rho_0^\pm)|s|^2\xi^2. \end{aligned}$$

Здесь, как нетрудно видеть, все супремумы – ограниченные функции вязкостей $\nu^\pm$ и коэффициентов $\beta^\pm$.

При оценке однотипных членов I_3, I_4 воспользуемся неравенствами

$$\begin{gathered} \frac{|r_1^\pm r^\pm - \xi^2|}{|s|} \leqslant \frac{1}{(2+\beta^\pm)\nu^\pm} \left(\frac{|r_1^\pm|(1+\beta^\pm)}{|r_1^\pm + r^\pm|} + 1 \right) \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\nu^\pm} \left(1 + 2 \sup_{s,\xi} \frac{|r_1^\pm|}{|r_1^\pm + r^\pm|} \right). \end{gathered} \tag{2.16}$$

Тогда выводим:

$$|I_3| + |I_4| \leqslant c_5(\mu^\pm, \rho_0^\pm)|s|^2\xi^2.$$

Значит, при $\beta^+\beta^- \neq 0$.

$$\sigma|\xi|^3|s| \leqslant c_6\sigma\xi^2|q| \leqslant c_6 \left\{ |P| + (c_3 + c_4 + c_5)\frac{9\sqrt{2}|P|}{\beta^+\beta^-\rho_0^+\rho_0^-} \right\}.$$

Пусть теперь $|s| \geqslant \xi^2$. Следовательно,

$$\sigma|s|\,|\xi|^3 \leqslant \sigma|s|^{3/2}\xi^2 \leqslant \frac{\sigma|s|^2\xi^2}{\sqrt{\gamma}} \leqslant \frac{c_7\sigma|P|}{\sqrt{\gamma}} \tag{2.17}$$

с учетом (2.15).

Обозначим через I_0 выражение

$$I_0 = \rho_0^{+^2} s^2(r_1^- r^- - \xi^2) + \rho_0^{-^2} s^2(r_1^+ r^+ - \xi^2) + \\ + \rho_0^+\rho_0^- s^2(r_1^+ r^- + r_1^- r^+ - 2\xi^2),$$

тогда, с одной стороны,

$$|I_0| \leqslant |P| + |I_3| + |I_4| + |I_6| + \left| I_7 - \rho_0^+\rho_0^- s^2\xi^2 \left(\frac{r_1^+}{r_1^-} + \frac{r_1^-}{r_1^+} \right) \right| \leqslant c_8|P|,$$

где I_7 определяется равенством (2.14), а с другой стороны,

$$|I_0| \geqslant |s|^3 \left| \operatorname{Re}\left\{ \sum_{i=-,+} \frac{\rho^{i^2}}{(2+\beta^i)\nu^i} \left(\frac{r_1^i(1+\beta^i)}{r_1^i + r^i} + 1 \right) + \right.\right. \\ \left.\left. + \rho_0^+\rho_0^- \left(\frac{r_1^+ r^- - \xi^2}{s} + \frac{r_1^- r^+ - \xi^2}{s} \right) \right\} \right|.$$

Реальные части всех слагаемых в последнем неравенстве положительны, поэтому

$$|I_0| \geqslant |s|^3 \left(\frac{\rho_0^{+^2}}{(2+\beta^+)\nu^+} + \frac{\rho^{-^2}}{(2+\beta^-)\nu^-} \right).$$

И, следовательно,

$$|s|^3 \leqslant c_9|P|. \tag{2.18}$$

Из (2.15), (2.17), (2.18) мы получаем неравенство (2.10). $\bullet$

Лемма 2.2. *Для выражения q, определяемого* (2.11), *верны оценки*

$$|q| \geqslant \frac{|s|}{3\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_0^+}{\nu^-}|r_1^+| + \frac{\rho_0^-}{\nu^+}|r_1^-| \right) \tag{2.19}$$

$$|q| \leqslant \frac{3}{2}|s| \left(\frac{\rho_0^+}{\nu^-}|r_1^+| + \frac{\rho_0^-}{\nu^+}|r_1^-| \right). \tag{2.20}$$

