И. Ш. Могилевский, В. А. Солонников

ЗАДАЧА ОБ УСТАНОВИВШЕМСЯ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГЕЛЬДЕРОВСКИХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Течение многих жидкостей не описывается адекватно системой уравнений Навье-Стокса. Такие жидкости часто называются "неньютоновскими", в их число входят, в частности, вязкоэластичные жидкости с "короткой памятью". Для описания движения такого рода жидкостей используются различные математические модели.

Один из примеров неньютоновских жидкостей – это так называемые жидкости второго порядка. Тензор напряжений для таких жидкостей имеет вид [1]

$$\pi = -pI + \mu S + \alpha_1 \left[\frac{d}{dt} S + S\nabla\bar{v} + (\nabla\bar{v})^T S \right] + \alpha_2 S^2,$$

где I – единичная матрица, S – тензор скоростей деформаций

$$S = (\nabla\bar{v}) + (\nabla\bar{v})^T, \quad \frac{d}{dt}S = \frac{\partial}{\partial t}S + \bar{v}\cdot\nabla S,$$

$\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$ – поле скоростей, p – давление, $\mu = const$ – коэффициент вязкости, $\alpha_1 = \mathrm{const}$ и $\alpha_2 = \mathrm{const}$ – нормальные модули напряжений.

Мы будем предполагать, что

$$\mu > 0, \quad \alpha_1 > 0, \tag{1.1}$$

не вдаваясь в дискуссию по поводу обоснованности последнего неравенства.

Задача об установившемся течении жидкости второго порядка состоит в следующем [2, 3]. Требуется найти вектор-функцию $\bar{v}(x) = (v_1, v_2, v_3)$ и скалярную функцию $p(x)$, удовлетворяющие в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ системе уравнений

$$\bar{v}\cdot\nabla\bar{v} - \alpha_1\bar{v}\cdot\nabla\Delta\bar{v} - \mu\Delta\bar{v} + \nabla\bar{p} - N(\bar{v}) = \bar{f}, \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \bar{v} = 0, \tag{1.3}$$

а на границе Γ области Ω – краевому условию

$$\bar{v}\big|_{\Gamma} = 0. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\begin{gathered} N(\bar{v}) = \alpha_1 (\nabla \bar{v})^T : \nabla S + \alpha_1 \nabla \cdot [SW - WS] + (\alpha_1 + \alpha_2) \nabla \cdot S^2, \\ W = \frac{1}{2}[(\nabla \bar{v}) - (\nabla \bar{v})^T], \end{gathered} \tag{1.5}$$

символ ":" означает свертку тензоров третьего порядка по двум индексам. Отметим сразу, что вектор $N(\bar{v})$ есть сумма, каждое слагаемое которой – это произведение некоторой производной первого порядка от $\bar{v}$ на производную второго порядка от $\bar{v}$.

В работах [2] и [3] задача (1.2), (1.3), (1.4) весьма подробно исследована в пространствах Соболева $H^m(\Omega)$ (m – натуральное). В этих работах доказаны теоремы существования и единственности решения задачи.

В настоящей статье мы устанавливаем аналогичные результаты в гельдеровских классах функций. Используемые при этом методы могут быть применены и к исследованию задачи в простраствах Соболева.

Через $C^l(\Omega)$ (l – положительное нецелое число) мы будем обозначать пространство функций, заданных в Ω, для которых конечна норма

$$\begin{gathered} |u|_{\Omega}^{(l)} = \sum_{|\alpha| \leqslant l} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)| + \\ + \sup_{x,y \in \Omega} \sum_{|\alpha| = [l]} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^{l-[l]}}. \end{gathered}$$

Здесь α – мультииндекс, $[l]$ – целая часть l.

Укажем расположение материала статьи. Сначала мы рассматриваем линеаризованную задачу и устанавливаем априорные оценки ее решения, основываясь на соответствующих оценках для решений транспортного уравнения и линеаризованной системы Стокса. Затем с помощью теоремы о неподвижной точке доказывается разрешимость линеаризованной задачи. И, наконец, решение нелинейной задачи (1.2), (1.3), (1.4) строится как предел последовательности решений линеаризованных задач.

Главным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть Ω – ограниченная область из R^3, l – нецелое положительное число и $\Gamma = \partial\Omega \in C^{l+3}$. Если $\bar{f} \in C^{l+1}(\Omega)$ и*

$$|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)} \leqslant K,$$

где K достаточно мало, то задача (1.2), (1.3), (1.4) *имеет единственное решение $\bar{v} \in C^{l+3}(\Omega)$, $p \in C^{l+2}(\Omega)$. Это решение удовлетворяет неравенству*

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |p|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)}$$

с константой C, зависящей от Ω, $K, \mu, \alpha_1, \alpha_2$.

