В. Г. Осмоловский

БИФУРКАЦИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЗАДАЧАХ О ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДАХ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

§1. Введение

В этой работе продолжается изучение вариационных задач о фазовых переходах в механике сплошных сред, начатое в [1–6]. Здесь мы рассматриваем задачу с плотностями энергии из [5], соответствующую классической упругой среде, находящейся в однопараметрическом силовом поле. Фазы отличаются друг от друга лишь тем, что на одну из них двейстувет внешнее силовое поле, а на другую – нет. Предлагаемые методы дают возможность исследовать и более общие плотности энергии. Выбор указанных выше плотностей сделан ради сокращения выкладок.

Напомним постановку задачи Пусть $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 2$ – ограниченная область с липшицевой границей, $M \in R^{m\times m}$, $u \in R^m$. Зададим ограниченные измеримые функции $a_{ij,kl}(x)$, $x \in \Omega$, $i, j, k, l = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям симметрии

$$a_{ij,kl}(x) = a_{kl,kj}(x) = a_{ji,kl}(x) = a_{ij,lk}(x), \quad x \in \Omega$$

и условию положительной определенности

$$a_{ij,kl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl} \geqslant \nu\xi_{ij}\xi_{ij}, \quad \nu > 0$$

справедливому для всех симметричных матриц ξ. Фиксируем силовое поле – вектор-функцию

$$f(x) = (f^1(x), \dots, f^m(x)), \quad f \in L_2(\Omega, R^m).$$

Определим плотности энергии деформации $F^{\pm}(M, u, x, \tau)$ равен-

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS, No. 94-1376, РФФИ 96-91-00790 и Роскомвуза РФ по высшему образованию.

ством
$$\begin{gathered}
F^{+}(M,u,x) = a_{ij,kl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl} - 2\tau f^i(x)u^i, \\
F^{-}(M,u,x) = a_{ij,kl}(x)\xi_{ij}\xi_{kl}, \\
\xi = \frac{1}{2}(M+M^*).
\end{gathered} \tag{1.1}$$
В этом случае функционал энергии имеет вид
$$\begin{gathered}
I[u,\chi,\tau] = \\
= \int\limits_{\Omega} [a_{ij,kl}(x)u^i_{x_j}(x)u^k_{x_1}(x) - 2\tau f^i(x)u^i(x)\chi(x)]dx + \sigma \int\limits_{\Omega} |D_\chi|, \\
\chi \in BV(\Omega) \quad \text{– характеристическая функция}, \\
u \in \mathring{W}{}^1_2(\Omega, R^m), \quad \tau \in R^1, \quad \sigma > 0.
\end{gathered} \tag{1.2}$$
Нетрудно видеть, что плотности (1.1) удовлетворяют всем условиям теоремы сущестования из [2]. Поэтому при каждом τ функционал (1.2) достигает своего минимального значения.

В этой работе определяется множество значений параметра τ, при которых регулярная критическая точка является локальным минимумом функционала энергии относительно малых гладких возмущений, и множество значений параметра, в котором это свойство теряется. Исследуется задача о бифуркации границы раздела фаз при пересечении параметром τ границы, разделяющей эти множества. Под регулярной критической точкой для функционала (1.2) будем понимать достаточно гладкое решение уравнения равновесия для этого функционала. Для простоты выкладок мы ограничимся таким решением, которое не зависит явно от τ.

В §2 приводятся вспомогательные построения, позволяющие в §3 проварьировать функционалы энергии, получив уравнения равновесия и построить решение $\hat{u}, \hat{\chi}$ этого уравнения, не зависящее явно от τ. В §4 строится специальное семейство диффеоморфизмов области Ω, позволяющее в §5 изучить устойчивость решения $\hat{u}, \hat{\chi}$ при изменении параметра τ, а в §6 определить бифуркационные значения параметра τ. В §7 собраны библиографические замечания.

§2. Вспомогательные построения

Начнем с описания множества всех достаточно гладких диффеоморфизмов области Ω, лежащих в некоторой малой окрестности тождественного. Это описание базируется на ряде элементарных фактов (сформулированных в виде лемм) и теореме о неявных функциях.

Лемма 2.1. *Пусть отображение $f : R^m \to R^m$ является гомеоморфизмом. Тогда для произвольной области $\Omega \subset R^m$ множество $f(\Omega)$ является областью, причем $f(\bar{\Omega}) = \overline{f(\Omega)}$ и $\partial f(\Omega) = f(\partial\Omega)$.*

При некоторых (быть может чрезмерных) ограничениях легко устанавливается следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть $f : R^m \to R^m$ – гомеоморфизм пространства R^m, а $\Omega \subset R^m$ – ограниченная область, для которой множество $R^m \backslash \bar{\Omega}$ связно. Пусть $\Omega \cap f(\Omega) \neq \emptyset$ и $f(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$. Тогда $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$ и $f(\Omega) = \Omega$.*

Рассмотрим отображение $R^m \to R^m$ вида

$$y = f(x) = x + h(x), \quad x \in R^m, \quad h \in C^k(R^m, R^m), \|h\|_{C^k} < \delta, \quad (2.1)$$

где k – натуральное. Будем говорить, что отображение (2.1) осуществляет диффеоморфизм пространства R^m, если f взаимооднозначно, а f^{-1} – k-раз непрерывно дифференцируемо.

Лемма 2.3. *При достаточно малом δ отображение* (2.1) *осуществляет диффеоморфизм пространства R^m.*

До сих пор мы имели дело с отображениями пространства R^m. Займемся теперь диффеоморфизмами области $\Omega \subset R^m$ при следующих ограничениях

$$\begin{aligned} &\Omega \subset R^m \text{ – ограниченная область,} \\ &R^m \backslash \bar{\Omega} \text{ – связное множество,} \\ &\partial\Omega \in C^{l+k}, \quad l \geqslant 1,\ k \geqslant 1 \text{ – целые.} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Так как $k + l \geqslant 2$, то существует функция $d(x)$, $x \in R^m$, $d \in C^{k+l}(R^m)$, совпадающая в малой окрестности $\partial\Omega$ с расстоянием от точки $x \in R^m$ до $\partial\Omega$, взятым со знаком $+$, если $x \in R^m \backslash \Omega$ и знаком $-$ – при $x \in \Omega$. Заметим, что

$$\nabla d(x) = n(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

где $n(x)$ – поле единичных нормалей к $\partial\Omega$, внешнее по отношению к Ω.

Рассмотрим отображения

$$y = f(x) = x + h(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad h \in C^k(\bar{\Omega}, R^m), \quad \|h\|_{C^k} < \delta. \quad (2.3)$$

Будем говорить, что отображение (2.3) осуществляет диффеоморфизм области Ω, если f взаимооднозначно, $f(\Omega) = \Omega$, $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$ и $f^{-1} \in C^k(\bar{\Omega}, R^m)$.

Лемма 2.4. *Пусть область Ω удовлетворяет условиям (2.2). Тогда при достаточно малом δ отображение (2.3) будет диффеоморфизмом области Ω в том и только том случае, если*

$$d(f(x)) = 0 \quad \textit{при} \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Доказательство. Если f – диффеоморфизм области Ω, то по определению $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$, поэтому $d(f(x)) \equiv 0$ на $\partial\Omega$. Таким образом, в доказательстве нуждается лишь обратное утверждение.

Пусть число R таково, что область Ω является строго внутренней подобластью шара $B_R(0)$. Обозначим через $\Pi_{\bar{\Omega}}$ ограниченный оператор продолжения

$$\begin{aligned} &\Pi_{\bar{\Omega}} : C^k(\bar{\Omega}, R^m) \to C^k(R^m, R^m), \\ &(\Pi_{\bar{\Omega} h})(x) = h(x) \quad \text{при} \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \operatorname{supp}(\Pi_{\bar{\Omega}} h) \subset B_R(0). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть $\hat{f}(x) = x + \hat{h}(x)$, $\hat{h}(x) = (\Pi_{\bar{\Omega}} h)(x)$, где $h \in C^k(\bar{\Omega}, R^m)$, $\|h\|_{C^k} < \delta$. По лемме 2.3 при достаточно малом δ отображение $\hat{f}$ будет диффеоморфизмом пространства R^m. Поскольку $\hat{f}(x) \equiv f(x)$ на $\bar{\Omega}$, то для доказательства леммы 2.4 осталось установить, что $\hat{f}$ удовлетворяет условиям леммы 2.2: $\Omega \cap \hat{f}(\Omega) \neq \emptyset$ и $\hat{f}(\partial\Omega) \subset \partial\Omega$. Первое из этих условий заведомо выполняется при достаточно малом δ, а второе следует из (2.4). •

Для описания всех диффеоморфизмов вида (2.3) нам потребуется лемма 2.4 и теорема о неявных функциях в банаховом пространстве. Приведем ее формулировку.

Теорема о неявных функциях. *Пусть X, Y, Z – три банаховых пространства, $U \subset X \times Y$ – открытое множество, содержащее точку $\{0, 0\}$. Пусть $F : U \to Z$ – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение, причем $F[0, 0] = 0$, а оператор $F_y[0, 0]$ осуществляет изоморфизм пространства Y и Z. Тогда при достаточно малых положительных ρ и δ множество всех решений задачи*

$$F[x, y] = 0, \quad \|x\| \leqslant \rho, \quad \|y\| \leqslant \delta$$

задается равенством

$$y = u(x),$$

где u – l*-раз непрерывно дифференцируемое отображение шара радиуса* ρ *пространства* X *в шар радиуса* δ *пространства* Y*, удовлетворяющее условию* $u[0] = 0$*. Для производной* $u'[0]$ *справедлива формула*

$$u'[0] = -F_y^{-1}[0,0]F_x[0,0].$$

Одним из приложений этой теоремы является задача о локальном описании множества всех решений нелинейного уравнения при некоторых дополнительных ограничениях. Пусть U – некоторая окрестность нуля банахова пространства H, $\Phi : U \to Z$ – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение окрестности U в банахово пространство Z, причем $\Phi[0] = 0$, оператор $\Phi'[0]$ имеет нетривиальное ядро N

$$N = \{\, h \in H : \Phi'[0]h = 0 \,\},$$

а его образ совпадает с пространством Z. Предположим, что пространство H раскладывается в прямую сумму замкнутых подпространств

$$H = N \dot{+} N'.$$

Рассмотрим задачу

$$\Phi[h] = 0, \quad h \in U \tag{2.6}$$

в достаточно малой окрестности U. Запишим эту задачу в виде

$$F[g, v] \equiv \Phi[h] = 0, \quad h = g + v, \quad h \in U, \quad g \in N, \quad v \in N'$$

и, применяя к ней теорему о неявных функциях, придем к выводу, что множество всех решений задачи (2.6) имеет вид

$$h = g + R[g], \quad g \in N, \quad ||g|| \leqslant \delta, \tag{2.7}$$

где R – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение δ-окрестности нуля пространства N в пространство N', причем

$$R[0] = 0, \quad R'[0] = 0. \tag{2.8}$$

С помощью леммы 2.4 и теоремы о неявных функциях легко получить следующий результат.