Доказательство. Так как

$$\arg \frac{r_1^\pm (r_1^\mp r^\mp - \xi^2)}{s} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right),$$

то

$$|q| \geqslant |s| \left| \operatorname{Re} \left\{ \frac{\rho_0^+ r_1^+ (r_1^- r^- - \xi^2)}{s} + \frac{\rho_0^- r_1^- (r_1^+ r^+ - \xi^2)}{s} \right\} \right| \geqslant$$
$$\geqslant \frac{|s|}{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho_0^+ |r_1^+|}{(2+\beta^-)\nu^-} + \frac{\rho_0^- |r_1^-|}{(2+\beta^+)\nu^+} \right),$$

откуда следует (2.19).

Неравенство (2.20) вытекает из оценки

$$|q| \leqslant |s| \left\{ \frac{\rho_0^+ |r_1^+|}{(2+\beta^-)\nu^-} \left(\frac{(1+\beta^-)|r_1^-|}{|r_1^- + r^-|} + 1 \right) + \right.$$
$$\left. \frac{\rho_0^- |r_1^-|}{(2+\beta^+)\nu^+} \left(\frac{(1+\beta^+)|r_1^+|}{|r_1^+ + r^+|} + 1 \right) \right\}. \quad \bullet$$

Теперь мы можем оценить решение (2.6) с коэффициентами (2.7). В силу (2.16) для C_3^+, C_3^- верны неравенства

$$|C_3^\pm| \leqslant c_{10} \left\{ \frac{(|\widetilde{b}_1| + |\widetilde{b}_2|)|\xi|}{|P|} [|s|(|r^+| + |r^-|) + \sigma\xi^2] + \frac{|\widetilde{b}_3'|}{|P|} (|s|^2 + |s|\xi^2) \right\},$$

откуда с учетом леммы 2.1 выводим для $V^\pm$:

$$|V^\pm| \leqslant c_{11} \frac{|C_3^\pm||s||r_1^\pm|}{|r^\pm + r_1^\pm|} \leqslant c_{12} \left(\sum_{i=1}^{3} |\widetilde{b}_i| + \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \right) \frac{\sigma |\widetilde{B}|}{\sqrt{|s| + \xi^2}} \right).$$

Если $\sigma = 0$, то член с $|\widetilde{B}|$ в последнем неравенстве отсутствует.

Аналогичным образом оцениваются и ω_i, $i=1,2,3$:

$$|\omega_\alpha| \leqslant \frac{1}{|\mu^+ r^+ + \mu^- r^-|}\Big\{|\widetilde{b}_\alpha| + \sum_{j=-,+} |C_3^j||s||\xi|\Big[\frac{c_{13}}{|r_1^j + r^j|} + \\ + \frac{c_{14}^j}{|r^+ + r^-|}\Big]\Big\} \leqslant \\ \leqslant c_{15}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}|\widetilde{b}_i|}{\sqrt{|s|+\xi^2}} + \frac{\sigma|\widetilde{B}|}{|s|+\xi^2}\right), \quad \alpha = 1,2,$$

$$|\omega_3| \leqslant \frac{3|s|}{2|r^+ + r^-|}\left(\frac{|C_3^+|}{\nu^+} + \frac{|C_3^-|}{\nu^-}\right) \leqslant c_{16}\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}|\widetilde{b}_i|}{\sqrt{|s|+\xi^2}} + \frac{\sigma|\widetilde{B}|}{|s|+\xi^2}\right).$$

Таким образом, мы доказали следующую лемму.

Лемма 2.3. *Для* $\forall\xi \in \mathbb{R}^2$, $\forall s \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s = \gamma > 0$, *вектора* $\mathbf{V}^\pm$, $\mathbf{W}^\pm$ *из* (2.6) *подчиняются неравенствам*

$$|\mathbf{V}^\pm| \leqslant c_{17}(\gamma)\left(\sum_{i=1}^{3}|\widetilde{b}_i| + \frac{\sigma|\widetilde{B}|}{\sqrt{|s|+\xi^2}}\right), \\ |\mathbf{W}^\pm| \leqslant c_{18}(\gamma)\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{3}|\widetilde{b}_i|}{\sqrt{|s|+\xi^2}} + \frac{\sigma|\widetilde{B}|}{|s|+\xi^2}\right). \tag{2.21}$$