Замечание. Так же, как и для системы Стокса, функция $p(x)$ нормируется условием $\int\limits_{\Omega} p dx = 0$.

§2. Вспомогательная линейная задача

В этом параграфе мы рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\mu\Delta\bar{v} - \bar{w}\cdot\nabla\Delta\bar{v} + \nabla p = \bar{f}, \quad \nabla\cdot\bar{v} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega$$
$$\bar{v}\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\bar{w}$ – заданный вектор, удовлетворяющий условию

$$\bar{w}\cdot\bar{n}\big|_{\Gamma} = 0, \tag{2.2}$$

где $\bar{n}$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ.

Прежде всего мы установим априорную оценку решения задачи (2.1).

Теорема 2. *Пусть $\bar{f} \in C^{l+1}(\Omega)$, $\Gamma \in C^{l+3}$, $\bar{w} \in C^{l+3}(\Omega)$. Предположим, что $(\bar{v}, p)$ есть решение задачи* (2.1) *такое, что $\bar{v} \in C^{l+3}(\Omega)$, $p \in C^{l+2}(\Omega)$. Тогда для этого решения выполняется оценка*

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |p|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)}, \tag{2.3}$$

если только норма $|\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}$ достаточно мала. Константа C в неравенстве (2.3) зависит от $\Omega, \mu, |\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}$.

Доказательство. Определим функцию $q(x)$ как решение транспортного уравнения

$$-\mu q - \bar{w} \cdot \nabla q = p. \tag{2.4}$$

Это уравнение подробно исследовано в работах [6] и [4]. В [4] доказано, что если $\|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)}$ достаточно мала по сравнению с μ, то уравнение (2.4) имеет единственное решение $q \in C^{l+2}(\Omega)$. В точной формулировке достаточное условие разрешимости уравнения (2.4) имеет вид: существует такое положительное число $\delta = \delta(l)$, что при условии

$$\delta \|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)} < \mu \tag{2.5}$$

и условии (2.2), уравнение (2.4) имеет единственное решение $q \in C^{l+2}(\Omega)$ и для этого решения выполняется неравенство

$$|q|_\Omega^{(l+2)} \leqslant \frac{1}{\mu - \delta \|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)}} |p|_\Omega^{(l+2)}. \tag{2.6}$$

Мы выразим ∇p, исходя из (2.4)

$$\nabla p = -\mu \nabla q - \nabla \bar{w} \cdot \nabla q - \bar{w} \cdot \nabla \nabla q$$

и подставим это представление в уравнение (2.1_1)

$$-\mu(\Delta \bar{v} + \nabla q) - \bar{w} \cdot \nabla(\Delta \bar{v} + \nabla q) = \bar{f} + \nabla \bar{w} \cdot \nabla q. \tag{2.7}$$

Обозначим $\Delta \bar{v} + \nabla q = \bar{z}$ и рассмотрим (2.7) как транспортное уравнение относительно $\bar{z}$

$$-\mu \bar{z} - \bar{w} \cdot \nabla \bar{z} = \bar{f} + \nabla \bar{w} \cdot \nabla q. \tag{2.8}$$

Так как $q \in C^{l+2}(\Omega)$, то $\bar{f} + \nabla \bar{w} \cdot \nabla q \in C^{l+1}(\Omega)$, и при условиях (2.2) и (2.5), согласно результатам [4], выполняется неравенство

$$|\bar{z}|_\Omega^{(l+1)} \leqslant C_1 [|\bar{f}|_\Omega^{(l+1)} + |\bar{w}|_\Omega^{(l+2)} |q|_\Omega^{(l+2)}], \tag{2.9}$$

где

$$C_1 = \frac{1}{\mu - \delta \|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)}}.$$

Теперь мы рассмотрим $(\bar{v}, q)$ как решение краевой задачи для линейной системы Стокса

$$\Delta\bar{v} + \nabla q = \bar{z}, \quad \nabla\cdot\bar{v} = 0, \quad \bar{v}\big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.10}$$

Как хорошо известно (из [5], например), для решения этой задачи выполняется неравенство

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |q|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C_2|\bar{z}|_{\Omega}^{(l+1)},$$

где C_2 зависит от l и Ω. Используя (2.9), мы получим отсюда

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |q|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C_1C_2[|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)} + |\bar{w}|_{\Omega}^{(l+2)}|q|_{\Omega}^{(l+2)}]. \tag{2.11}$$

