Г. А. Серегин, Т. Н. Шилкин

РЕГУЛЯРНОСТЬ МИНИМАЙЗЕРОВ НЕКОТОРЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Посвящается памяти
А. П. Осколкова

Рассматривается вариационная задача для функционала, зависящего от симметричной части градиента искомой функции. Предполагается, что интегрант задачи имеет степенной рост с показателем, меньшим двух. Доказывается существование суммируемых вторых производных решения вблизи плоского участка границы. В двумерном случае установлена непрерывность по Гельдеру тензоров деформаций и напряжений.

§1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathbb{M}^n_s$ пространство вещественных симметричных матриц порядка n со скалярным произведением

$$\sigma : \varepsilon = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad \sigma, \varepsilon \in \mathbb{M}^n_s$$

(здесь и далее, если не оговорено противное, подразумевается суммирование по повторяющимся латинским индексам, изменяющимся от 1 до n.) Кроме того, мы будем использовать следующие обозначения:

$$f \cdot v = f_i v_i, \quad |f| = (f_i f_i)^{1/2}, \quad f, v \in \mathbb{R}^n,$$
$$|\varepsilon| = (\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2}, \quad \varepsilon \in \mathbb{M}^n_s,$$
$$u \otimes v = (u_i v_j) \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Данная работа выполнена при финансовой поддержке фонда International Association for the Promotion of Cooperation with Scientists from the Independent States of the Former Soviet Union (INTAS) Ref. No. 94-1375.

Пусть $L : \mathbb{M}^n_s \to \mathbb{M}^n_s$ – положительный симметричный линейный оператор, удовлетворяющий неравенствам

$$\alpha_1|\tau|^2 \leqslant \tau : L\tau \leqslant \alpha_2|\tau|^2, \quad \forall \tau \in \mathbb{M}^n_s,$$

с некоторыми положительными постоянными α_1 и α_2. Используя оператор L, можно ввести на $\mathbb{M}^n_s$ норму

$$[\tau] = (\tau : L\tau)^{1/2},$$

эквивалентную обычной евклидовой норме $|\tau|$.

Для заданной функции

$$f \in L^{p'}(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad 1 < p < 2, \quad p' = \frac{p}{p-1} \tag{1.1}$$

рассмотрим вариационную задачу:

$$\begin{aligned} &\text{Найти вектор-функцию} \quad u \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n) \quad \text{такую,} \\ &\text{что} \quad J(u) \leqslant J(v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega; \mathbb{R}^n). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь

$$J(v) = \int\limits_{\Omega} \{g(\varepsilon(v)) - f \cdot v\} dx$$

– функционал задачи, а $g : \mathbb{M}^n_s \to \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geqslant 0\}$ – ее интегрант, имеющий вид

$$g(\tau) = g_0([\tau]), \quad \tau \in \mathbb{M}^n_s,$$

где четная функция $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условиям

- g_0 – функция класса C^1 на $\mathbb{R}$, (1.3_1)
- g_0' монотонно возрастает на $\mathbb{R}_+$, (1.3_2)
- $g_0(0) = 0, \quad g_0'(0) = 0,$ (1.3_3)
- функция $t \mapsto g_0'(t)$ непрерывно дифференцируема при всех t кроме, быть может, точек $\pm t_0$. При $t = t_0$ существуют левая и правая производные $(g_0'')_-(t_0)$ и $(g_0'')_+(t_0)$. Мы будем считать, что функция $t \mapsto g_0'(t)$ в точках $\pm t_0$ доопределена значением $(g_0'')_+(t_0)$. (1.3_4)

- существуют положительные постоянные ν_1 и ν_2 такие, что

$$\nu_1(1+t^2)^{\frac{p-2}{2}} \leqslant h_1(t) \equiv \min\left(g_0''(t), \frac{g_0'(t)}{t}\right) \leqslant$$
$$\leqslant h_2(t) \equiv \max\left(g_0''(t), \frac{g_0'(t)}{t}\right) \leqslant \qquad (1.3_5)$$
$$\leqslant \nu_2(1+t^2)^{\frac{p-2}{2}},$$

$\varepsilon(v)$ – тензор малых упругопластических деформаций, отвечающий вектору перемещений v и равный симметричной части его градиента:

$$\varepsilon(v) = (\varepsilon_{ij}(v)), \quad 2\varepsilon_{ij}(v) = v_{i,j} + v_{j,i},$$
$$v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,\dots,n,$$

$L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $W_p^l(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $\overset{\circ}{W}{}_p^l(\Omega;\mathbb{R}^n)$ – известные пространства Лебега и Соболева вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$.

К вариационным задачам вида (1.2) приводится задача о плоско-напряженном состоянии тонких упруго-пластических пластин из несжимаемого материала со степенным упрочнением.