Лемма 2.5. *При достаточно малом δ множество всех отображений из* (2.3)*, осуществляющих диффеоморфизм области Ω, представимо в виде*

$$y = f(x) = x + g(x) + R[g](x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{2.11}$$

где g – произвольный элемент из малой окрестности нуля пространства

$$g \in C^k(\bar{\omega}, R^m), \quad (g, n)\big|_{\partial\omega} = 0, \tag{2.12}$$

а R – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение этой окрестности в пространство H, для которого выполняются условия (2.8).

Напомним теперь формулу интегрирования по частям на поверхности. Пусть ограниченная область $\hat{\Omega} \subset R^m$, $\partial\hat{\Omega} \in C^2$, $n(x)$, $x \in \partial\hat{\Omega}$ – поле единичной внешней нормали. Через $\hat{n}(x)$, $x \in R^m$ будем обозначать непрерывно дифференцируемое векторное поле, совпадающее с внешней нормалью при $x \in \partial\hat{\Omega}$. Введем оператор

$$\delta_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \hat{n}_i(x)\hat{n}_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.13}$$

Для непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$, $x \in R^m$ вектор

$$\delta g(x) = (\delta_1 g(x), \ldots, \delta_m g(x))$$

при $x \in \partial\hat{\Omega}$ является касательной к $\partial\hat{\Omega}$ составляющей компонентой $\nabla g(x)$. Заметим, что $\delta g(x)$, $x \in \partial\hat{\Omega}$ зависит лишь от $\partial\hat{\Omega}$ и значения функции $g(x)$ на $\partial\hat{\Omega}$.

Пусть $\Sigma \subset \partial\hat{\Omega}$ – открытое связное множество с $\partial\Sigma \in C^1$. Обозначим через $t(x)$, $x \in \partial\Sigma$ единичное поле внешних по отношению к Σ нормалей к $\partial\Sigma$, лежащих при каждом x в касательной плоскости к $\partial\hat{\Omega}$. Элемент площади Σ и $\partial\Sigma$ будем обозначать через dS_{m-1} и dS_{m-2} соответственно.

Лемма 2.6. *Для любой функции $h \in C^1(R^m, R^m)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Sigma} \delta_i h^i \, dS_{m-1} = \int\limits_{\partial\Sigma} h^i t^i \, dS_{m-2} - \int\limits_{\Sigma} (H)(\delta_j n^j) \, dS_{m-1}. \tag{2.14}$$

Величина $H = -\delta_j n^j$ называется средней кривизной поверхности Σ. Заметим, что при $m = 2$ интеграл по $\partial\Sigma$ превращается в подстановку. Этот факт автоматически учитывается во всех дальнейших выкладках.

Пусть $\hat\chi$ – характеристическая функция множества $\Omega\cap\hat\Omega$, а $y = y(x)$ – диффеоморфизм области Ω. Пусть $\tilde\chi(y) = \hat\chi(x(y))$, где $x = x(y)$ – диффеоморфизм обратный к $y(x)$.

Лемма 2.7. *Справедливо следующее равенство*

$$\int\limits_\Omega |D\tilde\chi| - \int\limits_\Omega |D\hat\chi| = \int\limits_\Sigma \left[\det \dot y(x)\left|\dot y^{*-1}(x)n(x)\right| - 1\right]\,dS. \qquad (1.13)$$

где $\Sigma = \partial\hat\Omega\cap\Omega$.

§3 Уравнения равновесия

Рассмотрим функционал энергии двуфазовой среды с плотностями энергии (1.1). Коэффициенты $a_{ij,kl}(x)$ и поле $f(x)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в $\bar\Omega$, а область Ω – удовлетворяющей условиям (2.2) с $k = 2$, $l = 1$.

Пусть $\hat u$, $\hat\chi$ – состояние равновесия функционала (1.2) при фиксированном τ. Сделаем ряд предположений относительно функции $\hat\chi$. Предположим существование такой ограниченной области $\hat\Omega\subset R^m$ (возможно и пустой), что

$$\partial\hat\Omega\in C^2, \quad \operatorname{supp}\hat\chi = \Omega\cap\bar{\hat\Omega},$$

а граница раздела фаз $\Sigma = \partial\hat\Omega\cap\Omega$ является связным множеством с $(m-2)$-мерной границей $\partial\Sigma = \partial\Omega\cap\partial\hat\Omega$ класса C^1.

Теорема 1.1. *При сделанных выше предположениях*

$$\hat u\in W^2_q(\Omega, R^m)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m) \qquad (3.1)$$

с любым $q\in[1,\infty)$ *и является решением уравнения*

$$\begin{aligned} &L\hat u = \tau\hat\chi f, \quad \hat u\big|_{\partial\Omega} = 0,\\ &(L\hat u)^k = -\frac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{ij,kl}(x)\frac{\partial\hat u^i(x)}{\partial x_j}\right), \quad k = 1,\dots,m. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

На границе раздела фаз Σ *выполняется условие*

$$-2\tau f^i(x)\hat u^i(x) = \sigma H(x), \quad x\in\Sigma, \qquad (3.3)$$

где $H(x)$ – средняя кривизна $\partial\hat{\Omega}$, сосчитанная по полю внешней к $\partial\hat{\Omega}$ нормали. Если $\overline{\Sigma} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ и $(m-2)$-мерная площадь множества $\partial\Sigma \cap \partial\Omega$ положительна, то

$$\overline{\Sigma} \text{ пересекает } \partial\Omega \text{ под прямым углом.} \tag{3.4}$$

Доказательство. Варьируя сначала функционал (1.2) только по u, придем к выводу, что $\hat{u} \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m)$ – обобщенное решение задачи (3.2). Из эллиптичности этой задачи, указанной гладкости коэффициентов $a_{ij,kl}$, функции f и границы области Ω следует (3.1). Тогда (3.2) выполняется в классическом смысле.

Проварьируем теперь функционал энергии по χ. Пусть $\chi(y) = \hat{\chi}(x(y))$, где $y = y(x)$ – отображение из леммы 2.5, в котором функция $g(x)$ заменена на $tg(x)$, $|t| \leqslant 1$, $t \in R^1$. Вводя обозначение $P(x) = \tau f^i(x)\hat{u}^i(x)$, получим

$$\int\limits_{\Omega} \hat{\chi}(x(y))P(y)\,dy = \int\limits_{\Omega} \hat{\chi}(x)P(y(x)) \det \dot{y}(x)\,dx = \\ = \int\limits_{\Omega\cap\hat{\Omega}} P(y(x)) \det \dot{y}(x)\,dx.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \hat{\chi}(x(y))P(y)\,dy = \int\limits_{\Omega\cap\hat{\Omega}} \operatorname{div}(P(x)g(x))\,dx.$$

Производя интегрирование по частям и учитывая равенство $P(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega$, получим при $\Sigma \neq \emptyset$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \hat{\chi}(x(y))P(y)\,dy = \int\limits_{\Sigma} P(x)g^i(x)n^i(x)\,dS,$$

где $n(x)$ – поле единичной внешней нормали к $\partial\hat{\Omega}$.

Для вариации периметра носителя функции $\hat{\chi}(x(y))$ воспользуемся формулой (1.13). Тогда равенство нулю вариации функционала (1.2) по χ приводит при $\Sigma \neq \emptyset$ к соотношению

$$0 = \int\limits_{\Sigma} \left\{\tau f^i(x)\hat{u}^i(x) + \sigma H(x)\right\} n^j(x)g^j(x)\,dS_{m-1} - \\ - \int\limits_{\partial\Sigma} g^i(x)t^i(x)\,dS_{m-2},$$

где $n(x)$ – поле единичной внешней нормали к $\partial\hat{\Omega}$, $t(x)$ – поле единичной внешней нормали к $\partial\Sigma$, лежащей в касательной плоскости к $\partial\hat{\Omega}$, а $g(x)$ – произвольная функция из $C^2(\bar{\Omega}, R^m)$ с нулевой нормальной компонентой на $\partial\Omega$.

Пользуясь произволом функции $g(x)$ и последним равенством, завершим доказательство теоремы. •

Нас будут интересовать дополнительные ограничения на $\hat{\Omega}$ и f, при выполнении которых некоторая пара функций $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ будет удовлетворять условиям (3.1)–(3.5) при всех $\tau \in R^1$. В качестве таких ограничений заведомо подходят следующие

$$\begin{aligned}&\Sigma = \partial\hat{\Omega} \cap \Omega \neq \emptyset,\\ &H(x) = 0, \quad f(x) = 0, \quad \text{при} \quad x \in \Sigma,\\ &\partial\hat{\Omega} \text{ пересекает } \partial\Omega \text{ под прямым углом.}\end{aligned} \tag{3.6}$$

В этом случае пара

$$\begin{aligned}&\hat{\chi} - \text{характеристическая функция множества } \hat{\Omega} \cap \Omega\\ &\hat{u}(x) - \text{решение задачи (3.2)}\end{aligned} \tag{3.7}$$

удовлетворяет условиям (3.1)–(3.4) при всех τ.

Цель данной главы – найти значения параметра τ, при которых от решения (3.7) задачи (3.1)–(3.4) ответвляется отличное от него решение этой задачи.