Теперь мы потребуем, чтобы $\bar{w}$ удовлетворяло ограничению более сильному, чем (2.5), а именно

$$2C_2|\bar{w}|_{\Omega}^{(l+2)} + \delta\|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)} \leqslant \mu. \tag{2.12}$$

Тогда $|\bar{w}|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant \frac{1}{2C_1C_2}$, и из (2.11) мы получаем неравенство

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + \frac{1}{2}|q|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C_1C_2|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)}. \tag{2.13}$$

Для оценки давления $p(x)$ мы вновь обратимся к уравнению (2.1_1). Примем во внимание, что

$$\Delta(\bar{w}\cdot\nabla\bar{v}) = \Delta\bar{w}\cdot\nabla\bar{v} + \bar{w}\cdot\nabla\Delta\bar{v} + M(\bar{w}, \bar{v}),$$

где

$$M(\bar{w}, \bar{v}) = 2\left(\sum_{j,k=1}^{3}\frac{\partial w_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_j\partial x_i}\right)_{i=1,2,3}.$$

Тогда (2.1_1) перепишется в виде

$$-\mu\Delta\bar{v} - \Delta(\bar{w}\cdot\nabla\bar{v}) + \nabla p = \bar{f} - \Delta\bar{w}\cdot\nabla\bar{v} - M(\bar{w}, \bar{v}).$$

Обозначим $\bar{y} = \mu\bar{v} + \bar{w}\cdot\nabla\bar{v}$, тогда

$$\operatorname{div}\bar{y} = \sum_{i,k=1}^{3}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k},$$

так как $\nabla\cdot\bar{v} = 0$. В силу краевых условий $\bar{v}\big|_{\Gamma} = 0$ и $\bar{w}\cdot\bar{n}\big|_{\Gamma} = 0$ мы имеем

$$\bar{y}\big|_{\Gamma} = (\bar{w}\cdot\nabla)\bar{v}\big|_{\Gamma} = 0$$

Таким образом, $(\bar{y}, p)$ есть решение следующей краевой задачи для системы Стокса в области Ω

$$
\begin{gathered}
-\Delta\bar{y} + \nabla p = \bar{f} - \Delta\bar{w}\cdot\nabla\bar{v} - M(\bar{w},\bar{v}) \\
\nabla\cdot\bar{y} = \sum_{i,k}\frac{\partial w_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k}, \quad \bar{y}\big|_\Gamma = 0.
\end{gathered}
\tag{2.14}
$$

Для решения этой задачи имеет место неравенство [5]

$$
\begin{aligned}
|p|_\Omega^{(l+2)} &\leqslant C_3[|\bar{f}|_\Omega^{(l+1)} + |\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}|\bar{v}|_\Omega^{(l+2)} + |\bar{w}|_\Omega^{(l+2)}|\bar{v}|_\Omega^{(l+3)}] \leqslant \\
&\leqslant 2C_3[|\bar{f}|_\Omega^{(l+1)} + |\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}|\bar{v}|_\Omega^{(l+3)}],
\end{aligned}
$$

где C_3 зависит от l и Ω. Отсюда и из (2.13) получим

$$
|p|_\Omega^{(l+2)} \leqslant 2C_3[1 + C_1C_2|\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}]|\bar{f}|_\Omega^{(l+1)},
$$

что вместе с (2.13) приводит к неравенству (2.3), в котором

$$
C = 2C_3 + C_2\frac{1 + 2C_3|\bar{w}|_\Omega^{(l+3)}}{\mu - \delta\|\bar{w}\|_{C^{[l]+3}(\Omega)}}.
$$

Условие малости нормы $\bar{w}$, о котором говорится в условии теоремы, есть условие (2.12). Теорема доказана.

Установим теперь разрешимость задачи (2.1).

Теорема 3. *Пусть l и Ω такие же, как и в Теореме 1. Пусть, далее, $\bar{w}\in C^{l+3}(\Omega)$ и удовлетворяет условиям (2.2) и (2.12). Тогда для любого $\bar{f}\in C^{l+1}(\Omega)$ задача (2.1) имеет единственное решение $\bar{v}\in C^{l+3}(\Omega)$, $p\in C^{l+2}(\Omega)$.*

Доказательство. Установим сначала разрешимость следующей краевой задачи

$$
\begin{gathered}
-\mu(\Delta\bar{v} + \nabla q) - \bar{w}\cdot\nabla(\Delta\bar{v} + \nabla q) - \nabla\bar{w}\cdot\nabla q = \bar{f} \\
\nabla\cdot\bar{v} = 0 \quad x\in\Omega \\
\bar{v}\big|_\Gamma = 0
\end{gathered}
\tag{2.15}
$$

в пространстве $C^{l+3}(\Omega)\times C^{l+2}(\Omega)$.