Целью данной работы является исследование регулярности минимайзеров задачи (1.2) вблизи границы. (Внутренняя регулярность изучалась в работе [1].) В нашем подходе существенным моментом является оценка вторых производных вектора перемещений вблизи границы. В случае интегрантов, зависящих от симметричной части градиента искомой функции и имеющих квадратичный рост, соответствующая W_2^2-оценка получается обычным образом. А именно, сначала оцениваются производные тензора деформаций вдоль направлений, касательных к границе, далее все вторые производные вектора перемещений, содержащие хотя бы одну производную по какому-либо касательному направлению оцениваются при помощи L^2-неравенства Корна через касательные производные тензора деформаций, и наконец вторые нормальные производные выражаются через остальные из уравнений Эйлера, что и заканчивает получение требуемой W_2^2-оценки.

К сожалению, для интегрантов, имеющих неквадратичный рост описанная выше схема оценки вторых производных вблизи границы требует некоторой модификации в той ее части, которая связана с использованием неравенства Корна при оценке вторых производных, содержащих хотя бы одно касательное дифференцирование, через касательные производные тензора деформаций.

§2. Формулировка основных результатов

Поскольку строго выпуклый функционал J коэрцитивен на рефлексивном пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n)$, задача (1.2) имеет единственное решение, а необходимое и достаточное условие экстремума имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v)dx = \int\limits_{\Omega} f \cdot v\, dx, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n), \tag{2.1}$$

где

$$\sigma = \frac{\partial g}{\partial \tau}(\varepsilon(u)) = \frac{g_0'([\varepsilon(u)])}{[\varepsilon(u)]}\, L\varepsilon(u). \tag{2.2}$$

Отметим, что σ является решением вариационной задачи, двойственной к задаче (1.2):

$$\begin{gathered} \text{Найти тензор-функцию} \quad \sigma \in Q_f \quad \text{такую,} \\ \text{что} \quad R(\sigma) \geqslant R(\tau), \quad \forall \tau \in Q_f. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь

$$Q_f = \left\{ \tau \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{M}^n_s) | \int\limits_{\Omega} \tau : \varepsilon(v)dx = \int\limits_{\Omega} f \cdot v dx, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega;\mathbb{R}^n) \right\},$$

$$R(\tau) = -\int\limits_{\Omega} g^*(\tau)dx,$$

где $g^* : \mathbb{M}^n_s \to \mathbb{R}$ – преобразование Юнга функции g:

$$g^*(\tau) = \sup\{\tau : \varepsilon - g(\varepsilon) | \varepsilon \in \mathbb{M}^n_s\}.$$

Решения задач (1.2) и (2.3) связаны соотношениями двойственности:

$$\varepsilon(u) = \frac{\partial g^*}{\partial \tau}(\sigma). \tag{2.4}$$

Более того,

$$g^*(\tau) = g_0^*(\{\tau\}),$$

где $\{\tau\} = (\tau : L^{-1}\tau)^{1/2}$, а

$$g_0^*(s) = \sup\{st - g(t) | t \in \mathbb{R}\}$$

– преобразование Юнга функции g_0.

В настоящей работе мы ограничимся исследованием регулярности задачи (1.2) вблизи плоского участка $\partial_0\Omega$ границы $\partial\Omega$. Обозначим через $B_R(x_0)$ открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0 радиуса R. Для точек $x_0 \in \partial_0\Omega$ полагаем

$$B_R^+(x_0) = \Omega \cap B_R(x_0).$$

Нашим первым результатом является

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнены условия* (1.1), (1.3_k), $k = 1, \dots, 5$, *и пусть точка* $x_0 \in \partial_0\Omega$ *и число* $R > 0$ *таковы, что*

$$B_{3R}(x_0) \cap \partial\Omega \subset \partial_0\Omega.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

$$\varepsilon(u) \in W_p^1(B_R^+(x_0), \mathbb{M}_s^n), \quad \sigma \in W_2^1(B_R^+(x_0); \mathbb{M}_s^n), \tag{2.5}$$

и более того,

$$\int\limits_{B_R^+(x_0)} (1 + |\varepsilon(u)|^2)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla\varepsilon(u)|^2 < +\infty, \tag{2.6}$$

$$\int\limits_{B_R^+(x_0)} (1 + |\varepsilon(u)|^2)^{\frac{2-p}{2}} |\nabla\sigma|^2 dx < +\infty. \tag{2.7}$$

Для того, чтобы сформулировать второй результат нашей работы, напомним определение пространства Морри $L^{q,\mu}(\Omega; \mathbb{R}^n)$:

$$f \in L^{q,\mu}(\Omega) \Longleftrightarrow \|f\|_{L^{q,\mu}(\Omega)} \equiv \left\{ \sup_{\substack{x \in \Omega \\ 0<\rho<\operatorname{diam}\Omega}} \rho^{-\mu} \int\limits_{\Omega \cap B_\rho(x)} |f|^q dy \right\}^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Через $C^\nu(\bar{\Omega})$ обозначим пространство функций, непрерывных по Гельдеру с показателем ν на замкнутом множестве $\bar{\Omega}$.

Теорема 2.2. *Предположим, что $n = 2$ и выполнены все условия теоремы 2.1. Пусть дополнительно*

$$f \in L^{p',\mu}(\Omega; \mathbb{R}^2) \tag{2.8}$$

с некоторым $\mu > 0$.