Используя равенство Парсеваля для преобразования (2.2)

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{f}(\xi, x_3, \gamma + i\xi_0)|^2 d\xi\, d\xi_0 = (2\pi)^3 \int\limits_0^\infty e^{-2\gamma t}\int\limits_{\mathbb{R}^2}|f(x,t)|^2 dx'dt,$$

можно показать (см. [1], §2), что при $\forall\gamma \geqslant 0$ норма $\|u\|_{\bigcup\limits_i H_\gamma^{l,l/2}(D_\infty^i)}$

эквивалентна норме, квадрат которой выражается формулой

$$
|||u|||^2_{l,\gamma,D^3_\infty} = \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j<l}\bigg(\bigg\|\frac{\partial^j}{\partial x_3^j}\widetilde{u}(\xi,x_3,s)\bigg\|^2_{\mathbb{R}_+}|r^+|^{2l-2j}+
$$

$$
+\bigg\|\frac{\partial^j}{\partial x_3^j}\widetilde{u}(\xi,x_3,s)\bigg\|^2_{\mathbb{R}_-}|r^-|^{2l-2j}\bigg)+\|\widetilde{u}(\xi,\cdot,s)\|^2_{\dot{W}^l_2(\mathbb{R}_+)\cup\dot{W}^l_2(\mathbb{R}_-)}\Big\}d\xi_0 d\xi.
$$

Здесь $s=\gamma+i\xi_0$, $r^\pm=\sqrt{\frac{s}{\nu^\pm}+\xi^2}$, $\mathbb{R}_\pm=\{y\in\mathbb{R}\,|\pm y>0\}$.

Норма $\|u\|_{H^{l,l/2}_\gamma(\mathbb{R}^2_\infty)}$ следа функции u на плоскости $\mathbb{R}^2$ эквивалентна норме

$$
|||u|||_{l,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty}=\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{u}(\xi,0,s)|^2|r|^{2l}d\xi_0 d\xi\Bigg)^{1/2},
$$

$r=\sqrt{s+\xi^2}$, $s=\gamma+i\xi_0$.

Из леммы 2.3 для решения (2.6) следует оценка

$$
\begin{gathered}
\left|\frac{d^j\widetilde{\mathbf{v}}(x_3)}{dx_3^j}\right|\leqslant c_{19}\left(\sum_{i=1}^3|\widetilde{b}_i|+\frac{\sigma|\widetilde{B}|}{\sqrt{|s|+\xi^2}}\right)\times\\
\times\left[\left|\frac{d^je_1^\pm(x_3)}{dx_3^j}\right|+\frac{c_{20}}{\sqrt{|s|+\xi^2}}\left|\frac{d^je_0^\pm(x_3)}{dx_3^j}\right|\right],\quad \pm x_3>0,
\end{gathered}\tag{2.22}
$$

где $j=0,1,\dots$, $e_0^\pm(x_3)=e^{\mp r^\pm x_3}$, $e_1^\pm(x_3)=\frac{e^{\mp r^\pm x_3}-e^{\mp r_1^\pm x_3}}{r^\pm-r_1^\pm}$.

Для функций $e_0^\pm$, $e_1^\pm$ верно следующее утверждение, которое доказывается так же, как лемма 3.1 из [1].

Лемма 2.4. *Для* $\forall\xi\in\mathbb{R}^2$, $s=\gamma+i\xi_0$, $\gamma>0$, *имеют место нера-*