§4. Деформации вдоль нормали

Пусть Ω и $\hat{\Omega}$ – ограниченные области в R^m, удовлетворяющие следующим условиям

а) $\partial\Omega \in C^{l+k+1}$, $\partial\hat{\Omega} \in C^{l+k+1}$, $k \geqslant 1$, $l \geqslant 0$ – целые,

б) $\Sigma = \partial\hat{\Omega} \cap \Omega \neq \emptyset$ открытое связное множество, $\partial\Sigma = \partial\hat{\Omega} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ и состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых является $(m-2)$-мерным многообразием класса C^{l+k+1},

в) $\partial\hat{\Omega}$ пересекается с $\partial\Omega$ под прямым углом.

Пусть $\nu(x)$, $x \in \partial\Omega$ и $n(x)$, $x \in \partial\hat{\Omega}$ – поля единичных внешних нормалей к $\partial\Omega$ и $\partial\hat{\Omega}$ соответственно. Через $d(x)$, $x \in R^m$ обозначим функцию класса C^{l+k+1}, совпадающую при x, лежащих в малой окрестности $\partial\Omega$ с расстоянием от x до $\partial\Omega$, взятым со знаком +

при $x \in R^m \backslash \Omega$ и знаком $-$ при $x \in \Omega$. Будем считать, что $d(x) = 0$ лишь при $x \in \partial\Omega$. Так как $l + k + 1 \geqslant 2$, то такая функция существует. Аналогичную функцию для области $\hat{\Omega}$ обозначим через $\rho(x)$. Тогда

$$\nabla d(x) = \nu(x), \quad x \in \partial\Omega, \qquad \nabla\rho(x) = n(x), \quad x \in \partial\hat{\Omega}.$$

Лемма 4.1. *Пусть области* Ω *и* $\hat{\Omega}$ *удовлетворяют условиям* а), б), в). *Тогда существуют такие векторные поля* $\tilde{\nu}(x)$ *и* $\tilde{n}(x)$, $x \in R^m$, *что*

$$\tilde{\nu} \in C^{k+l-1}(R^m, R^m), \quad \tilde{n} \in C^{k+l-1}(R^m, R^m),$$
$$\tilde{\nu}(x) = \nu(x), \quad x \in \partial\Omega, \qquad \tilde{n}(x) = n(x), \quad x \in \partial\hat{\Omega},$$
$$(\nu(x), \tilde{n}(x)) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \qquad (n(x), \tilde{\nu}(x)) = 0, \quad x \in \partial\hat{\Omega}.$$

Доказательство. Займемся построением поля $\tilde{\nu}(x)$. Поле $\tilde{n}(x)$ строится аналогично. Будем искать векторное поле $\tilde{\nu}(x)$, $x \in R^m$ в виде
$$\tilde{\nu}(x) = \nabla d(x) - \alpha(x) d(x) \nabla\rho(x)$$
с некоторой скалярной функцией $\alpha \in C^{k+l-1}(R^m)$. Поскольку $\tilde{\nu}(x) = \nu(x)$ при $x \in \partial\Omega$, то осталось подобрать функцию $\alpha(x)$ таким образом, чтобы $(\tilde{\nu}(x), n(x)) = 0$ при $x \in \partial\hat{\Omega}$. Последнее равенство эквивалентно соотношению

$$\alpha(x) = \frac{(\nabla d(x), \nabla\rho(x))}{d(x)} |\nabla\rho(x)|^{-2} \equiv \varphi(x), \qquad x \in \partial\hat{\Omega}.$$

Если мы докажем, что $\varphi \in C^{k+l-1}(\partial\hat{\Omega})$, то в качестве $\alpha(x)$, $x \in R^m$ можно взять функцию $\alpha(x) = (\Pi_{\partial\hat{\Omega}})(x)$, где $\Pi_{\partial\hat{\Omega}}$ – ограниченный оператор продолжения из C^{k+l-1} $(\partial\hat{\Omega})$ в $C^{k+l-1}(R^m)$. Требуемая гладкость функции ϕ устанавливается стандартным путем в окрестности каждой точки $x_0 \in \partial\hat{\Omega}$ переходом к локальным координатам. •

Отметим, что при выполнении условий леммы 4.1 существует ограниченный линейный оператор продолжения

$$\Pi_\Sigma : C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}) \longrightarrow C^{k,\varepsilon}(R^m), \quad \varepsilon \in [0,1].$$

Введем функциональное пространство

$$X = \{h \in C^{k,\varepsilon}(\bar\Omega, R^m), (h(x), \nu(x)) = 0,\\ x \in \partial\Omega, (h(x), n(x)) = 0, x \in \Sigma\}$$

с фиксированным $\varepsilon \in [0,1]$ и натуральным k.

Лемма 4.2. *Пусть выполняются условия леммы 4.1 с $l \geqslant 2$. Тогда любая функция $h \in C^{k,\varepsilon}(\bar\Omega, R^m)$ может быть единственным образом представлена в виде*

$$\begin{aligned} &h(x) = (\Pi_{\partial\Omega}\varphi)(x)\tilde\nu(x) + (\Pi_\Sigma\psi)(x)\tilde n(x) + \tau(x),\\ &\varphi \in C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega), \quad \psi \in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}), \quad \tau \in X, \end{aligned} \tag{4.1}$$

а поля $\tilde\nu(x)$ и $\tilde n(x)$ взяты из леммы 4.1.

Доказательство. Начнем с единственности. Пусть для некоторых φ, ψ и τ выполняется равенство

$$0 = (\Pi_{\partial\Omega}\varphi)(x)\tilde\nu(x) + (\Pi_\Sigma\psi)(x)\tilde n(x) + \tau(x), \quad x \in \bar\Omega.$$

Из этого равенства при $x \in \partial\Omega$ и $x \in \Sigma$ получим соответственно, что $\varphi(x) \equiv 0$ и $\psi(x) \equiv 0$. Откуда следует, что и $\tau(x) \equiv 0$ в $\bar\Omega$.

Докажем теперь возможность самого представления. Заметим, что

$$h(x) - (h(x), \tilde\nu(x))\tilde\nu(x) - (h(x), \tilde n(x))\tilde n(x) \equiv \tau'(x), \quad \tau' \in X.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= (h(x), \tilde\nu(x)), \qquad x \in \partial\Omega,\\ \psi(x) &= (h(x), \tilde n(x)), \qquad x \in \Sigma. \end{aligned}$$

Тогда $\varphi \in C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$, $\psi \in C^{k,\varepsilon}(\Sigma)$ и

$$h(x) - (\Pi_{\partial\Omega}\varphi)(x)\tilde\nu(x) - (\Pi_\Sigma\psi)(x)\tilde n(x) =\\ = [(h(x), \tilde\nu(x)) - (\Pi_{\partial\Omega}\varphi)(x)]\,\tilde\nu(x) +\\ [(h(x), \tilde n(x)) - (\Pi_\Sigma\psi)(x)]\,\tilde n(x) + \tau'(x) \equiv \tau(x), \quad \tau \in X.$$

Последнее равенство и совпадает с требуемым разложением. •

Будем говорить, что отображение $x \mapsto y$

$$y = f(x) = x + h(x), \quad x \in \bar\Omega, \quad h \in C^{k,\varepsilon}(\bar\Omega, R^m), \quad ||h||_{C^{k,\varepsilon}} < \delta \tag{4.2}$$

осуществляет диффеоморфизм области Ω, если f взаимоодно-значно, $f(\Omega) = \Omega$, $f(\partial\Omega) = \partial\Omega$ и $f^{-1} \in C^{k,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m)$. Это определение отличается от данного в §2 лишь гладкостью рассматриваемых отображений.

Теорема 4.1. *Пусть область Ω и $\hat{\Omega}$ удовлетворяет условиям* а) *с* $l \geqslant 2$, б), в) *и дополнительному условию* г)

г) $R^m \backslash \bar{\Omega}$ *– связное множество.*

Тогда при достаточно малом δ множество всех отображений из (4.2), *осуществляющих диффеоморфизм области Ω, задается равенством*

$$f(x) = x + \tau(x) + (\Pi_\Sigma \psi)(x)\tilde{n}(x) + (\Pi_{\partial\Omega} R[\tau, \psi])(x)\tilde{\nu}(x), \qquad (4.3)$$

где τ, ψ – любая пара из некоторой малой окрестности нуля пространства $X \times C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$, а R – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение этой окрестности в пространство $C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$, причем

$$R[0,0] = 0, \quad R_\tau[0,0] = 0, \quad R_\psi[0,0] = 0, \qquad (4.4)$$

где нижний индекс означает частную производную по соответствующему аргументу.

Доказательство. Так как и в доказательстве леммы 2.4 приходим к выводу, что отображение из (4.2) при достаточно малом δ осуществляет диффеоморфизм области Ω в том и только том случае, если выполняется условие

$$\begin{aligned} &d[h](x) \equiv d(f(x)) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \\ &h \in C^{k,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m), \quad \|h\|_{C^{k,\varepsilon}} < \delta. \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Воспользуемся представлением (4.1) для функции $h(x)$ и введем отображение

$$\Phi : C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega) \times C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}) \times X$$

согласно равенству

$$\Phi[\varphi, \psi, \tau] = d(x + h(x)).$$

Отображение Φ будет иметь l непрерывных производных и

$$\Phi[0,0,0] = 0, \quad \Phi_\psi[0,0,0] = 0, \quad \Phi_\tau[0,0,0] = 0, \quad \Phi_\varphi[0,0,0] = I.$$

С помощью отображения Φ уравнение (4.5) запишется в виде $\Phi[\varphi, \psi, \tau] = 0$. Применения к нему схему, изложенную в §2, придем к требуемому представлению. •

Рассмотрим диффеоморфизмы области Ω вида

$$f(x) = x + h(x), \quad h \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m), \quad \|h\|_{C^{k+2}} < \delta \tag{4.6}$$

с достаточно малым δ. От диффеоморфизмов (4.2) они отличаются лишь гладкостью рассматриваемых функций. Под действием f из (4.6) поверхность Σ перейдет в $f(\Sigma)$. Для диффеоморфизмов $f_1(x) \not\equiv f_2(x)$ множества $f_1(\Sigma)$ и $f_2(\Sigma)$ могут совпадать. Наша цель – выбрать из множества всех диффеоморфизмов вида (4.2) некоторое удобное для дальнейших построений подмножество, для которого запас образов поверхности Σ тот же, что для всех диффеоморфизмов (4.6) с достаточно малым δ. Это подмножество будет характеризоваться тем, что диффеоморфизмы из него будут производить деформацию Σ в существенном вдоль поля нормалей $n(x)$, $x \in \Sigma$.