Тогда существует число $\nu \in (0, 1)$ такое, что

$$\varepsilon(u), \quad \sigma \in C^{\nu}(\overline{B}^{+}_{R}(x_0); \mathbb{M}^2_s).$$

Замечание 2.1. Результаты теорем 2.1 и 2.2 верны для внутренних подмножеств множества Ω и часть из них была получена ранее в работах [1] и [2].

Замечание 2.2. При доказательстве теоремы 2.2 мы будем следовать схеме, предложенной в работе [2] для исследования внутренней регулярности в случае функционалов, имеющих $L \log L$-рост относительно тензора деформаций.

§3 Доказательство теоремы 2.1

Следуя [1–3] рассмотрим билинейную форму, зависящую от тензорного параметра τ,

$$E(\tau; \varkappa, \varepsilon) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial \tau^2}(\tau)\varkappa\right) : \varepsilon =$$
$$= \frac{g_0'([\tau])}{[\tau]}\, \varepsilon : L\varkappa + \left(g_0''([\tau]) - \frac{g_0'([\tau])}{[\tau]}\right) \frac{\varkappa : L\tau\varepsilon : L\tau}{[\tau]^2}.$$

Она обладает следующими свойствами:

$$|E(\tau; \varkappa, \varepsilon)|^2 \leqslant E(\tau; \varkappa, \varkappa) E(\tau; \varepsilon, \varepsilon), \tag{3.1}$$

$$\alpha_- h_1(|\tau|)|\varkappa|^2 \leqslant E(\tau; \varkappa, \varkappa) \leqslant \alpha_+ h_2(|\tau|)|\varkappa|^2 \tag{3.2}$$

с некоторыми положительными постоянными α_- и α_+, зависящими только от α_1, α_2.

Определим компоненты вектора $p(u) = (p_1(u), p_2(u), \ldots, p_n(u))$ следующим образом:

$$p_1(u) = \sigma_{,1} : \varepsilon(u_{,1}), \quad p_2(u) = \sigma_{,2} : \varepsilon(u_{,2}) \quad \text{и т.д.}$$

Из соотношений

$$\sigma_{,k} : \varkappa = E(\varepsilon(u); \varepsilon(u_{,k}), \varkappa), \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{3.3}$$

с учетом неравенств (3.2) для компонент $p(u)$ получаем оценки

$$\nu_- r^{p-2}|\varepsilon(u_{,k})|^2 \leqslant p_k(u) \leqslant \nu_+ r^{p-2}|\varepsilon(u_{,k})|^2, \tag{3.4}$$

$$\beta_- r^{2-p}|\sigma_{,k}|^2 \leqslant p_k(u) \leqslant \beta_+ r^{2-p}|\sigma_{,k}|^2, \quad k=1,\dots,n. \tag{3.5}$$

Здесь $r = (1+|\varepsilon(u)|^2)^{1/2}$, $\nu_- = \nu_1\alpha_-$, $\nu_+ = \nu_2\alpha_+$, $\beta_- = \frac{1}{\nu_+}$, $\beta_+ = \frac{\nu_+}{(\nu_-)^2}$.

Рассмотрим регуляризацию задачи (1.2):

$$\begin{gathered} \text{найти вектор-функцию} \quad u^\delta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{R}^n) \\ \text{такую, что} \quad J^\delta(u^\delta) \leqslant J^\delta(v) \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{R}^n), \end{gathered} \tag{3.6}$$

где $J^\delta(v) = \frac{\delta}{2}\int\limits_\Omega |\varepsilon(v)|^2 dx + J(v)$. Задача (3.6) также имеет единственное решение для любого $\delta > 0$. Необходимое и достаточное условие ее экстремума имеет вид

$$\int\limits_\Omega \sigma^\delta : \varepsilon(v)dx = \int\limits_\Omega f\cdot v\,dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega;\mathbb{R}^n), \tag{3.7}$$

где

$$\sigma^\delta = \delta\varepsilon(u^\delta) + \bar\sigma^\delta, \quad \bar\sigma^\delta = \frac{g_0'([\varepsilon(u^\delta)])}{[\varepsilon(u^\delta)]}\,L\varepsilon(u^\delta). \tag{3.8}$$

Задача (3.6) аппроксимирует задачу (1.2) в следующем смысле (см. [1]):

$$\begin{aligned} u^\delta \to u \quad &\text{в} \quad L^q(\Omega;\mathbb{R}^n) \quad \forall q < \frac{np}{n-p}, \\ \varepsilon(u^\delta) \rightharpoonup \varepsilon(u) \quad &\text{в} \quad L^p(\Omega;\mathbb{M}^n_s), \\ \bar\sigma^\delta \rightharpoonup \sigma \quad &\text{в} \quad L^{p'}(\Omega;\mathbb{M}^n_s), \\ \delta\int\limits_\Omega |\varepsilon(u^\delta)|^2 dx \to 0 \quad &\text{при} \quad \delta \to 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(Здесь символы $\to$ и $\rightharpoonup$ обозначают сильную и слабую сходимости соответственно.)