Для этого построим соответствующий оператор. Пусть имеется пара функций $(\bar{u}, r) \in C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega)$. Определим вектор-функцию $\bar{z}$ как решение транспортного уравнения

$$-\mu\bar{z} - \bar{w} \cdot \nabla\bar{z} = \bar{f} + \nabla\bar{w} \cdot \nabla r.$$

Имеет место неравенство, аналогичное (2.9)

$$|\bar{z}|_{\Omega}^{(l+1)} \leqslant C_1[|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)} + |\bar{w}|_{\Omega}^{(l+2)}|r|_{\Omega}^{(l+2)}]. \tag{2.16}$$

Найдем теперь $(\bar{v}, q) \in C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega)$ как решение первой краевой задачи для системы Стокса

$$\Delta\bar{v} + \nabla q = \bar{z}, \quad \nabla\bar{v} = 0, \quad \bar{v}\big|_{\Gamma} = 0, \tag{2.17}$$

при условии нормировки

$$\int\limits_{\Omega}(\mu - \nabla \cdot \bar{w})q dx = 0.$$

Для этого решения выполняется оценка, аналогичная (2.11)

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |q|_{\Omega}^{(l+2)} \leqslant C_1C_2[|\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)} + |\bar{w}|_{\Omega}^{(l+2)}|r|_{\Omega}^{(l+2)}]. \tag{2.18}$$

Таким образом, мы построили оператор

$$T : C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega) \to C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega)$$

$$(\bar{v}, q) = T(\bar{u}, r).$$

Покажем теперь, что T есть сжимающий оператор, действующий в некотором шаре пространства $C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega)$. Предположим, что для некоторого $\eta > 0$

$$|\bar{u}|_{\Omega}^{(l+3)} + |r|_{\Omega}^{(l+2)} < \eta, \quad |\bar{f}|_{\Omega}^{(l+1)} < \frac{\eta}{2C_1C_2}.$$

Тогда, учитывая условие (2.12), получим из (2.18)

$$|\bar{v}|_{\Omega}^{(l+3)} + |q|_{\Omega}^{(l+2)} < \eta.$$

Это означает, что оператор T переводит в себя шар

$$B(0, \eta) \subset C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega).$$

Пусть $(\bar v^{\,1}, q^1) = T(\bar u^{\,1}, r^1)$ и $(\bar v^{\,2}, q^2) = T(\bar u^2, r^2)$. В силу линейности задачи (2.17) и неравенств (2.18) и (2.12),

$$|\bar v^{\,1} - \bar v^{\,2}|_\Omega^{(l+3)} + |q^1 - q^2|_\Omega^{(l+2)} \leqslant$$
$$\leqslant C_1 C_2 |\bar w|_\Omega^{(l+2)} |r^1 - r^2|_\Omega^{(l+2)} \leqslant \frac{1}{2}|r^1 - r^2|_\Omega^{(l+2)}.$$

Это означает, что T есть оператор сжатия, и уравнение

$$(\bar v, q) = T(\bar u, r)$$

имеет неподвижную точку $(\bar v, q) = T(\bar v, q)$. Эта пара функций есть решение задачи (2.15).

Для отыскания p перепишем уравнение (2.15_1) в виде

$$-\Delta(\bar w \cdot \nabla)\bar v + \nabla(-\mu q - \bar w \cdot \nabla q) = \bar f + \mu\Delta\bar v - \Delta\bar w \cdot \nabla\bar v - M(\bar w, \bar v).$$

Положим $p = -\mu q - \bar w \cdot \nabla q$ и рассмотрим пару функций $((\bar w \cdot \nabla)\bar v, p)$ как решение задачи

$$-\Delta(\bar w \cdot \nabla)\bar v + \nabla p = \bar f + \mu\Delta\bar v - \Delta\bar w \cdot \nabla\bar v - M(\bar w, \bar v) \equiv \bar g$$

$$\operatorname{div}(\bar w \cdot \nabla)\bar v = \sum_{i,k=1}^{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_i}\,\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \equiv h, \quad (\bar w \cdot \nabla)\bar v\big|_\Gamma = 0.$$

Здесь $\bar g \in C^{l+1}(\Omega)$, $h \in C^{l+2}(\Omega)$. Как показано в [5], существует решение этой задачи $(\bar w \cdot \nabla)\bar v \in C^{l+3}(\Omega)$, $p \in C^{l+2}(\Omega)$. Пара функций $(\bar v, p)$ есть решение задачи (2.1). Единственность решения следует из Теоремы 2. Теорема доказана.