Из (4.3) видно, что смещение вдоль нормали $n(x)$ поверхности Σ при диффеоморфизме (4.2) задается равенством

$$(f(x) - x, n(x)) = \psi(x), \qquad x \in \Sigma.$$

Оставшаяся пара слагаемых

$$\tau(x), \quad (\Pi_{\partial\Omega} R[\tau, \psi])(x)\tilde{\nu}(x), \quad x \in \Sigma$$

касательные к Σ, причем второе из них является малой поправкой к линейной части. Пусть

$$T[\psi] \equiv R[0, \psi].$$

Тогда T – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение некоторой малой окрестности нуля пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ в пространство $C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$ и множество всех диффеоморфизмов (4.3) с $\tau(x) \equiv 0$ определяется равенством

$$\begin{gathered} y(x) = x + (\Pi_\Sigma \psi)(x)\tilde{n}(x) + (\Pi_{\partial\Omega} T[\psi])(x)\tilde{\nu}(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ T[0] = 0, \qquad T'[0] = 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Диффеоморфизмы (4.7) назовем деформациями области Ω вдоль нормали к Σ.

Теорема 4.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1. *Тогда для любого диффеоморфизма* $f(x)$ *области* Ω *вида* (4.6) *с достаточно* *малым δ найдется такая деформация $y(x)$ области Ω вдоль нормали к Σ, что $f(\Sigma) = y(\Sigma)$.*

Доказательство. Рассмотрим все диффеоморфизмы $f \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m)$ области Ω. Тогда отображения $f^{-1} \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m)$ также будут диффеоморфизмами области Ω. Представим f и f^{-1} в виде

$$f(x) = x + h(x), \quad f^{-1}(x) = x + g(x), \quad x \in \bar{\Omega},$$
$$h, g \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m).$$

Так как $f(f^{-1}(x)) \equiv x$, то

$$x + g(x) + h(x + g(x)) \equiv x, \qquad x \in \bar{\Omega}.$$

Поэтому

$$\|g\|_{C^{k+2}} \leqslant C\|h\|_{C^{k+2}} \left(1 + \|g\|_{C^{k+2}}\right).$$

Из последнего неравенства следует, что для

$$h \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m), \quad \|h\|_{C^{k+2}} \leqslant \delta, \quad 2C\delta < 1$$

выполняется оценка

$$\|g\|_{C^{k+2}} \leqslant 2C\delta.$$

Так как $l \geqslant 2$, то $\partial\Omega \in C^{(l-1)+(k+2)}$. Тогда при достаточно малом δ для диффеоморфизмов $f^{-1}(x)$ справедливо представление (2.11)

$$\begin{gathered} f^{-1}(x) = x + g(x) + R[y](x), \\ R[0] = 0, \qquad R'[0] = 0, \end{gathered} \tag{4.8}$$

где R – непрерывно дифференцируемое отображение малой окрестности нуля пространства

$$N = \left\{ g \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m),\, (g, \nu)\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

в пространство $C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m)$.

Совпадение множеств $f(\Sigma)$ и $y(\Sigma)$ эквивалентно равенству

$$\rho\left(f^{-1}\left(y(x)\right)\right) = 0, \qquad x \in \overline{\Sigma}.$$

Это равенство будем рассматривать как уравнение для определения ψ в представлении (4.7) для деформации $y(x)$ по заданной функции $g(x)$ в представлении (4.8) для диффеоморфизма

$f^{-1}(x)$. Воспользуемся этими представлениями и введем отображение F, действующее из некоторой окрестности нуля пространства $N \times C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ в пространство $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$, равенством

$$F[g,\psi] = \rho\left(f^{-1}\left(y(x)\right)\right), \qquad x \in \overline{\Sigma}.$$

Заметим, что

$$\begin{gathered} f^{-1}\left(y(x)\right) - x = \\ = \psi(x)n(x) + \left(\Pi_{\partial\Omega}T[\psi]\right)(x)\tilde{\nu}(x) + \\ + g\left(x + \psi(x)n(x) + \left(\Pi_{\partial\Omega}T[\psi]\right)(x)\tilde{\nu}(x)\right) + \\ + R[g]\left(x + \psi(x)n(x) + \left(\Pi_{\partial\Omega}T[\psi]\right)\tilde{\nu}(x)\right), \quad x \in \overline{\Sigma}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Для локальной разрешимости уравнения $F[g,\psi] = 0$ относительно ψ достаточно проверить выполнимость условий слабой формы теоремы о неявных функциях. Эти условия таковы:

1) отображение $F[g,\psi]$ непрерывно в точке $g = 0$, $\psi = 0$ и $F[0,0] = 0$,
2) существует дифференциал $F_\psi[g,\psi]$, непрерывный в точке $g = 0$, $\psi = 0$,
3) $F_\psi[0,0]$ осуществляет изоморфизм пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$.

При выполнении этих условий существует такое отображение S некоторой окрестности неля пространства N в окрестность неля пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$, что $S[0] = 0$, $S[g]$ непрерывно в точке $g = 0$ и множество всех решений задачи $F[g,\psi] = 0$ локально задается равенством $\psi = S[g]$.

Поскольку $g \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m)$, $R[g] \in C^{k+2}(\bar{\Omega}, R^m)$, а функция $\rho \in C^{k+l+1}(R^m, R^m)$, то в силу (4.9) условия 1), 2) для указанного отображения $F[g,\psi]$ выполнены, и $F_\psi[0,0] = I$. •

В дальнейшем в качестве Σ будет выступать граница раздела фаз, а диффеоморфизмы (4.6) будут использоваться для варьирования Σ, то есть замены Σ на $f(\Sigma)$. Поскольку нас будет интересовать варьирование Σ как геометрического объекта, то можем использовать при варьировании деформации вдоль нормали (4.7).

Наша следующая задача – выделить из семейства деформаций вдоль нормали (4.7) те деформации, для которых $y(\overline{\Sigma})$ пересекает $\partial\Omega$ под прямым углом.

Теорема 4.3. *Пусть выполняются условия теоремы 4.1 с $l > 2$. Тогда множество всех деформаций (4.7), для которых $y(\overline{\Sigma})$ пересекает $\partial\Omega$ под прямым углом, представимо в виде*

$$\begin{gathered} y(x) = x+ \\ +\left(\Pi_\Sigma\psi\right)(x)\tilde{n}(x) + \left(\Pi_\Sigma S_1[\psi]\right)(x)\tilde{n}(x)+ \\ +\left(\Pi_{\partial\Omega} S_2[\psi]\right)(x)\tilde{\nu}(x), \quad x \in \bar{\Omega} \end{gathered} \tag{4.10}$$

где ψ лежит в достаточно малой окрустности нуля пространства N

$$N = \left\{\psi \in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}), -\frac{\partial\psi(x)}{\partial t(x)} + \psi(x)\left(d''(x)n(x), n(x)\right) = 0, x \in \partial\Sigma\right\}. \tag{4.11}$$

Здесь $t(x)$ – внешняя единичная нормаль к $\partial\Sigma$, лежащая при каждом $x \in \partial\Sigma$ в касательной к $\partial\hat{\Omega}$ плоскости,

$$d''(x)_{ij} = \frac{\partial^2 d(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \qquad x \in \partial\Omega,$$

матрица кривизн поверхности $\partial\Omega$. Пространство $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ раскладывается в прямую сумму пространств

$$C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}) = N \dot{+} N'.$$

Отображения S_1, S_2 – $(l-2)$-раза непрерывно дифференцируемые отображения малой окрестности нуля пространства N в N' и $C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$ соответственно, причем $S_i[0] = 0$, $S_i'[0] = 0$.

Доказательство. Пусть $y = y(x)$ – диффеоморфизм области Ω, достаточно близкий к тождественному, $x = x(y)$ – обратный к нему. Поскольку $\overline{\Sigma}$ состоит из тех и только тех точек x из некоторой окрестности в $\bar{\Omega}$ поверхности $\overline{\Sigma}$, для которых $\rho(x) = 0$, то $y(\overline{\Sigma})$ совпадает с теми точками y из этой окрестности, для которых $\rho(x(y)) = 0$. Нормаль к $y(\Sigma)$ в точке $y(x)$, $x \in \Sigma$ с точностью до скалярного множителя совпадает с $\nabla_y \rho(x(y))$, $x \in \Sigma$. Предельным переходом это утверждение распространяется и для точек $x \in \partial\Sigma$. Таким образом

$$n_{y(\Sigma)}(y(x)) = \frac{\dot{y}^{-1*}(x)n(x)}{\left|\dot{y}^{-1*}(x)n(x)\right|}, \quad x \in \overline{\Sigma}.$$

Здесь $n_{y(\Sigma)}(y(x))$ – нормаль к поверхности $y(\Sigma)$ в точке $y(x)$, $x \in \overline{\Sigma}$. Поскольку $\tilde{\nu}(x) = \nu(x)$ при $x \in \partial\Omega$, то условие пересечения $y(\overline{\Sigma})$ и $\partial\Omega$ под прямым углом примет вид

$$\left(\dot{y}^{-1*}(x)n(x), \tilde{\nu}(y(x))\right) = 0, \quad x \in \partial\Sigma = \partial\Omega \cap \partial\hat{\Omega}.$$

Рассмотрим диффеоморфизм $y(x)$ вида (4.7) и введем отображение Φ некоторой окрестности нуля пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ в $C^{k,\varepsilon}(\partial\Sigma)$ по формуле

$$(\Phi[\psi])(x) = \left(\dot{y}^{-1*}(x)n(x), \tilde{\nu}(y(x))\right), \quad x \in \partial\Sigma,$$
$$y(x) = x + (\Pi_\Sigma\psi)(x)\tilde{n}(x) + (\Pi_{\partial\Omega}T[\psi])(x)\tilde{\nu}(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

При сделанных предположениях отображение Φ будет $(l-2)$-раза непрерывно дифференцируемо и $\Phi[0] = 0$. Для дифференциала Φ в нуле справедлива формула

$$(\Phi'[0]\psi)(x) = -\frac{\partial\psi(x)}{\partial t(x)} + \psi(x)(d''(x)n(x), n(x)), \quad x \in \partial\Sigma,$$
$$\frac{\partial}{\partial t(x)} = \nu^k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad x \in \partial\Sigma, \quad \psi \in C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}).$$

Ядром оператора $\Phi'[0]$ будет пространство (4.11). Докажем его дополняемость в пространстве $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$. Пусть Π – такой линейный оператор продолжения

$$\Pi : C^{k,\varepsilon}(\partial\Sigma) \times C^{k-1,\varepsilon}(\partial\Sigma) \longrightarrow C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma}),$$

что для $\tilde{\psi} = \Pi(\alpha; \beta)$ выполняется равенство

$$\tilde{\psi}\big|_{\partial\Sigma} = \alpha, \quad -\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} + \tilde{\psi}(d''n, n)\big|_{\partial\Sigma} = \beta.$$

Тогда оператор P

$$P\psi = \psi - \Pi\left(0, -\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi(d''n, n)\big|_{\partial\Sigma}\right)$$

будет линейным ограниченным в $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ проектором на пространство N. Таким образом, пространство N дополняемо в $C^{k,\varepsilon}()\overline{\Sigma}$ и $N' = (I-P)C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$.