Отметим, что билинейная форма задачи (3.6)

$$E^\delta(\tau;\varkappa,\varepsilon) = \delta\varkappa:\varepsilon + E(\tau;\varkappa,\varepsilon)$$

удовлетворяет соотношениям

$$|E^\delta(\tau;\varkappa,\varepsilon)|^2 \leqslant E^\delta(\tau;\varkappa,\varkappa)E^\delta(\tau;\varepsilon,\varepsilon), \tag{3.10}$$

$$(\delta+\alpha_- h_1(|\tau|))|\varkappa|^2 \leqslant E^\delta(\tau;\varkappa,\varkappa) \leqslant (\delta+\alpha_+ h_2(|\tau|))|\varkappa|^2, \tag{3.11}$$

а для компонент векторов $q^\delta(u^\delta)=(q_1^\delta(u^\delta),\dots,q_n^\delta(u^\delta))$ и $p^\delta(u^\delta)=(p_1^\delta(u^\delta),\dots,p_n^\delta(u^\delta))$, определенных как

$$q_1^\delta(u^\delta)=\bar\sigma^\delta_{,1}:\varepsilon(u^\delta_{,1}), \quad q_2^\delta(u^\delta)=\bar\sigma^\delta_{,2}:\varepsilon(u^\delta_{,2}) \quad \text{и т.д.}$$
$$p_k^\delta(u^\delta)=\delta|\varepsilon(u^\delta_{,k})|^2+q_k^\delta(u^\delta), \quad k=1,\dots,n,$$

из тождеств

$$\sigma^\delta_{,k}:\varkappa=E^\delta(\varepsilon(u^\delta);\varepsilon(u^\delta_{,k}),\varkappa) \quad k=1,\dots,n, \tag{3.12}$$

вытекают оценки

$$(\delta+\nu_- r_\delta^{p-2})|\varepsilon(u^\delta_{,k})|^2 \leqslant p_k^\delta(u^\delta) \leqslant (\delta+\nu_+ r_\delta^{p-2})|\varepsilon(u^\delta_{,k})|^2, \tag{3.13}$$

$$\beta_- r_\delta^{2-p}|\bar\sigma^\delta_{,k}|^2 \leqslant q_k^\delta(u^\delta) \leqslant \beta_+ r_\delta^{2-p}|\bar\sigma^\delta_{,k}|^2, \quad k=1,\dots,n, \tag{3.14}$$

где $r_\delta=(1+|\varepsilon(u^\delta)|^2)^{1/2}$.

Используя технику конечных разностей можно показать, что при выполнении условий теоремы 2.1

$$\varepsilon(u^\delta) \quad \text{и} \quad \sigma^\delta \quad \text{– функции класса} \quad W_2^1 \quad \text{вблизи} \quad \partial_0\Omega. \tag{3.15}$$

Поэтому мы будем проводить доказательство теоремы 2.1, следуя такому плану: сначала установим не зависящие от параметра δ оценки величины

$$\int\limits_{B_R^+(x_0)} \sigma^\delta_{,k}:\varepsilon(u^\delta_{,k})dx, \tag{3.16}$$

а затем, устремляя δ к нулю, получим предельные оценки (2.5), (2.6) и (2.7).

Мы начнем доказательство теоремы 2.1 с оценки касательных производных вблизи границы. Фиксируем точку $x_0\in\partial_0\Omega$ и число $R>0$ как того требует теорема 2.1. Выберем локальную систему координат с центром в точке x_0 таким образом, чтобы внешняя нормаль к $\partial_0\Omega$ была сонаправлена с осью x_n. Для удобства примем еще одно соглашение о суммировании по повторяющимся греческим индексам в пределах от 1 до $n-1$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(B_{2R}(x_0))$ – обычная срезающая функция:

$$\varphi = 1 \quad \text{на} \quad B_R(x_0), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad |\nabla^k \varphi| \leqslant \frac{C_1}{R^k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{3.17}$$

Лемма 3.1. *При выполнении условий теоремы 1 верна оценка*

$$\int\limits_{B^+_{2R}(x_0)} \varphi^2 \sigma^\delta_{,\alpha} : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx \leqslant C_2$$

с положительной постоянной C_2, не зависящей от δ.

Доказательство. Пусть Ω' – область с гладкой границей, такая, что

$$B^+_{2R} \equiv B^+_{2R}(x_0) \subset \Omega' \subset \Omega,$$

и пусть $w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{\Omega'} \varepsilon(w) : \varepsilon(v) dx = \int\limits_{\Omega'} f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega'; \mathbb{R}^n). \tag{3.18}$$

Тогда известно, что $w \in W^2_{p'}(\Omega'; \mathbb{R}^n)$ и верна оценка

$$\|w\|_{W^2_{p'}(\Omega'; R^n)} \leqslant C_3 \|f\|_{p', \Omega'}. \tag{3.19}$$

Из (3.7), (3.15) и (3.18) вытекают соотношения

$$\int\limits_{B^+_{2R}} \sigma^\delta_{,\alpha} : \varepsilon(v) dx = \int\limits_{B^+_{2R}} \varepsilon(w_{,\alpha}) : \varepsilon(v) dx, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(B^+_{2R}; \mathbb{R}^n), \tag{3.20}$$

$$\operatorname{div} \sigma^\delta + f = 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{3.21}$$