§3. Разрешимость нелинейной задачи

Основываясь на результатах п. 2, мы построим решение задачи (1.2), (1.3), (1.4) как предел последовательности решений линеаризованных задач вида (2.1).

Доказательство Теоремы 1. Определим последовательные приближения. $(\bar u^{\,0}, r^0)$ есть решение первой краевой задачи для линеаризованной системы Стокса

$$-\mu\Delta\bar u^{\,0} + \nabla r^0 = \bar f, \quad \nabla \cdot \bar u^{\,0} = 0$$
$$\bar u^{\,0}\big|_\Gamma = 0.$$

Если $\bar f \in C^{l+1}(\Omega)$, то $\bar u^{\,0} \in C^{l+3}(\Omega)$, $r^0 \in C^{l+2}(\Omega)$ и

$$|\bar u^0|_\Omega^{(l+3)} + |r^0|_\Omega^{(l+2)} \leqslant C_2 |\bar f|_\Omega^{(l+1)}. \tag{3.1}$$

Для $m \geqslant 1$ возьмем в качестве $(\bar u^{\,m}, r^m)$ решение линейной краевой задачи

$$\begin{gathered} -\alpha_1 \bar u^{\,m-1} \cdot \nabla\Delta \bar u^{\,m} - \mu\Delta \bar u^{\,m} + \nabla r^m = \bar f - \bar u^{\,m-1} \cdot \nabla \bar u^{\,m-1} + N(\bar u^{m-1}) \\ \nabla \cdot \bar u^{\,m} = 0, \quad \bar u^{\,m}\big|_\Gamma = 0. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Если $\bar u^{\,m-1} \in C^{l+3}(\Omega)$ и $\alpha_1 \bar u^{\,m-1}$ удовлетворяет условиям (2.2) и (2.12), то

$$\bar u^{\,m-1} \cdot \nabla \bar u^{\,m-1} \in C^{l+2}(\Omega), \quad N(\bar u^{\,m-1}) \in C^{l+1}(\Omega)$$

и в силу Теорем 2 и 3 решение задачи (3.2) существует и удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} |\bar u^{\,m}|_\Omega^{(l+3)} + |r^m|_\Omega^{(l+2)} \leqslant C[|\bar f|_\Omega^{(l+1)} + \\ + |\bar u^{\,m-1}|_\Omega^{(l+1)} |\bar u^{\,m-1}|_\Omega^{(l+2)} + C_4 |\bar u^{\,m-1}|_\Omega^{(l+2)} |\bar u^{\,m-1}|_\Omega^{(l+3)}]. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Здесь C_4 – абсолютная положительная константа, определяемая структурой выражения $N(\bar v)$. Функции r^m удовлетворяют условиям

$$\int\limits_\Omega r^m dx = 0 \quad \text{для} \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Так как $\bar u^{\,m}\big|_\Gamma = 0$ для $m = 0, 1, \ldots$, то условие (2.2) выполняется для всех функций $\alpha_1 \bar u^{\,m}$ автоматически.

Сформулируем теперь требования, достаточные для равномерной ограниченности множества функций $\{\bar u^{\,m}\}$ в норме $C^{l+3}(\Omega)$.

Предположим сначала, что

$$\begin{gathered} 2\alpha_1 C_2 |\bar u^{\,m}|_\Omega^{(l+3)} < \frac{1}{2}\mu \\ \alpha_1 \delta |\bar u^{\,m}|_\Omega^{(l+3)} < \frac{1}{2}\mu. \end{gathered} \tag{3.4}$$

В этом случае условие (2.12) выполняется для всех функций $\alpha_1\bar{u}^m$ и вместо неравенства (3.3) имеет место неравенство

$$|\bar{u}^m|_\Omega^{(l+3)} + |r^m|_\Omega^{(l+2)} \leqslant C_5\left[|\bar{f}|_\Omega^{(l+1)} + (1+C_4)(|\bar{u}^{m-1}|_\Omega^{(l+3)})^2\right]$$
$$C_5 = 3C_3 + \frac{2C_2}{\mu}. \tag{3.5}$$

Это следует из представления константы C, полученного в доказательстве Теоремы 2.