Легко видеть, что функция $\psi = \Pi(0; \gamma)$ будет решением задачи $\Phi'[0]\psi = \gamma$ для любого $\gamma \in C^{k-1,\varepsilon}(\partial\Sigma)$. Поэтому $R\Phi'[0] = C^{k-1,\varepsilon}(\partial\Sigma)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось к уравнению $\Phi[\psi] = 0$ применить схему локального описания множества всех его решений из §2. •

Вернемся к деформации (4.7). Возьмем в (4.1) линейные операторы продолжения Π_Σ и $\Pi_{\partial\Omega}$ удовлетворяюшие условиям

$$\|\Pi_\Sigma\|_{C^{r,\mu}(\bar\Omega)} \leqslant C\|\psi\|_{C^{r,\mu}(\bar\Sigma)}, \quad \psi \in C^{k,\varepsilon}(\bar\Sigma),$$
$$\|\Pi_{\partial\Omega}\|_{C^{r,\mu}(\bar\Omega)} \leqslant C\|\psi\|_{C^{r,\mu}(\partial\Omega)}, \quad \psi \in C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$$

сразу для всех r, μ с $r = 1,\ldots,k$, $\mu = 0$ и $r = k$, $\mu = \varepsilon$. Оператор T из (4.7) определен в некоторой малой окрестности нуля пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$, действует в пространство $C^{k,\varepsilon}(\partial\Omega)$ и является l-раз непрерывно дифференцируемым. Рассмотрим этот оператор, как оператор с той же областью определения, но действующий из $C^r(\overline{\Sigma})$ в $C^r(\partial\Omega)$, $r = 1,\ldots,k$.

Лемма 4.3. *Оператор $T\colon C^r(\overline{\Sigma}) \to C^r(\partial\Omega)$является l-раз непрерывно дифференцируемым оператором для каждого $r = 1,\ldots,k$. Все его дифференциалы до порядка l не зависят от r.*

Доказательство. Пусть функция ψ лежит в достаточно малой окрестности нуля пространства $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$. Тогда эта функция порождает по формуле (4.7) деформацию $y(x)$ вдоль нормали к Σ, лежащую в некоторой малой $C^{k,\varepsilon}(\bar\Omega, R^m)$ окрестности тождественного отображения. Тогда отображение $y(x)$ будет, в частности, диффеоморфизмом области Ω класса $C^r(\bar\Omega, R^m)$, лежащим в достаточно малой $C^r(\bar\Omega, R^m)$ окрестности тождественного. Для всех таких диффеоморфизмов справедливо представление (4.3) с некоторыми функциями $\tau^{(r)}$, $\psi^{(r)}$ и оператором $R^{(r)}$. Пара $\tau^{(r)}$, $\psi^{(r)}$ лежит в достаточно малой окрестности нуля пространства $X_r \times C^r(\overline{\Sigma})$ (здесь X_r определяется так же как пространство X, но с заменой показателя гладкости k, ε на r, 0), а $R^{(r)}$ – l-раз непрерывно дифференцируемое отображение из $X_r \times C^r(\overline{\Sigma})$ в $C^r(\partial\Omega)$. Сравнивая это представление с (4.7), получим

$$(\Pi_\Sigma(\psi - \psi^{(r)}))(x)\tilde n(x) + (\Pi_{\partial\Omega}(T[\psi] - R^{(r)}[\tau^{(r)}, \psi^{(r)}])(x))\tilde\nu(x) = \tau^{(r)}(x). \tag{4.12}$$

Из (4.12) при $x \in \Sigma$ и $x \in \partial\Omega$ получим соответственно

$$\psi(x) = \psi^{(r)}(x), \quad x \in \Sigma, \qquad T[\psi](x) = R^{(r)}[\tau^{(r)}, \psi^{(r)}](x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Используя эти равенства и (4.12), придем к соотношению

$$\tau^{(r)}(x) = 0, \qquad x \in \Omega.$$

Таким образом, для всех функций ψ, лежащих в достаточно малом $C^{k,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ окрестности нуля, справедливо равенство

$$T[\psi] = T^{(r)}[\psi], \quad \text{где} \quad T^{(r)}[\psi] = R^{(r)}[0, \psi]. \tag{4.13}$$

Поскольку оператор $T^{(r)}$ – l-раз непрерывно дифференцируем как оператор из $C^r(\overline{\Sigma})$ в $C^r(\partial\Omega)$, то в силу (4.13) этим же свойством обладает и оператор T. Совпадение дифференциалов также следует из (4.13). •

§5. Исследование устойчивости решения (3.7) при изменении параметра τ

В этом параграфе будут описаны те значения параметра τ, при которых решение (3.7) будет локальным минимумом функционала энергии по отношению к малым и достаточно гладким возмущениям функций $\hat{u}$ и $\hat{\chi}$, а также описаны те τ, при которых это свойство теряется.

Для простоты дальнейших выкладок совершим при $\tau \neq 0$ в функционале (1.2) замену $u \mapsto \tau u$. Тогда мы придем к эквивалентной вариационной задаче для функционала

$$\frac{1}{\tau^2} I[u, \chi, \tau] = \int\limits_{\Omega} \Big[a_{ij,kl}(x) u^i_{x_j}(x) u^k_{x_l}(x) - 2 f^i(x) u^i(x) \chi(x) \Big] \, dx + \\ + \gamma \int\limits_{\Omega} |D\chi|, \qquad \gamma = \frac{\sigma}{\tau^2}, \tag{5.1}$$

$u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m)$, характеристическая функция $\chi \in BV(\Omega)$.

Такое преобразование вызовет некоторые изменения в (3.7). Теперь функция $\hat{u}$ будет решением задачи

$$L\hat{u} = \hat{\chi} f, \quad \hat{u}\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.2}$$

Очевидно, что $\hat{u}$ не зависит от τ.

В этом параграфе мы будем считать, что выполняются условия теоремы 4.1 с $l = 3$ и некоторым достаточно большим $k = k_0$

(его значение будет указано позже), функция $f \in C^3(\bar\Omega, R^m)$, а коэффициенты $a_{ij,kl} \in C^2(\bar\Omega)$ для всех индексов $i, j, k, l = 1, \dots, m$. В силу (3.6) правая часть системы (5.2) с функцией $\hat u$ из (3.7) лежит в пространстве $W^1_\infty(\Omega, R^m)$. Поэтому решение $\hat u$ задачи (5.2) обладает свойством

$$\hat u \in W^3_q(\Omega, R^m) \quad \text{с любым} \quad q \in [1, \infty).$$

Деформации из (4.7) принадлежат $C^{k_0,\varepsilon}(\bar\Omega, R^m)$ и задаются с помощью оператора T, определенного на некоторой малой окрестности нуля пространства $C^{k_0,\varepsilon}(\overline\Sigma)$. Этот оператор будет трижды непрерывно дифференцируемым, как оператор из пространства $C^{k_0,\varepsilon}(\overline\Sigma)$ в $C^{k_0,\varepsilon}(\partial\Omega)$, также как и оператор с той же областью определения, но рассматриваемый как отображение из $C^1(\overline\Sigma)$ в $C^1(\partial\Omega)$ (Лемма 4.3).

Начнем с некоторых вспомогательных предложений. Пусть $\hat\chi$ – функция из (3.7), а $y(x)$ – деформации вдоль нормали (4.7). Для каждой такой деформации введем функцию

$$\tilde\chi(y) = \hat\chi(x(y)), \tag{5.3}$$

где $x = x(y)$ – обратное отображение к (4.7).

Лемма 5.1. *Пусть $P \in W^3_q(\Omega)$ для всех $q \in [1, \infty)$, $P(x) = 0$ при $x \in \partial\Omega \cup \Sigma$. Тогда для всех функций $\psi \in C^{k_0,\varepsilon}(\overline\Sigma)$, определяющих деформации* (2.7) *справедливо равенство*

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega P(y)\tilde\chi(y)\,dy = \int\limits_\Omega P(x)\hat\chi(x)\,dx + \frac12 \int\limits_\Sigma \frac{\partial P(x)}{\partial n}|\psi(x)|^2\,dS + \alpha,\\ |\alpha| \leqslant C\|\psi\|^3_{C^1}, \quad C = C(P),\end{gathered} \tag{5.4}$$

где $\tilde\chi(y)$ задается формулой (5.3).