венства

$$\pm\int\limits_0^{\pm\infty}\left|\frac{d^j e_0^{\pm}(x_3)}{dx_3^j}\right|^2 dx_3 \leqslant \frac{|r^{\pm}|^{2j-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\pm\int\limits_0^{\pm\infty}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{d^j e_0^{\pm}(x_3\pm z)}{dx_3^j}-\frac{d^j e_0^{\pm}(x_3)}{dx_3^j}\right|^2 \frac{dz dx_3}{z^{1+2\alpha}} \leqslant c_{21}^{\pm}|r^{\pm}|^{2(j+\alpha)-1},$$

$$\pm\int\limits_0^{\pm\infty}\left|\frac{d^j e_1^{\pm}(x_3)}{dx_3}\right|^2 dx_3 \leqslant c_{22}^{\pm}|r^{\pm}|^{2j-3},$$

$$\pm\int\limits_0^{\pm\infty}\int\limits_0^{\infty}\left|\frac{d^j e_1^{\pm}(x_3\pm z)}{dx_3^j}-\frac{d^j e_1^{\pm}(x_3)}{dx_3^j}\right|^2 \frac{dz\, dx_3}{z^{1+2\alpha}} \leqslant c_{23}^{\pm}|r^{\pm}|^{2(j+\alpha)-3}.$$

Здесь $j\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $\alpha\in(0,1)$; $c_{21}^{\pm}$, $c_{22}^{\pm}$, $c_{23}^{\pm}$ *не зависят от* $|r^{\pm}|$.

Используя лемму 2.4 с $\alpha=l-[l]$ и неравенство (2.22), для решения (2.6) получаем:

$$\begin{gathered}|||\mathbf{v}|||^2_{2+l,\gamma,D^3_\infty} \leqslant c_{24}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}|\widetilde{b}_i|^2+\frac{\sigma^2|\widetilde{B}|^2}{|s|+\xi^2}\right)\times\\ \times\Bigg\{\sum_{j<l+2}(|r^+|^{2j-3+2(l+2)-2j}+|r^-|^{2(l+2)-3}+|r^+|^{2(2+[l]+l-[l])-3}+\\ +|r^-|^{2l+1}+\frac{1}{|s|+\xi^2}\sum_{j<l+2}\Big[(|r^+|^{2j-1+2(l+2)-2j}+|r^-|^{2l+3})+\\ +|r^+|^{2(2+[l]+l-[l])-1}+|r^-|^{2l+3}\Big]\Bigg\}d\xi_0 d\xi \leqslant\\ \leqslant c_{25}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{3}|\widetilde{b}_i|^2+\frac{\sigma^2|\widetilde{B}|^2}{|s|+\xi^2}\right)\left|\sqrt{s+\xi^2}\right|^{2l+1}d\xi_0 d\xi \leqslant\\ \leqslant c_{26}\left(\sum_{i=1}^{3}|||b_i|||^2_{l+1/2,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty}+\sigma^2|||B|||^2_{l-1/2,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty}\right).\end{gathered}\tag{2.23}$$

Итак, мы доказали теорему об однозначной разрешимости задачи (2.1) при $\mathbf{f}=0$.

Теорема 2.1. *Пусть* $l > 1/2$, $T \leqslant \infty$ *и для вязкостей* $\mu^{\pm}$, $\lambda^{\pm}$ *выполнены неравенства* (1.10). *Тогда для произвольных* $\mathbf{f} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{H}_{\gamma}^{l,l/2}(D_T^i)$, $d_k \in H_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(\mathbb{R}_T^2)$, $k=1,2,3$, $D \in H_{\gamma}^{l-1/2.l/2-1/4}(\mathbb{R}_T^2)$ *задача* (2.1) *имеет единственное решение* $\mathbf{w} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{H}_{\gamma}^{2+l,1+l/2}(D_T^i)$ *такое, что*

$$\|\mathbf{w}\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_{\gamma}^{2+l,1+l/2}(D_T^i)} \leqslant c_{27}(\gamma) \times$$
$$\times \left\{ \|\mathbf{f}\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_{\gamma}^{l,l/2}(D_T^i)} + \sum_{i=1}^{3} \|d_i\|_{H_{\gamma}^{l+1/2,l/2+1/4}(\mathbb{R}_T^2)} + \sigma \|D\|_{H_{\gamma}^{l-1/2,l/2-1/4}(\mathbb{R}_T^2)} \right\}, \tag{2.24}$$

где константа $c_{27}(\gamma)$ *не зависит от* T, *а* $D_T^{\pm} = \mathbb{R}_{\pm}^3 \times (0,T)$, $\mathbb{R}_T^2 = \mathbb{R}^2 \times (0,T)$.