Рассмотрим теперь положительное число η

$$\eta < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{C_5(1+C_4)}{2}, \frac{\mu}{4\alpha_1 C_2}, \frac{\mu}{2\alpha_1\delta}\right) \tag{3.6}$$

и потребуем, чтобы константа K, о которой идет речь в условии Теоремы 1, удовлетворяла условию

$$K < \min\left(\frac{\eta}{2C_5}, \frac{\eta}{C_2}\right). \tag{3.7}$$

В этом случае из (3.1) следует

$$|\bar{u}^0|_\Omega^{(l+3)} < \eta,$$

а из (3.5) следует, что

$$|\bar{u}^m|_\Omega^{(l+3)} \leqslant C_5K + C_5(1+C_4)(|\bar{u}^{m-1}|_\Omega^{(l+3)})^2$$

для $m \geqslant 1$.
Из последних двух неравенств по индукции получаем

$$|\bar{u}^m|_\Omega^{(l+3)} \leqslant \eta.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что условия (3.4) выполняются, и, следовательно,

$$|\bar{u}^m|_\Omega^{(l+3)} + |r^m|_\Omega^{(l+3)} \leqslant \eta \quad m = 0, 1, \ldots. \tag{3.8}$$

Это означает, что последовательность $\{(\bar{u}^m, r^m)\}$ равномерно ограничена в $C^{l+3}(\Omega) \times C^{l+2}(\Omega)$, если только выполняются условия (3.6) и (3.7).

Теперь мы покажем, что эта последовательность имеет только один частичный предел. С этой целью оценим L_2-норму разности $\bar{u}^m - \bar{u}^{m-1}$. Обозначим

$$\bar{z}^m = \bar{u}^m - \bar{u}^{m-1}, \quad s^m = r^m - r^{m-1}.$$

Из (3.2) мы получим, что $(\bar{z}^{\,m}, s^m)$ есть решение задачи

$$\begin{gathered} -\alpha_1 \bar{u}^{\,m-1} \cdot \nabla\Delta \bar{z}^{\,m} - \mu\Delta \bar{z}^m + \nabla s^m = \\ = -\alpha_1 \bar{z}^{\,m-1} \cdot \nabla\Delta \bar{u}^{\,m-1} - \bar{u}^{\,m-1} \cdot \nabla \bar{z}^{\,m-1} - \bar{z}^{\,m-1} \cdot \nabla \bar{u}^{\,m-2} + \\ + N'(\bar{u}^{\,m-1}, \bar{z}^{\,m-1}) + N'(\bar{z}^{\,m-1}, \bar{u}^{\,m-2}) \\ \nabla \cdot \bar{z}^{\,m} = 0, \quad \bar{z}^{\,m}\big|_{\Gamma} = 0. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь $N'(\bar{u}, \bar{v})$ обозначает сумму такого же типа, как и $N(\bar{u})$, причем слагаемые, входящие в $N'(\bar{u}, \bar{v})$ имеют вид $D^2\bar{u} \cdot \nabla \bar{v} + \nabla \bar{u} \cdot D^2 \bar{v}$. При этом

$$N'(\bar{u}, \bar{u}) = N(\bar{u}).$$

Умножим уравнение (3.9) на $\bar{z}^{\,m}$ и проинтегрируем результат по Ω. Мы получим равенство

$$\begin{gathered} I_1 + I_2 + I_3 = \alpha_1 \int\limits_{\Omega} (\bar{z}^{\,m-1} \cdot \nabla\Delta \bar{u}^{\,m-1}) \cdot \bar{z}^{\,m} dx - \\ - \int\limits_{\Omega} (\bar{u}^{\,m-1} \cdot \nabla \bar{z}^{\,m-1}) \cdot \bar{z}^{\,m} dx - \int\limits_{\Omega} (\bar{z}^{\,m-1} \cdot \nabla \bar{u}^{\,m-2}) \cdot \bar{z}^{\,m} dx + \\ + \int\limits_{\Omega} N'(\bar{u}^{\,m-1}, \bar{z}^{\,m-1}) \cdot \bar{z}^{\,m} dx + \int\limits_{\Omega} N'(\bar{z}^{\,m-1}, \bar{u}^{\,m-2}) \cdot \bar{z}^{\,m} dx, \end{gathered} \tag{3.10}$$

где

$$I_1 = -\alpha_1 \int\limits_{\Omega} (\bar{u}^{\,m-1} \cdot \nabla\Delta \bar{z}^{\,m}) \bar{z}^{\,m}\, dx$$

$$I_2 = -\mu \int\limits_{\Omega} \Delta \bar{z}^{\,m} \cdot dx, \quad I_3 = \int\limits_{\Omega} \nabla s^m \cdot \bar{z}^{\,m} \cdot \bar{z}^{\,m} dx.$$

Преобразуем I_1, I_2, I_3 интегрированием по частям, учитывая, что вектора $\bar{u}^{m-1}$ и $\bar{z}^{m}$ соленоидальны и обращаются в ноль на Γ.