Доказательство. Введем обозначение

$$\begin{aligned}&y(x) = x + h(x),\\ &h(x) = (\Pi_\Sigma\psi)(x)\tilde n(x) + (\Pi_{\partial\Omega}T[\psi])(x)\tilde\nu(x),\\ &\psi \in C^{k_0,\varepsilon}(\overline\Sigma), \|\psi\|_{C^{k_0,\varepsilon}} \leqslant \delta.\end{aligned}$$

После замены переменных в интеграле, получим

$$\int\limits_\Omega P(y)\tilde\chi(y)\,dy = \int\limits_\Omega P(x + h(x))\hat\chi(x)\det(I + \dot h(x))\,dx.$$

Затребованной гладкости P достаточно чтобы произвести разложение под знаком интеграла и получить соотношение (5.4). •

Замечание 5.1. Пусть $P \in C^3(\bar{\Omega})$. Тогда для числа α в (5.4) можно выписать оценку

$$|\alpha| \leqslant C\|P\|_{C^3}\|\psi\|^3_{C^1}, \qquad C \neq C(P, \psi).$$

Лемма 5.2. *Справедливо соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} |D\tilde{\chi}(y)| - \int\limits_{\Omega} |D\hat{\chi}(x)| =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma} \left\{|\delta\psi|^2 - (\delta_i n^j)(\delta_j n^i)|\psi|^2\right\} dS_{m-1} - \frac{1}{2}\int\limits_{\Sigma}(d''n, n)|\psi|^2\, dS_{m-2} +$$

$$+\beta, \qquad |\beta| \leqslant C\|\psi\|^3_{C^1}.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1.13) и представлением (4.7). Совершая разложения, пользуясь формулой (2.14) и учитывая равентсво нулю средней кривизны поверхности Σ, придем к доваательству леммы. •

Теперь мы в состоянии вычислить вторую вариацию функционала (5.1). Наряду с функцией $\tilde{\chi}(y)$ из (5.3) введем функцию

$$\tilde{u}(y) = \hat{u}(y) + v(y), \quad v \in C^3(\bar{\Omega}, R^m), \quad v\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{5.5}$$

Здесь, как и ранее, пара $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ определилась в (5.2), (3.7).

Лемма 5.3. *Справедливо соотношение*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2}I[\tilde{u}, \tilde{\chi}, \tau] - \frac{1}{\tau^2}I[\hat{u}, \hat{\chi}, \tau] = \int\limits_{\Omega} a_{ij,kl}(x) v^i_{x_j}(x) v^k_{x_l}(x)\, dx + \\ +\frac{\gamma}{2}\int\limits_{\Sigma} \left\{|\delta\psi|^2 - \left(\frac{2}{\gamma}\frac{\partial f^i}{\partial n}\hat{u}^i + (\delta_i n^j)(\delta_j n^i)\right)|\psi|^2\right\} dS_{m-1} - \\ -\frac{\gamma}{2}\int\limits_{\partial\Sigma}(d''n, n)|\psi|^2\, dS_{m-2} + \alpha. \end{aligned} \tag{5.6}$$

При $\|v\|_{C^3} \leqslant R$ *для константы* α *выполняется неравенство*

$$|\alpha| \leqslant C\left[\|v\|^3_C + \|\psi\|^3_{C^1}\right], \quad C = C(R). \tag{5.7}$$

Доказательство. Имеем очевидное равенство

$$\frac{1}{\tau^2}I[\tilde{u},\tilde{\chi},\tau]=\frac{1}{\tau^2}I[\hat{u},\hat{\chi},\tau]+2\int\limits_\Omega\left[a_{ij,kl}(x)\hat{u}^i_{x_j}v^k_{x_l}-f^i\hat{\chi}v^i\right]\,dx+$$

$$+2\int\limits_\Omega f^i\hat{u}^i(\hat{\chi}-\tilde{\chi})\,dx+2\int\limits_\Omega f^iv^i(\hat{\chi}-\tilde{\chi})\,dx+\int\limits_\Omega a_{ij,kl}(x)v^i_{x_j}v^k_{x_l}(x)\,dx+$$

$$+\left[\gamma\int\limits_\Omega|D\tilde{\chi}|-\gamma\int\limits_\Omega|D\hat{\chi}|\right]. \tag{5.8}$$

Второе слагаемое в правой части (5.8) обращается в ноль, поскольку функция $\hat{u}$ является решением задачи (5.2). Применяя к третьему, четвертому и шестому слагаемым лемму 5.1, замечание 5.1 и лемму 5.2 соответственно, придем к требуемому результату. •

На многообразии с краем Σ рассмотрим дифференциальный оператор

$$M\psi=-\delta_i\delta_i\psi-\left(\frac{2\tau^2}{\sigma}\frac{\partial f^i}{\partial n}\hat{u}^i+(\delta_in^j)(\delta_jn^i)\right)\psi, \tag{5.9}$$

действующий на достаточно гладкие функции $\psi(x)$, $x\in\Sigma$, удовлетворяющие граничному условию

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}-(d''n,n)\psi=0,\quad x\in\partial\Sigma. \tag{5.10}$$

Лемма 5.4. *Оператор M симметричен и*

$$\int\limits_\Sigma\psi M\psi\,dS=$$

$$\int\limits_\Sigma\left\{|\delta\psi|^2-\left(\frac{2\tau^2}{\sigma}\frac{\partial f^i}{\partial n}\hat{u}^i+(\delta_in^j)(\delta_jn^i)\right)|\psi|^2\right\}dS_{m-1}- \tag{5.11}$$

$$\int\limits_{\partial\Sigma}(d''n,n)|\psi|^2\,dS_{m-2}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – два достаточно гладкие скалярные функции на $\overline{\Sigma}$.

Так как вектор $t(x)$ ортогонален вектору $n(x)$ при $x \in \partial\Sigma$, то

$$(\delta_i\beta)t^i = t^i\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - n^i n^j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\beta = t^i\frac{\partial}{\partial x_i}\beta = \frac{\partial\beta}{\partial t}.$$

Тогда из формулы (2.14) и равенства $H = 0$ имеем

$$\int\limits_{\Sigma}(\delta_i\alpha)(\delta_i\beta)\,dS_{m-1} = -\int\limits_{\Sigma}(\delta_i\delta_i\beta)\alpha\,dS_{m-1} + \int\limits_{\partial\Sigma}\alpha\frac{\partial\beta}{\partial t}\,dS_{m-2}. \tag{5.12}$$

Пользуясь формулой (5.12) легко установить симметрию оператора (5.9) при наличии граничных условий (5.10) и справедливость (5.11). •

Рассмотрим задачу на собственные числа и собственные функции оператора M

$$M\psi = \lambda\psi, \quad x \in \Sigma, \quad \frac{\partial\psi}{\partial t} - (d''n, n)\psi = 0, \quad x \in \partial\Sigma. \tag{5.13}$$

В силу эллиптичности симметричного оператора M собственные числа существуют и они вещественные. Пусть $\lambda_1 = \lambda_1(\tau)$ – наименьшее собственное число. Тогда $\lambda_1 > -\infty$ и для всех $\psi \in C^2(\overline{\Sigma})$ выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Sigma}\psi M\psi\,dS \geqslant \lambda_1(\tau)\int\limits_{\Sigma}|\psi|^2\,dS, \tag{5.14}$$

причем равенство реализуется лишь на функциях из собственного подпространства с собственным числом λ_1.

Пользуясь условием положительной определенности для коэффициентов $a_{ij,kl}$ из §1, получим

$$a_{ij,kl}v^i_{x_j}v^k_{x_l} \geqslant \frac{\nu}{4}\left(v^i_{x_j} + v^j_{x_i}\right)\left(v^i_{x_j} + v^j_{x_i}\right).$$

Тогда для всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega, R^m)$

$$\int\limits_{\Omega} a_{ij,kl}v^i_{x_j}v^k_{x_l}\,dx \geqslant \nu\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}. \tag{5.15}$$

Очевидно (5.14) и (5.15) с (5.6), получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau^2}I[\tilde u,\tilde\chi,\tau]-\frac{1}{\tau^2}I[\hat u,\hat\chi,\tau]\geqslant \nu\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}+\frac{\sigma}{2\tau^2}\lambda_1(\tau)\|\psi\|^2_{L_2}-\\ -C\left[\|v\|^3_C+\|\psi\|^3_{C^1}\right],\qquad C\neq C(v,\psi,\tau),\\ \psi\in C^{k_0,\varepsilon}(\overline{\Sigma}),\quad \|\psi\|_{C^{k_0,\varepsilon}}<\delta,\\ v\in C^3(\bar\Omega,R^m)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m),\quad \|v\|_{C^3}\leqslant R.\end{gathered}\tag{5.16}$$

Теперь мы в состоянии доказать основной результат этого параграфа.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 4.1 *с* $l=3$, $k_0\geqslant\frac{3(m+1)}{2}$ *и некоторым* $\varepsilon\in[0,1]$. *Пусть* $f\in C^3(\bar\Omega,R^m)$, $a_{ij,kl}\in C^2(\bar\Omega)$.

Если $\lambda_1(\tau)>0$, *то для всех функций*

$$\begin{aligned}&v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m)\cap C^r(\bar\Omega,R^m),\quad r\geqslant\frac{3m}{2},\quad \psi\in C^{k_0,\varepsilon}(\overline{\Sigma}),\\ &\|v\|_{C^r}\leqslant\delta,\quad \|\psi\|_{C^{k_0,\varepsilon}}\leqslant\delta\end{aligned}\tag{5.17}$$

с достаточно малым δ *выполняется оценка*

$$\frac{1}{\tau^2}I[\tilde u,\tilde\chi,\tau]-\frac{1}{\tau^2}I[\hat u,\hat\chi,\tau]\geqslant C\left[\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}+\|\psi\|^2_{L_2}\right],\quad C>0.\tag{5.18}$$

Если $\lambda_1(\tau)<0$, *то левая часть* (5.18) *знакопеременна на множестве функций* (5.17) *при любом* δ.

Доказательство. Пусть $\lambda_1(\tau)>0$. Воспользуемся следующими мультипликативными оценками

$$\|v\|^3_C\leqslant C\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}\|v\|_{C^r},\quad \|\psi\|^3_{C^1}\leqslant C\|\psi\|^2_{L_2}\|\psi\|_{C^{k_0,\varepsilon}},\tag{5.19}$$

справедливыми при выбранных r и k_0. Тогда из (5.16) получим с некоторой константой $C>0$

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tau^2}I[\tilde u,\tilde\chi,\tau]-\frac{1}{\tau^2}I[\hat u,\hat\chi,\tau]\geqslant\\ \geqslant(\nu-C\delta)\|v\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2}+\left(\frac{\sigma}{2\tau^2}\lambda_1(r)-C\delta\right)\|\psi\|^2_{L_2}.\end{gathered}$$

Выбирая δ достаточно малым, придем к (5.18).