§3. Однозначная разрешимость неоднородной задачи (2.1)

Доказательство теоремы 2.1. Поскольку при $T < \infty$ все заданные функции можно продолжить по $t > T$ с сохранением класса, то будем считать, что $T = \infty$.

Решение (2.1) представим в виде $\mathbf{w} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$. Здесь $\mathbf{v}' \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{H}_{\gamma}^{2+l,1+l/2}(D_{\infty}^i)$ – решение следующей задачи:

$$\begin{gathered} \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \mathbf{v}' \equiv \\ \equiv \mathcal{D}_t \mathbf{v}' - (\nu^{\pm} + \varkappa^{\pm}) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}') - \nu^{\pm} \nabla^2 \mathbf{v}' = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad D_{\infty}^3, \\ [\mathbf{v}']\big|_{x_3=0} = 0, \quad \mathbf{v}'\big|_{t=0} = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

а $\mathbf{v}''$ – решение однородной системы (2.1), где в роли правых частей в краевых условиях выступают функции

$$\begin{aligned} b_{\alpha}(x',t) &= d_{\alpha}(x',t) - \left[\mu^{\pm}\left(\frac{\partial v'_{\alpha}}{\partial x_3} + \frac{\partial v'_3}{\partial x_{\alpha}}\right)\right]\bigg|_{x_3=0}, \ \alpha = 1,2, \\ b_3(x',t) &= d_3(x',t) - \left[\lambda^{\pm} \nabla \cdot \mathbf{v}' + 2\mu^{\pm} \frac{\partial v'_3}{\partial x_3}\right]\bigg|_{x_3=0}, \\ B(x',t) &= D(x',t) - \Delta' v'_3\big|_{x_3=0}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В качестве решения (3.1) можно взять вектор-функцию

$$\mathbf{v}' = \begin{cases} \mathbf{v}^+ & \text{при} \quad x_3 > 0 \\ \mathbf{v}_1^- + \mathbf{v}_2^- & \text{при} \quad x_3 < 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{v}^+$ – решение задачи Коши

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^+\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{v}^+ = \mathbf{f}^+ \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_\infty = \mathbb{R}^3 \times (0,\infty), \\ \mathbf{v}^+\big|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{3.3}$$

($\mathcal{L}^+ = \mathcal{L}\big|_{x_3>0}$, $\mathbf{f}^+ \in \mathbf{H}^{l,l/2}_\gamma(\mathbb{R}^3_\infty)$ – непрерывное продолжение на D^-_∞ сужения $\mathbf{f}\big|_{x_3>0}$).

Вектор $\mathbf{v}_1^-$ тоже определяется как решение задачи Коши

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^-\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{v}_1^- = \mathbf{f}^- \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3_\infty, \\ \mathbf{v}_1^-\big|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь $\mathcal{L}^- = \mathcal{L}\big|_{x_3<0}$, $\mathbf{f}^- \in \mathbf{H}^{l,l/2}_\gamma(\mathbb{R}^3_\infty)$ – непрерывное продолжение $\mathbf{f}\big|_{x_3<0}$ на D^+_∞.

Наконец, $\mathbf{v}_2^-$ – это решение первой начально-краевой задачи

$$\begin{gathered} \mathcal{L}^-\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{v}_2^- = 0 \quad \text{в} \quad D^-_\infty, \\ \mathbf{v}_2^-\big|_{t=0} = 0, \quad \mathbf{v}_2^-\big|_{x_3=0} = (\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)\big|_{x_3=0} \equiv \boldsymbol{\varphi}. \end{gathered} \tag{3.5}$$

Сделаем в задачах (3.3), (3.4) преобразование Лапласа по t и преобразование Фурье по всем трем пространственным переменным. Нетрудно видеть, что, например, (3.3) перейдет в систему

$$\widetilde{\mathcal{L}}^+(i\xi, s)\widetilde{\mathbf{v}}^+ = \widetilde{\mathbf{f}}^+ \quad (\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad s = \gamma + i\xi_0),$$