Имеем

$$
\begin{gathered}
I_1 = -\alpha_1 \sum_{i,k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} u_k^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta z_i^m) z_i^m \, dx = \\
= \alpha_1 \sum_{i,j,k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 z_i^m}{\partial x_k \partial x_j} \left(\frac{\partial u_k^{m-1}}{\partial x_j} z_i^m + u_k^{m-1} \frac{\partial z_i^m}{\partial x_j} \right) dx = \\
= -\alpha_1 \sum_{i,j,k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_j} z_i^m \frac{\partial}{\partial x_k} z_i^m \, dx,
\end{gathered} \tag{3.11}
$$

$$
I_2 = \mu \sum_{k,i=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} z_k^m \right)^2 dx, \quad I_3 = 0.
$$

Поэтому из (3.10) и (3.11) следует

$$
\begin{gathered}
\mu \|\nabla \bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}^2 = \alpha_1 \sum_{i,j,k=1}^{3} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} u_k^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_j} z_j^m \frac{\partial}{\partial x_k} z_i^m \, dx + \\
+ \alpha_1 \int\limits_{\Omega} (\bar z^{\,m-1} \cdot \nabla \Delta \bar u^{\,m-1}) \bar z^{\,m} \, dx - \\
- \int\limits_{\Omega} (\bar u^{\,m-1} \cdot \nabla \bar z^{\,m-1}) \bar z^{\,m} \, dx - \int\limits_{\Omega} (\bar z^{\,m-1} \cdot \nabla \bar u^{\,m-2}) \cdot \bar z^{\,m} \, dx + \\
+ \int\limits_{\Omega} N'(\bar u^{\,m-1}, \bar z^{\,m-1}) \cdot \bar z^{\,m} \, dx + \int\limits_{\Omega} N'(\bar z^{\,m-1}, \bar u^{\,m-2}) \cdot \bar z^{\,m} \, dx.
\end{gathered} \tag{3.12}
$$

Оценим теперь интегралы из правой части (3.12), используя систематически неравенства Коши, Пуанкаре–Фридрихса, а также тот факт, что

$$
\sup_{x \in \Omega} |D^\gamma \bar u^{\,m}(x)| < \eta \quad \text{для} \quad \gamma = 0, 1, 2, 3
$$

(последнее следует из (3.8)).

$$\sum_{i,j,k=1}^{3}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}u_k^{m-1}\frac{\partial}{\partial x_j}z_i^m\frac{\partial}{\partial x_k}z_i^m\,dx \leqslant C_6\eta\|\nabla\bar z^{\,m}\|^2_{2,\Omega}$$

$$\int_{\Omega}(\bar z^{\,m-1}\cdot\nabla\Delta\bar u^{\,m-1})\bar z^{\,m}dx \leqslant C_7\eta\|\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega} \leqslant$$

$$\leqslant C_8\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega},$$

$$\int_{\Omega}(\bar u^{\,m-1}\cdot\nabla\bar z^{\,m-1})\bar z^{\,m}dx \leqslant C_9\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}$$

$$\int_{\Omega}(\bar z^{\,m-1}\cdot\nabla\bar u^{\,m-2})\bar z^{\,m}\,dx \leqslant C_{10}\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}.$$

Учитывая вид выражений $N'(\bar u^{\,m-1},\bar z^{\,m-1})$ и $N'(\bar z^{\,m-1},\bar u^{\,m-2})$ и применяя в случае необходимости формулу интегрирования по частям, получим

$$\int_{\Omega}N'(\bar u^{\,m-1},\bar z^{\,m-1})\cdot\bar z^{\,m}\,dx \leqslant C_{11}\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}$$

$$\int_{\Omega}N'(\bar z^{\,m-1},\bar u^{\,m-2})\cdot\bar z^{\,m}dx \leqslant C_{12}\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}.$$

Константы $C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ зависят только от области Ω.