Полагая в (3.20) $v = \varphi^2 u^\delta_{,\alpha}$, получаем

$$I_1 := \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi^2 \sigma^\delta_{,\alpha} : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$J_1 = -\int\limits_{B_{2R}^+} \sigma^\delta_{,\alpha} : (u^\delta_{,\alpha} \otimes \nabla\varphi^2)dx,$$

$$J_2 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \varepsilon(w_{,\alpha}) : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha})dx,$$

$$J_3 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varepsilon(w_{,\alpha}) : (u^\delta_{,\alpha} \otimes \nabla\varphi^2)dx.$$

Представим J_1 в виде

$$J_1 = J_1' + J_2',$$

где

$$J_1' = -2\int\limits_{B_{2R}^+} \sigma^\delta_{ij,\alpha}\varepsilon_{i\alpha}(u^\delta)\varphi^2_{,j}dx,$$

$$J_1'' = \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma^\delta_{ij,\alpha}u^\delta_{\alpha,i}\varphi^2_{,j}dx.$$

Для того, чтобы оценить J_1', введем $n-1$ матрицу $S^{(\alpha)} = (S^{(\alpha)}_{ij}) = (\varepsilon_{i\alpha}(u^\delta)\varphi_{,j})$. Тогда с учетом соотношений (3.12), (3.10) и (3.11) получим оценку

$$J_1' = -4\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi\sigma^\delta_{ij,\alpha}S^{(\alpha)}_{ij} \leqslant$$

$$\leqslant 4I_1^{1/2}\left(\int\limits_{B_{2R}^+} (\delta + \alpha_+ h_2(|\varepsilon(u^\delta)|)S^{(\alpha)} : S^{(\alpha)}dx\right)^{1/2},$$

из которой вытекает неравенство

$$J_1' \leqslant C_4 I_1^{1/2}\left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^2dx + \int\limits_{B_{2R}^+} r_\delta^p dx\right)^{1/2}. \tag{3.22}$$

Здесь постоянная C_4 не зависит от δ.

Заметим, что в силу (3.9) второй множитель в правой части (3.22) ограничен относительно δ.

Далее, выполняя интегрирование по частям в J_1'' и учитывая краевое условие

$$u^\delta = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{3.23}$$

получим

$$\begin{aligned} J_1'' = &\int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij,i}^\delta u_{\alpha,\alpha}^\delta \varphi_{,j}^2\, dx + \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij,i}^\delta u_\alpha^\delta \varphi_{,j\alpha}^2 dx \\ &+ \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij}^\delta u_{\alpha,\alpha}^\delta \varphi_{,ij}^2 dx + \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij}^\delta u_\alpha^\delta \varphi_{,ij\alpha}^2 dx. \end{aligned}$$

Чтобы исключить $\sigma_{ij,i}^\delta$ в первых двух слагаемых, воспользуемся уравнениями (3.21). Получим соотношение

$$\begin{aligned} J_1'' = &-\int\limits_{B_{2R}^+} f_j \varepsilon_{\alpha\alpha}(u^\delta)\varphi_{,j}^2\, dx - \int\limits_{B_{2R}^+} f_j u_\alpha^\delta \varphi_{,j\alpha}^2 dx \\ &+ \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij}^\delta \varepsilon_{\alpha\alpha}(u^\delta)\varphi_{,ij}^2 dx + \int\limits_{B_{2R}^+} \sigma_{ij}^\delta u_\alpha^\delta \varphi_{,ij\alpha}^2 dx. \end{aligned}$$

При помощи соотношений (3.8) устанавливаем

$$\begin{aligned} J_1'' \leqslant\ & 2\sup|\nabla\varphi| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^p dx \right)^{1/p} + \\ &+ \sup|\nabla^2\varphi^2| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |u^\delta|^p dx \right)^{1/p} + \\ &+ \sup|\nabla^2\varphi^2|\delta \int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^2 dx + \end{aligned}$$

$$+\sup|\nabla^2\varphi^2|\left(\int\limits_{B_{2R}^+}|\bar\sigma^\delta|^{p'}dx\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{B_{2R}^+}|\varepsilon(u^\delta)|^p dx\right)^{1/p}+$$

$$+\sup|\nabla^3\varphi^2|\left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+}|\varepsilon(u^\delta)|^2 dx\right)^{1/p}\left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+}|u^\delta|^2 dx\right)^{1/2}+ \qquad (3.24)$$

$$+\sup|\nabla^3\varphi^2|\left(\int\limits_{B_{2R}^+}|\bar\sigma^\delta|^{p'}dx\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{B_{2R}^+}|u^\delta|^p dx\right)^{1/p},$$

откуда согласно (3.9) следует, что J_1'' ограничен относительно δ при $\delta\to 0$.

Перейдем к оценке J_2. По неравенству Гельдера имеем

$$\int\limits_{B_{2R}^+}\varphi^p|\varepsilon(u^\delta_{,k})|^p dx\leqslant\left(\int\limits_{B_{2R}^+}r_\delta^p dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\left(\int\limits_{B_{2R}^+}\varphi^2 r_\delta^{p-2}|\varepsilon(u^\delta_{,k})|^2 dx\right)^{\frac{p}{2}}, \qquad (3.25)$$

откуда в силу (3.13), (3.14) и (3.19) вытекают неравенства

$$J_2\leqslant C_5\|f\|_{p',\Omega}\|r_\delta\|_{p,\Omega}^{\frac{2-p}{2}}I_1^{1/2} \qquad (3.26)$$

с постоянной C_5, не зависящей от δ.