для решения которой $\widetilde{\mathbf{v}}^+ = (\widetilde{\mathcal{L}}^+)^{-1}\widetilde{\mathbf{f}}^+$ есть оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{\mathbf{v}}^+(\xi,s)|^2(|s|+\xi^2)^{l+2}\,d\xi d\xi_0 \leqslant c_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\widetilde{\mathbf{f}}^+(\xi,s)|^2(|s|+\xi^2)^{l}\,d\xi\, d\xi_0,$$

что эквивалентно неравенству

$$\|\mathbf{v}^+\|_{\mathbf{H}^{2+l,1+l/2}_\gamma(\mathbb{R}^3_\infty)} \leqslant c_2\|\mathbf{f}^+\|_{\mathbf{H}^{l,l/2}_\gamma(\mathbb{R}^3_\infty)} \leqslant c_3\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}^{l,l/2}_\gamma(D^\pm_\infty)}. \tag{3.6}$$

Аналогично выводим для $\mathbf{v}_1^-$:

$$\|\mathbf{v}_1^-\|_{\mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(\mathbb{R}^3_\infty)} \leqslant c_4\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{H}_\gamma^{l,l/2}(D^-_\infty)}. \tag{3.7}$$

Решение системы (3.5) после преобразования (2.2) представимо в виде (2.6) для полупространства $\{x_3<0\}$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_2^-(\xi_1,\xi_2,x_3,s) = -C_3^-(r^- - r_1^-)\begin{pmatrix} i\xi_1 \\ i\xi_2 \\ r_1^- \end{pmatrix} e_1^-(x_3) + \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} e_0^-(x_3).$$

Нетрудно посчитать, что

$$\begin{aligned} C_3^- &= \frac{i\xi_1\widetilde{\varphi}_1 + i\xi_2\widetilde{\varphi}_2 + r^-\widetilde{\varphi}_3}{r_1^- r^- - \xi^2}, \\ \omega_k &= \widetilde{\varphi}_k, \quad k=1,2,3. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial^j \widetilde{\mathbf{v}}_2^-}{\partial x_3^j}\right| &\leqslant c_5(\xi^2 + |r^-||r_1^-|)|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|\left|\frac{r^- - r_1^-}{r_1^- r^- - \xi^2}\right|\left|\frac{d^j e_1^-(x_3)}{dx_3^j}\right| + \\ &+ |\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|\left|\frac{d^j e_0^-(x_3)}{dx_3^j}\right| \leqslant c_6\left(|r^-|\left|\frac{d^j e_1^-}{dx_3^j}\right| + \left|\frac{d^j e_0^-}{dx_3^j}\right|\right)|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|, \end{aligned}$$

так как

$$\left|\frac{r^- - r_1^-}{r_1^- r^- - \xi^2}\right| = \frac{1+\beta^-}{|(2+\beta^-)r_1^- + r^-|} \leqslant \frac{1}{|r_1^-|}.$$

Тогда на основании леммы 2.4 можно заключить, что

$$\begin{aligned} |||\mathbf{v}_2^-|||^2_{2+l,\gamma,D^-_\infty} &\leqslant c_7\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}|^2|r^-|^{2l+3}d\xi_0 d\xi = \\ c_7|||\boldsymbol{\varphi}|||^2_{3/2+l,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty} &\leqslant c_7(|||\mathbf{v}^+|||^2_{3/2+l,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty} + |||\mathbf{v}_1^-|||^2_{3/2+l,\gamma,\mathbb{R}^2_\infty}). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом неравенств (3.6), (3.7) и теорем вложения выводим:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_2^-\|_{\mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D^-_\infty)} &\leqslant c_8(\|\mathbf{v}^+\|_{\mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D^+_\infty)} + \|\mathbf{v}_1^-\|_{\mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D^-_\infty)}) \leqslant \\ &\leqslant c_9\|\mathbf{f}\|_{\bigcup_i \mathbf{H}_\gamma^{l,l/2}(D^i_\infty)}. \end{aligned}$$