Учитывая (5.11), запишем (5.6) для пары функций $v = 0$, ψ из (5.17)

$$\frac{1}{\tau^2} I[\hat{u}, \tilde{\chi}, \tau] - \frac{1}{\tau^2} I[\hat{u}, \hat{\chi}, \tau] = \frac{\gamma}{2} \int\limits_{\Sigma} \psi M \psi \, dS + \alpha,$$
$$|\alpha| \leqslant C \|\psi\|^3_{C^1}. \tag{5.20}$$

Пусть $\lambda_1(\tau) < 0$ и ψ_1 – собственная функция, отвечающая собственному числу $\lambda_1(\tau)$. Тогда

$$\int\limits_{\Sigma} \psi_1 M \psi_1 \, dS = \lambda_1(\tau) \|\psi_1\|^2_{L_2} < 0.$$

Так как $f \in C^3(\bar{\Omega}, R^m)$, то при больших m мы не можем гарантировать принадлежность функции ψ_1 пространству $C^{k_0, \varepsilon}(\overline{\Sigma})$. Однако, в силу плотности $C^{k_0, \varepsilon}(\overline{\Sigma})$ в $W^1_2(\Sigma)$ можно при любом $\delta < 0$ подобрать такую функцию ψ из (5.17), что

$$\int\limits_{\Sigma} \psi M \psi \, dS < 0.$$

Заменяя ψ на $\tilde{\psi} = \varepsilon \psi$ и беря ε достаточно малым, добъемся отрицательности правой части (5.17) для функции $\tilde{\psi}$ из (5.17) с тем же δ.

Пусть $\lambda_n(\tau)$ – n-ое собственное число оператора M и ψ_n – соответствующая ему собственная функция. Так как $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то для достаточно большого n

$$\int\limits_{\Sigma} \psi_n M \psi_n \, dS = \lambda_n(\tau) \|\psi_n\|^2_{L_2} > 0.$$

Проводя аналогичные предыдущим рассуждения, найдем для каждого δ функцию $\tilde{\psi}$ из (5.17), для которой правая часть (5.20) положительна. •

Теорема 5.1 означает, что при сделанных предположениях решение (3.7) будет локальным минимумом функционала энергии относительно малых гладких возмущений при тех τ, для которых $\lambda_1(\tau) > 0$, и решение (3.7) не будет локальным минимумом по отношению к этим возмущениям для тех τ, для которых $\lambda_1(\tau) < 0$.

Ответ на вопрос, что происходит при пересечении числом $\lambda_1(\tau)$ нулевого значения, будет дан при некоторых ограничениях в следующем параграфе.

Обратим внимание на то, что коэффициент $(\delta_i n^j)(\delta_j n^i)$ в операторе M неотрицателен. Он совпадает с суммой квадратов главных кривизн поверхности $\partial\hat{\Omega}$.

§6. Возмущение решения (3.7) и задача о бифуркации границы раздела фаз

Пусть области Ω и $\hat{\Omega}$ удовлетворяют условиям а) с $l \geqslant 3$, $k = 2$, $\varepsilon \in (0,1)$, б), в) из §4 и множество $R^m \backslash \bar{\hat{\Omega}}$ связно. Будем считать, что $f \in C^{l-1}(\bar{\Omega}, R^m)$, $a_{ij,kl} \in C^{l-1}(\bar{\Omega})$ и выполняется второе условие из (3.6). Пусть, как и ранее, $\hat{\chi}(x)$ – характеристическая функция подобласти $\Omega \cap \hat{\Omega}$, а функция $\hat{u}(x)$ – решение задачи (5.2). Таким образом, пара $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ является решением (3.7) задачи (3.3)–(3.5):

$$
\begin{aligned}
&L\hat{u} = \hat{\chi} f, \quad x \in \Omega, \quad \hat{u}\big|_{\partial\Omega} = 0,\\
&f^i \hat{u}^i = 0, \quad x \in \Sigma, \qquad (6.1)\\
&\overline{\Sigma} \text{ пересекает } \partial\Omega \text{ под прямым углом.}
\end{aligned}
$$

Заметим, что функция $\hat{u} \in W_q^2(\Omega, R^m) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega, R^m)$ с любым $q \in [1, \infty)$.

Пусть $\psi \in N$ из (4.11) с $k = 2$ и фиксированным выше $\varepsilon \in (0,1)$ и $\|\psi\|_{C^{2,\varepsilon}} < \delta$, а $y = y(x)$ – деформация (4.10). Представим y в виде $y(x) = x + h(x)$, $x \in \bar{\Omega}$. Если $\hat{h}(x) = (\Pi_{\partial\Omega} h)(x)$, где $\Pi_{\partial\Omega} : C^{2,\varepsilon}(\bar{\Omega}, R^m) \to C^{2,\varepsilon}(R^m, R^m)$ – ограниченный оператор продолжения, то при достаточно малом δ отображение $\hat{y}(x) = x + \hat{h}(x)$, $x \in R^m$ будет заведомо осуществлять диффеоморфизм пространства R^m класса C^2 (лемма 2.3). Тогда $\hat{y}(\hat{\Omega})$ будет областью пространства R^m, $\partial\hat{y}(\hat{\Omega}) = \hat{y}(\partial\hat{\Omega}) \in C^2$ (лемма 2.1). В силу теоремы 4.3 поверхность $\partial\hat{y}(\hat{\Omega})$ пересекает $\partial\Omega$ под прямым углом, а $\partial\hat{y}(\Sigma) = \hat{y}(\partial\hat{\Omega}) \cap \partial\Omega$ и состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых является $m-2$-мерным многообразием класса C^1.

Пусть $\tilde{\chi}(y)$ – характеристическая функция множества $\hat{y}(\hat{\Omega}) \cap \Omega$, $\tilde{u} \in W_2^2(\Omega, R^m)$. Пара $\tilde{u}(y)$, $\tilde{\chi}(y)$ будет решением задачи (3.3)–(3.5) в том и только том случае, если

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial y_l}\left(a_{ij,kl}(y)\frac{\partial \tilde u^i(y)}{\partial y_j}\right) = \tilde\chi(y) f^k(y), \quad y\in\Omega, \quad k=1,\dots,m,\\
&\tilde u(y) = 0, \qquad y\in\partial\Omega, \\
&H(y) + \frac{2\tau^2}{\sigma} f^i(y)\tilde u^i(y) = 0, \quad y\in\hat y(\Sigma),
\end{aligned} \tag{6.2}
$$

где $H(y)$ – средняя кривизна поверхности $\hat y(\Sigma)$ в точке $y\in\hat y(\Sigma)$. Заметим, что решение $\tilde u \in W^2_q(\Omega, R^m)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m)$ с любым $q\in[1,\infty)$.

Будем искать функции $\tilde u(y)$, $\tilde\chi(y)$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\tilde u(y) = \hat u(x(y)) + v(x(y)), \quad v\in W^2_q(\Omega,R^m)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m),\\
&\tilde\chi = \hat\chi(x(y)),
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

где $x = x(y)$ – диффеоморфизм, обратный к $y = y(x)$, а число $q\in[1,\infty)$ выбрано таким образом, чтобы оператор вложения $W^2_q(\Omega)\to C^{0,\varepsilon}(\bar\Omega)$ с фиксированным выше ε был ограничен.

Подставляя пары $\tilde u(y)$, $\tilde\chi(y)$ из (6.3) в (6.2) и совершая замену координат $y\mapsto x = x(y)$, получим

$$
\begin{aligned}
&\dot y_{rl}^{-1}\frac{\partial}{\partial x_r}\left[a_{ij,kl}(y(x))\left(\dot y_{tj}^{-1}\frac{\partial \hat u^i}{\partial x_t} + \dot y_{tj}^{-1}\frac{\partial v^i}{\partial x_t}\right)\right] + \hat\chi f^k(y(x)) = 0,\\
&x\in\Omega, \quad k=1,\dots,m, \quad \hat\chi = \hat\chi(x), \quad \hat u = \hat u(x), \quad v = v(x),\\
&v(x) = 0, \quad x\in\partial\Omega,
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

$$
H(y(x)) + \frac{2\tau^2}{\sigma} f^i(y(x))[\hat u^i(x) + v^i(x)] = 0, \quad x\in\Sigma. \tag{6.5}
$$

Обозначим левую часть равенства в (6.4) через $\Phi[\psi, v]$. Тогда Φ можно рассматривать как отображение достаточно малой окрестности нуля пространства

$$
N\times Y, \qquad Y = W^2_q(\Omega,R^m)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega,R^m), \tag{6.6}
$$

где N определено в (4.11) с $k=2$ и фиксированном выше $\varepsilon\in(0,1)$, в пространство, $Lq(\Omega,R^m)$, $q = q(\varepsilon)$ определено ранее. Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Лемма 6.1. *При сделанных предположениях относительно гладкости функции f и коэффициентов $a_{ij,kl}$ отображение Φ имеет $l-2$ непрерывные производные,* $\Phi[0,0]=0$, $\Phi_v[0,0]v=-Lv$.

Запишем уравнение из (6.4) в виде

$$\Phi[\psi, v] = 0. \tag{6.7}$$

Поскольку оператор $\Phi_v[0,0]=-L$ осуществляет изоморфизм пространств Y и $L_q(\Omega, R^m)$, то по теореме о неявной функции множество всех решений задачи (6.7) локально задается равенством

$$v(x) = v[\psi](x), \tag{6.8}$$

где $v[\psi]$ – $(l-2)$-раза непрерывно дифференцируемое отображение малой окрестности нуля пространства N в пространство Y, причем $v[0]=0$.

Подставим найденное решение (6.8) задачи (6.4) в уравнение (6.5). Тогда получим уравнение, определяющее связь между ψ и τ

$$F[\psi,\tau] \equiv H(y(x)) + \frac{2\tau^2}{\sigma} f^i(y(x)) \left[\hat{u}^i(x) + v^i[\psi](x)\right] = 0, \quad x \in \Sigma. \tag{6.10}$$

Тройка v, ψ, τ является решением задачи (6.4), (6.5) в том и только том случае, если v определяется по ψ равенством (6.8), а ψ и τ связаны соотношением (6.9). Очевидно, что $\psi \equiv 0$ удовлетворяет (6.9) при всех $\tau \in R^1$. Этому решению задачи (6.9) соответствует тройка $v \equiv 0$, $y(x) \equiv x$, $\tau \in R^1$, которая в свою очередь, порождает решение $\hat{u}$, $\hat{\chi}$ задачи (6.2), пригодное при всех τ, $|\tau - \tau_0| < \delta'$.