Наконец, при оценке J_3 воспользуемся соотношением (3.19) и L^p-неравенством Корна (см. [5]). Тогда, принимая во внимание краевое условие (3.23), получаем

$$\begin{aligned}J_3&\leqslant 2\sup|\nabla\varphi|\|\nabla\varepsilon(w)\|_{p',B_{2R}^+}\|\nabla u^\delta\|_{p,B_{2R}^+}\leqslant\\&\leqslant C_6\|f\|_{p',\Omega}\|\varepsilon(u^\delta)\|_{p,B_{2R}^+},\end{aligned} \qquad (3.27)$$

где постоянная C_6 не зависит от δ.

Объединяя (3.22), (3.24), (3.26), (3.27) и учитывая (3.9) выводим оценку

$$I_1\leqslant C_7 I_1^{1/2}+C_8$$

с постоянными C_7 и C_8, не зависящими от δ. Лемма 1 доказана.

Перейдем к оценке нормальных производных в (3.16).

Лемма 3.2. *При выполнении условий теоремы* 1 *верна оценка*

$$\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{,n} : \varepsilon(u^\delta_{,n})dx \leqslant C_9$$

с положительной постоянной C_9*, не зависящей от* δ*. (Здесь и далее мы не предполагаем суммирование по* n*.)*

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$I_2 := \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{,n} : \varepsilon(u^\delta_{,n})dx = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha\beta,n} \varepsilon_{\alpha\beta}(u^\delta_{,n})dx,$$

$$S_2 = 2\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha n,n} \varepsilon_{\alpha n}(u^\delta_{,n})dx,$$

$$S_3 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{nn,n} \varepsilon_{nn}(u^\delta_{,n}).$$

Начнем с оценки S_2. Выразим $\sigma^\delta_{\alpha n,n}$ из уравнений (3.21):

$$\sigma^\delta_{\alpha n,n} = -f_\alpha - \sigma^\delta_{\alpha\beta,\beta} \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Тогда с учетом (3.8) и (3.25) получим

$$S_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\int\limits_{B_{2R}^+} |f|^{p'}dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} r_\delta^p dx\right)^{\frac{2-p}{2p}} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{p-2} |\varepsilon(u^\delta_{,n})|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+2\left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \varepsilon(u^\delta_{,\beta}) : \varepsilon(u^\delta_{,\beta})dx\right)^{1/2} \left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 |\varepsilon(u^\delta_{,n})|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+2\left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{2-p} \bar\sigma^\delta_{,\beta} : \bar\sigma^\delta_{,\beta}dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{p-2} |\varepsilon(u^\delta_{,n})|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Принимая во внимание соотношения (3.13), (3.14) и (3.9), приходим к оценке

$$S_2 \leqslant C_{10} I_2^{1/2} + C_{11} I_1^{1/2} I_2^{1/2},$$

где постоянные C_{10} и C_{11} не зависят от δ.

Аналогично оценивается S_3.

Перейдем к оценке S_1:

$$S_1 = \frac{1}{2} \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha\beta,n} (u^\delta_{\alpha,\beta n} + u^\delta_{\beta,\alpha n}) = S_1' + S_1'',$$

где

$$S_1' = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha\beta,n} (\varepsilon_{\alpha n}(u^\delta_{,\beta}) + \varepsilon_{\beta n}(u^\delta_{,\alpha})) dx,$$

$$S_1'' = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha\beta,n} u^\delta_{n,\alpha\beta} dx.$$

Для S_1' справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} S_1' \leqslant 2 \left(\delta \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 |\varepsilon(u^\delta_{,n})|^2 dx \right)^{1/2} \left(\delta \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx \right)^{1/2} + \\ + 2 \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{2-p} |\bar{\sigma}^\delta_{,n}|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{p-2} \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_{12} I_1^{1/2} I_1^{1/2} \end{aligned} \tag{3.28}$$

с положительной постоянной C_{12}, не зависящей от δ. Выполняя интегрирование по частям и пользуясь краевым условием (3.23), приведем S_1'' к виду

$$S_1'' = A_1 + A_2 + A_3,$$

где

$$A_1 = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \sigma^\delta_{\alpha\beta,\beta} \varepsilon_{nn}(u^\delta_{,\alpha}) dx,$$

$$A_2 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2_{,\beta} \sigma^\delta_{\alpha\beta,n} u^\delta_{n,\alpha} dx,$$

$$A_3 = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2_{,n} \sigma^\delta_{\alpha\beta,\beta} u^\delta_{n,\alpha} dx.$$