Используя последнюю серию неравенств, мы заключаем из (3.12)

$$\mu\|\nabla\bar z^{\,m}\|^2_{2,\Omega} \leqslant \alpha_1 C_6\eta\|\nabla\bar z^{\,m}\|^2_{2,\Omega}+$$
$$+[\alpha_1C_8+C_9+C_{10}+C_{11}+C_{12}]\eta\|\nabla\bar z^{\,m-1}\|_{2,\Omega}\|\nabla\bar z^{\,m}\|_{2,\Omega}. \qquad (3.13)$$

Потребуем теперь в дополнение к (3.6), чтобы

$$\eta < \min\left(\frac{1}{2\alpha_1C_6}, \frac{\mu}{2[\alpha_1C_8+C_9+C_{10}+C_{11}+C_{12}]}\right). \qquad (3.14)$$

Тогда из (3.13) следует, что

$$\|\nabla \bar{z}^{\,m}\|_{2,\Omega} \leqslant \beta \|\nabla \bar{z}^{\,m-1}\|_{2,\Omega}, \quad \text{где} \quad \beta < 1.$$

Это означает, что

$$\|\bar{u}^{\,m} - \bar{u}^{\,m-1}\|_{W_2^1(\Omega)} \underset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Следовательно, последовательность $\{\bar{u}^{\,m}\}$ имеет единственный слабый предел $\bar{v}$ в $C^{l+3}(\Omega)$. Это, в частности, означает, что $D^\gamma \bar{u}^{\,m} \to D^\gamma \bar{v}$ сильно в $C(\Omega)$ для $\gamma = 0, 1, 2, 3$. Из уравнения (3.2_1) мы заключаем теперь, что последовательность $\{\nabla r^m\}$ имеет единственный предел в $C(\Omega)$. Поэтому, в силу равномерной ограниченности последовательности $\{r^m\}$ в норме $C^{l+2}(\Omega)$, эта последовательность слабо сходится в $C^{l+2}(\Omega)$ к некоторому пределу p. Пара $(\bar{v}, p)$ и есть решение задачи (1.2), (1.3), (1.4). Тем самым установлена разрешимость задачи (1.2), (1.3), (1.4) при условиях (3.6), (3.7) и (3.14). Теорема доказана.

Теорема 1 остается справедливой, если в ее формулировке заменить l на $l-1$ при $0 < l < 1$. Другими словами, если $\Gamma \in C^{l+2}$, $\bar{f} \in C^l(\Omega)$ и $|\bar{f}|_\Omega^{(l)}$ достаточно мала, то задача (1.2), (1.3), (1.4) имеет единственное решение $\bar{v} \in C^{l+2}(\Omega)$, $p \in C^{l+1}(\Omega)$. При $l \in (0,1)$ уравнение (1.2) понимается как интегральное тождество

$$\int\limits_\Omega \{[\bar{v}\cdot\nabla\bar{v} - \mu\Delta\bar{v} + \nabla p - N(\bar{v})]\cdot\bar{\phi} + \alpha_1 \bar{v}\cdot\Delta\bar{v}\cdot\nabla\bar{\phi}\}dx = \int\limits_\Omega \bar{f}\cdot\bar{\phi}\,dx,$$

справедливое для всякой вектор-функции $\bar{\phi} \in C_0^\infty(\Omega)$. Приведенные выше рассуждения остаются в силе.

Литература

1. R. S. Rivlin, J. L. Ericksen, *Stress-deformation relations for isotropic materials.* — J. Rational Mech. Anal. **4** (1955), 323–425.
2. V. Cosia, G. P. Galdi, *Existence, uniqueness and stability of regular steady motionas of a second-grade fluid.* — Int. J. Non-Linear Mech. **29,** No. **4** (1994), 493–506.
3. G. P. Galdi, *Mathematical theory of second-grade fluids.* Stability and wave propagation in fluids and solids. 1995, pp. 67–104.
4. A. Novotny, *About the steady transport equation II – Schauder estimates in domains with smooth boundaries.* — Preprint Univ. Toulon (1994).

5. В. А. Солонников, *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга, I.* — Изв. Акад. Наук СССР, Сер. матем. **28** (1964), 665–706; II Труды Матем. ин-та АН СССР **92**, (1966), 233–297.
6. Beirao da Veiga H., *On a stationary transport equation.* — Ann Univ. Ferrara, Sc. Mat. **32** (1986), 76–91.

Moghilevskii I. Sh., Solonnikov V. A. Investigation of a problem governing a steady flow of the second grade fluid in the Hölder classes of functions.

The paper concerns the boundary-value problem (with a usual adherence boundary condition) for a stationary system of equations of motion of the second grade fluids in a bounded domain. This system is not elliptic and it contains third order derivatives of the velocity vector field that introduces obvious difficulties into the analysis of the above problem. It is known that it reduces to the usual Stones problem and to the transport equations or its analogues. We present a new, somewhat easier method of such a reduction which made it possible to prove the solvability of a stationary boundary value problem for the equations of motion of the second grade fluids in the Hölder classes of functions in the case of small exterior forces.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стекова АН СССР

Поступило 14 декабря 1995 г.