Точка $\tau_0 \in R^1$ называется точкой бифуркации для уравнения

$$F[\psi,\tau] = 0, \quad \psi \in N, \quad \|\psi\|_{C^{2,\varepsilon}} < \delta, \quad \tau \in R^1, \tag{6.10}$$

если для любой сколь угодно малой окрестности $U \subset X \times R^1$ точки $\psi = 0$, $\tau = \tau_0$ существует решение ψ, τ задачи (6.10) с $\psi \neq 0$. Очевидно, что эти решения ψ, τ порождают решения $\hat{u}(x,\tau)$, $\hat{\chi}(x,\tau)$ исходной задачи с $\hat{u}(x,\tau) \not\equiv \hat{u}(x)$, $\hat{\chi}(x,\tau) \not\equiv \hat{\chi}(x)$ при $\tau \neq \tau_0$.

Наша цель – найти необходимое условие того, что τ_0 является точкой бифуркации и сформулировать дополнительные предположения при наличии которых бифуркация действительно будет происходить. Мы остановимся на простейшей схеме изучения этих вопросов, основанной на применении леммы Морса. Для ее использования нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 6.2. *Отображение $F[\psi,\tau]$, $\psi \in N$ из (4.11) с $k=2$ и указанным выше ε, $\|\psi\|_{C^{2,\varepsilon}} < \delta$, $\tau \in R^1$ имеет $(l-2)$ непрерывные производные, как отображение в пространство $C^{0,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$. Кроме того, справедливы формулы*

$$F_\psi[0,\tau]\psi = -M\psi, \quad F_{\psi\tau}[0,\tau]\psi = \frac{4\tau}{\sigma}\frac{\partial f^i(x)}{\partial n}\hat{u}^i(x)\psi,$$

где M – оператор из (5.9), $\psi \in N$.

Доказательство. Сформулированная гладкость отображения F очевидна. Для нормали к поверхности $y(\Sigma)$ в точке $y = y(x)$, $x \in \Sigma$ в теореме 4.3 была получена формула

$$n_{y(\Sigma)}(y(x)) = \frac{\dot{y}^{-1*}(x)n(x)}{|\dot{y}^{-1*}(x)n(x)|}, \qquad x \in \overline{\Sigma}.$$

Так как касательная компонента градиента на поверхности $y(\Sigma)$ имеет вид

$$\begin{gathered}\delta_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - n^i_{y(\Sigma)}(y(x))n^k_{y(\Sigma)}(y(x))\frac{\partial}{\partial y_k} = \\ = \dot{y}^{-1}_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\dot{y}^{-1}_{sk}\dot{y}^{-1}_{ri}\dot{y}^{-1}_{jk}n^r n^s}{|\dot{y}^{-1*}n|^2}\frac{\partial}{\partial x_j}, \\ y = y(x), \quad n = n(x), \quad x \in \overline{\Sigma},\end{gathered}$$

то для средней кривизны поверхности $y(\Sigma)$ справедливо равенство

$$\begin{gathered}H_{y(\Sigma)}(y(x)) = -\delta_i n^i_{y(\Sigma)}(y(x)) = \\ = -\left(\dot{y}^{-1}_{ki}\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\dot{y}^{-1}_{sk}\dot{y}^{-1}_{ri}\dot{y}^{-1}_{jk}n^r n^s}{|\dot{y}^{-1*}n|^2}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\dot{y}^{-1}_{ti}n^t}{\dot{y}^{-1*}n}, \\ y = y(x), \quad n = n(x), \quad x \in \overline{\Sigma}.\end{gathered}$$

Вычисление дифференциалов отображения F основано на линеаризации последнего равенства. •

Рассмотрим уравнение $\Phi[\psi,\tau] = 0$, где ψ лежит в достаточно малой окрестности нуля некоторого банахова пространства N, $\tau \in R^1$. Предположим, что отображение Φ имеет r непрерывных производных как отображение $N \times R^1$ в Y, где Y – некоторое банахово пространство. Пусть $\Phi[0,\tau] \equiv 0$. Сформулируем ряд утверждений о точках бифуркации для уравнения $\Phi[\psi,\tau] = 0$.

Необходимое условие бифуркации. *Пусть $r \geqslant 1$ и τ_0 – точки бифуркации. Тогда оператор $\Phi[0,\tau_0]$ не осуществляет изоморфизм пространств N и Y.*

Достаточное условие бифуркации. *Пусть $r \geqslant 2$ и для τ_0 выполняются следующие условия.*

1) *Оператор $\Phi_\psi[0,\tau_0]$ имеет одномерное ядро, порождаемое вектором ψ_0.*
2) *Образ оператора $\Phi_\psi[0,\tau_0]$ – замкнутое подпространство $Y_1 \subset Y$ единичной коразмерности.*

" *3)" $\Phi_{\tau\tau}[0,\tau_0] \in Y_1$, $\Phi_{\psi\tau}[0,\tau_0]\psi_0 \notin Y_1$.*

При выполнении этих условий точка τ_0 является точкой бифуркации.

С помощью сформулированных утверждений докажем следующую теорему.

Теорема 6.1. а) *Пусть $l \geqslant 3$ и точка τ_0 является точкой бифуркации для уравнения* (6.10). *Тогда существует ненулевое решение задачи*

$$\begin{aligned} &M\psi = 0, \quad x \in \overline{\Sigma}, \quad \psi \in C^{2,\varepsilon}(\overline{\Sigma}),\\ &\frac{\partial\psi}{\partial t} - (d''n,n)\psi = 0, \quad x \in \partial\Sigma. \end{aligned} \tag{6.11}$$

б) *Пусть задача* (6.11) *имеет единственное с точностью до множителя ненулевое решение ψ_0 и выполняется неравенство*

$$\tau_0 \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial f^i(x)}{\partial n}\hat{u}^i|\psi_0(x)|^2\,dS \neq 0. \tag{6.12}$$

Тогда точка τ_0 является точкой бифуркации.

Доказательство. а) Так как оператор M эллиптичен, а условие на $\partial\Sigma$ является классическим условием третьей краевой задачи, то для уравнения

$$\begin{aligned} &M\psi = g, \quad x \in \overline{\Sigma}, \quad \psi \in C^{2,\varepsilon}(\overline{\Sigma}), \quad g \in C^{0,\varepsilon}(\overline{\Sigma}),\\ &\frac{\partial\psi}{\partial t} - (d''n,n)\psi = 0, \quad x \in \partial\Sigma \end{aligned} \tag{6.13}$$

справедлива теорема Фредгольма. Поэтому оператор $F_\psi[0,\tau_0]$ не осуществляет изоморфизма пространств N и $C^{0,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ в том и только том случае, если выполняется условие а) теоремы. Таким образом, условие а) совпадает в нашем случае с необходимым условием бифуркации.

б) Пусть задача (6.11) имеет одно с точностью до множителя ненулевое решение ψ_0. По теореме Фредгольма задача (6.13) разрешима для тех и только тех g, для которых

$$\int\limits_{\Sigma} g(x)\psi_0(x)\,dS = 0.$$

Таким образом, Y_1 в нашем случае – замкнутое подпространство пространства $C^{0,\varepsilon}(\overline{\Sigma})$ единичной коразмерности, а условия 3) из достаточных условий бифуркации перепишутся в виде

$$\int\limits_{\Sigma} f^i(x)\hat{u}^i(x)\psi_0(x)\,dS = 0, \quad \tau_0\int\limits_{\Sigma} \frac{\partial f^i(x)}{\partial n}\hat{u}^i(x)\psi_0^2(x)\,dS \neq 0.$$

Выполнение первого из этих соотношений следует из равенства $f(x) = 0$, $x \in \Sigma$, а второе совпадает с (6.12). Итак, при сделанных предположениях выполняются достаточные условия бифуркации. •

§7. Библиографические замечания

Сведения о гладкости решений эллиптических систем в необходимом для нас объеме содержится в [7]. Свойства функции расстояния от точки до границы области изложены в [8]. Классическая и слабая формы теорем о неявных функциях доказаны в [9]. С вычислением первой и второй вариации периметра во внутренних точках поверхности можно ознакомиться по книге [8]. Мультипликативные оценки (5.19) являются огрублением стандартных и содержатся в [10]. Теория бифуркации, основанная на лемме Морса, изложена в [11].

Литература

1. В. Г. Осмоловский, *Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений.* — Сиб. матем. журн. **35 No. 4** (1994), 835–846.
2. В. Г. Осмоловский, *Зависимость состояний равновесия двуфазовой среды от коэффициентов поверхностного натяжения и температуры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **213** (1994), 131–150.

3. Н. Ф. Морозов, В. Г. Осмоловский, *О постановке и теореме существования для вариационной задачи о фазовых переходах в механике сплошных сред.* — Журн. прикл. матем. и мех. **58 No. 5** (1994), 125–132.
4. В. Г. Осмоловский, *Вариационная задача теории упругости двуфазовой среды с нулевым коэффициентом поверхностного натяжения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **221** (1995), 208–225.
5. В. Г.Осмоловский, *Теорема существования и точные решения в вариационной задаче о высокотемпературных фазовых переходах при нулевом коэффициенте поверхностного натяжения.* — Проблемы математического анализа. № 15, СПб..
6. В. Г. Осмоловски, *Тхе пхасе транситион ин мецханиц оф цонтинуум медиа фор биг лоадинг.* — Матх. Нацхрицхтен (1996).
7. Я. А. Ройтберг, З. Г. Шефтель, *Теорема о диффеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложение.* — Матем. сб., **78**, № 3 (1969), 446–472.
8. Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации.* М, 1989.
9. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* М, 1977.
10. В. Г. Осмоловский, *Линейные и нелинейные возмущения оператора* div. С.-Пб.
11. Л. Ниренберг, *Лекции по нелинейному функциональному анализу.* М, 1977.

Osmolovski V. G. Free boundary surface bifurcation in the phase transition problem of elasticity.

The paper is concerned with the phase transition problem in elastic medium lying in one-parameter force field. The stability and bifurcation problem for interface between two phases is studied.

Санкт-Петербургский
Государственный Университет

Поступило 15 марта 1996 г.