A_1 оценивается с учетом (3.8), (3.13) и (3.14)

$$\begin{gathered} A_1 \leqslant \delta \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx + \\ + \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{2-p} \bar\sigma^\delta_{,\beta} : \bar\sigma^\delta_{,\beta} dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{p-2} \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) : \varepsilon(u^\delta_{,\alpha}) dx \right)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C_{13} I_1, \end{gathered} \tag{3.29}$$

где постоянная C_{13} не зависит от δ. A_2 преобразуется при помощи (3.8) и интегрирования по частям.

$$\begin{gathered} A_2 = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2_{,\beta n} \sigma^\delta_{\alpha\beta} u^\delta_{n,\alpha} dx - \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2_{,\beta} \sigma^\delta_{\alpha\beta} \varepsilon_{nn}(u^\delta_{,\alpha}) dx \leqslant \\ \leqslant \sup |\nabla^2 \varphi^2| \left(\delta \int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\delta \int\limits_{B_{2R}^+} |\nabla u^\delta|^2 dx \right)^{1/2} + \\ + \sup |\nabla^2 \varphi^2| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\bar\sigma^\delta|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\nabla u^\delta|^p dx \right)^{1/p} + \end{gathered}$$

$$+2\sup|\nabla\varphi|\left(\delta\int\limits_{B^+_{2R}}|\varepsilon(u^\delta)|^2dx\right)^{1/2}\left(\delta\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2\varepsilon(u^\delta_{,\alpha}):\varepsilon(u^\delta_{,\alpha})dx\right)^{1/2}+$$

$$+2\sup|\nabla\varphi|\left(\int\limits_{B^+_{2R}}|\bar\sigma^\delta|^{p'}dx\right)^{1/p'}\left(\int\limits_{B^+_{2R}}r^p_\delta dx\right)^{\frac{2-p}{2p}}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2 r_\delta^{2-p}\varepsilon(u^\delta_{,\alpha}):\varepsilon(u^\delta_{,\alpha})\right)^{1/2}$$

Краевое условие (3.23) позволяет использовать L^2- и L^p-неравенства Корна для оценки членов, содержащих ∇u^δ:

$$\int\limits_{B^+_{2R}}|\nabla u^\delta|^q dx\leqslant C_{14}\int\limits_{B^+_{2R}}|\varepsilon(u^\delta)|^q dx,\quad q=2\quad\text{или}\quad p. \tag{3.30}$$

Учитывая (3.9), (3.13), (3.14), (3.30) приходим к соотношению

$$A_2\leqslant C_{15}I_1^{1/2}+C_{16} \tag{3.31}$$

с постоянными C_{15} и C_{16}, не зависящими от δ.

Для того, чтобы оценить A_3 выразим $\sigma^\delta_{\alpha\beta,\beta}$ из уравнений (3.21). Получим тождество

$$A_3=\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2_{,n}f_\alpha u^\delta_{n,\alpha}dx+\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2_{,n}\sigma^\delta_{\alpha n,n}u^\delta_{n,\alpha}dx.$$

Выполняя интегрирование по частям во втором слагаемом, устанавливаем

$$A_3=\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2_{,n}f_\alpha u^\delta_{n,\alpha}dx-\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2_{,nn}\sigma^\delta_{\alpha n}u^\delta_{n,\alpha}dx-$$

$$-\int\limits_{B^+_{2R}}\varphi^2_{,n}\sigma^\delta_{\alpha n}\varepsilon_{nn}(u^\delta_{,\alpha})dx.$$

Соотношения (3.8), (3.25) дают

$$A_3 \leqslant 2\sup|\nabla\varphi| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |f|^{p'}dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\nabla u^\delta|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+\sup|\nabla^2\varphi^2| \left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^2dx\right)^{1/2} \left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} |\nabla u^\delta|^2 dx\right)^{1/2} +$$

$$+\sup|\nabla^2\varphi^2| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\bar\sigma^\delta|^{p'}dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\nabla u^\delta|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+2\sup|\nabla\varphi| \left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u^\delta)|^2dx\right)^{1/2} \left(\delta\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2\varepsilon(u^\delta_{,\alpha}):\varepsilon(u^\delta_{,\alpha})dx\right)^{1/2} +$$

$$+2\sup|\nabla\varphi| \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\bar\sigma^\delta|^{p'}dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} r_\delta^p dx\right)^{\frac{2-p}{2p}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi^2 r_\delta^{p-2}\varepsilon(u^\delta_{,\alpha}):\varepsilon(u^\delta_{,\alpha})dx\right)^{1/2}$$

Вновь пользуясь L^2- и L^p-неравенствами Корна (3.30) для оценки членов, содержащих ∇u^δ, учитывая сходимости (3.9) и соотношения (3.13), (3.14) приходим к оценке

$$A_3 \leqslant C_{17} I_1^{1/2} + C_{18},$$

где постоянные C_{17} и C_{18} не зависят от δ.

Объединяя последнюю оценку с неравенствами (3.29), (3.31) и оценками для S_2 и S_3, завершаем доказательство леммы 3.2.