Значит, для решения системы (3.1) справедлива оценка

$$\|\mathbf{v}'\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D_\infty^i)} \leqslant c_{10}\|\mathbf{f}\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_\gamma^{l,l/2}(D_\infty^i)}. \tag{3.8}$$

Для вектор-функции $\mathbf{v}''$ как решения однородной задачи (2.1) имеет место неравенство (2.23), т.е.

$$\begin{gathered}\|\mathbf{v}''\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D_\infty^i)} \leqslant c_{11}\Big\{\sum_{k=1}^{3}\|d_k\|_{H_\gamma^{l+1/2,l/2+1/4}(\mathbb{R}_\infty^2)}+\\ +\sigma\|D\|_{H_\gamma^{l-1/2,l/2-1/4}(\mathbb{R}_\infty^2)}+\|\mathbf{v}'\|_{\bigcup\limits_i \mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D_\infty^i)}\Big\}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Наконец, из (3.8), (3.9) следует оценка (2.24). Таким образом, существование решения $\mathbf{w} \in \bigcup\limits_{i=-,+} \mathbf{H}_\gamma^{2+l,1+l/2}(D_\infty^i)$ доказано. Докажем его единственность.

Пусть $\mathbf{f} = 0$, $d_k = 0$, $k = 1,2,3$, $D = 0$, тогда задача (2.1) эквивалентна однородной системе (2.3), (2.4), единственное решение которой, задаваемое формулами (2.6), (2.7), обращается в нуль при $b_k = d_k = 0$, $B = D = 0$. Это гарантировано тем фактом, что знаменатель P, как видно из неравенства (2.9), отграничен от нуля при $\gamma \geqslant \gamma_0 > 0$.

Теорема 2.1 доказана. $\bullet$

В заключение отметим, что теорему 1.1 можно установить путем доказательства существования обобщенного решения, как это сделано в случае двух несжимаемых жидкостей в [5], но проще, наверное, следовать работе [3], где разрешимость задачи (1.9) для одной жидкости доказывается методом построения регуляризатора.

Литература

1. В. А. Солонников, *Об одной начально-краевой задаче для системы Стокса, возникающей при изучении задачи со свободной границей.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **188** (1990), 150–188.
2. В. А. Солонников, *Разрешимость задачи об эволюции вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью, на конечном интервале времени.* — Алгебра и анализ **3**, No. 1 (1991), 222–257.
3. V. A. Solonnikov, A. Tani, *Free boundary problem for a viscous compressible flow with surface tension,* "Constantin Carathéodery: An International Tribute" edited by Th. M. Rassias 1991, World Scientific Publ. Co., 1270–1303.

4. И. В. Денисова, *Априорные оценки решения линейной нестационарной задачи, связанной с движением капли в жидкой среде.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **188** (1990), 3–21.
5. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Разрешимость линеаризованной задачи о движении капли в потоке жидкости.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **171** (1989), 53–65.
6. I. V. Denisova, *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface.* — Acta Appl. Math. **37** (1994), 31–40.
7. A. Tani, *Two-phase free boundary problem for compressible viscous fluid motion.* — J. Math. Kyoto Univ. **24,** No. 2 (1984), 243–267.
8. М. С. Агранович, М. И. Вишик, *Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида.* — УМН **19, вып. 3** (1964), 53–152.

Denisova I. V. Problem on the motion of two compressible fluids separated by a closed free interface.

A problem is considered on the simultaneous evolution of two barotropic capillary viscous compressible fluids occuping the whole space $\mathbb{R}^3$ and separated by a closed free interface. Under some restrictions on the viscosities of the eiquids, the local (in time) unique solvability of this problem is obtained in the Sobolev–Slobodetskii spaces. After the passage to the Lagrangean coordinates it is possible to exclude the renknown function of the fluid density from the system of equations. The proof of the solution existence of an nonlinear, non-coercive initial-boundary value problem received is based on the method of succesive approximations and on an explicite solution of a model linear problem with the plane interface between the eiquids. The restrictions on the viscosities mentioned above appear in the intermediate estimation of this explicit solution in the Sobolev spaces with an exponential weight.

Институт проблем
Машиноведения
РАН

Поступило 30 марта 1996 г.