Утверждения лемм 3.1 и 3.2 и соотношения (3.13), (3.14) и (3.25) влекут за собой ограниченность относительно δ норм

$\|\nabla\sigma^\delta\|_{2,B_R^+}$ и $\|\nabla\varepsilon(u^\delta)\|_{p,B_R^+}$. Переходя к подпоследовательности по δ из (3.9) заключаем, что

$$\begin{aligned} \sigma^\delta &\rightharpoonup \sigma \quad \text{в} \quad W_2^1(B_R^+;\mathbb{M}_s^n), \\ \varepsilon(u^\delta) &\rightharpoonup \varepsilon(u) \quad \text{в} \quad W_p^1(B_R^+;\mathbb{M}_s^n), \\ \varepsilon(u^\delta) &\to \varepsilon(u) \quad \text{в} \quad L^q(B_R^+;\mathbb{M}_s^n) \quad \forall q < \frac{np}{n-p}, \\ \varepsilon(u^\delta) &\to \varepsilon(u) \quad \text{п.в. в} \quad B_R^+. \end{aligned} \tag{3.32}$$

В частности, справедливы утверждения (2.5).

Перейдем к доказательству (2.6), (2.7). Из лемм 3.1, 3.2 и соотношений (3.4) вытекает оценка

$$\int\limits_{B_R^+} r_\delta^{p-2}|\nabla\varepsilon(u^\delta)|^2dx \leqslant C_{19} \tag{3.33}$$

с постоянной C_{19}, не зависящей от δ.

Мы докажем (2.6), (2.7), осуществив предельный переход по δ в (3.33), следуя схеме, предложенной в [4] для доказательства существования минимайзеров выпуклых вариационных функционалов.

Из (3.32) по теореме Егорова получим, что для всякого $\rho > 0$ найдется множество $E_\rho \subset B_R^+$, на котором последовательность $\varepsilon(u^\delta)$ сходится к $\varepsilon(u)$ равномерно, причем

$$\operatorname{meas}(B_R^+ \setminus E_\rho) < \rho.$$

Кроме того, обозначим

$$\begin{aligned} E^N &= \{x \in B_R^+ : |\nabla\varepsilon(u)(x)| \leqslant N\}, \\ E_\rho^N &= E^N \cap E_\rho. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int\limits_{E_\rho^N} r_\delta^{p-2}|\nabla\varepsilon(u^\delta)|^2dx - \int\limits_{E_\rho^N} r^{p-2}|\nabla\varepsilon(u)|^2dx \geqslant \\ \geqslant 2\int\limits_{E_\rho^N} r_\delta^{p-2}\varepsilon(u_{,k}) : (\varepsilon(u^\delta_{,k}) - \varepsilon(u_{,k}))dx + \\ + \int\limits_{E_\rho^N} (r_\delta^{p-2} - r^{p-2})|\nabla\varepsilon(u)|^2dx, \end{aligned} \tag{3.34}$$

и правая часть (3.34) в силу (3.32) стремится к нулю при $\delta \to 0$, получим неравенство

$$\int\limits_{E_\rho^N} r^{p-2} |\nabla \varepsilon(u)|^2 dx \leqslant \varliminf_{\delta \to 0} \int\limits_{B_R^+} r_\delta^{p-2} |\nabla \varepsilon(u^\delta)|^2 dx \leqslant C_{19}. \tag{3.35}$$

Так как на множестве E^N $r^{p-2}|\nabla\varepsilon(u)|^2 \leqslant N^2$, то переходя к пределу по ρ, имеем соотношение

$$\int\limits_{E^N} r^{p-2} |\nabla \varepsilon(u)|^2 dx = \lim_{\rho \to 0} \int\limits_{E_\rho^N} r^{p-2} |\nabla \varepsilon(u)|^2 dx.$$

Устремляя N к бесконечности, получим из (3.35) утверждение (2.6) и неравенство

$$\int\limits_{B_R^+} r^{p-2} |\nabla \varepsilon(u)|^2 dx \leqslant \varliminf_{\delta \to 0} \int\limits_{B_R^+} r_\delta^{p-2} |\nabla \varepsilon(u^\delta)|^2 dx. \tag{3.36}$$

Соотношение (2.7) вытекает теперь из (3.4), (3.5). Теорема 2.1 доказана.

§4. Доказательство теоремы 2.2

Рассмотрим область с гладкой границей $\Omega_0 \subset \Omega$ такую, что

$$\partial_1 \Omega \equiv \bar{\Omega}_0 \cap \partial\Omega \subset \partial_0 \Omega.$$

Отметим, что из результатов работы [1] и теоремы 2.1 вытекает, что

$$\varepsilon(u) \in W_p^1(\Omega_0; \mathbb{M}_s^2), \quad \sigma \in W_2^1(\Omega_0; \mathbb{M}_s^2).$$

Пусть $3R_0 < \operatorname{dist}\{\bar{\Omega}_0, \partial\Omega \setminus \partial_0\Omega\}$. Тогда произвольные точка $x_0 \in \partial_1\Omega$ и число $R < R_0$ удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Выберем локальную систему координат с центром в точке x_0 таким образом, чтобы внешняя нормаль к $\partial_0\Omega$ была сонаправлена с осью x_n. Обозначим

$$p_0(u) = p_1(u) + p_2(u),$$

где $p_1(u) = \sigma_{,1} : \varepsilon(u_{,1})$, $p_2(u) = \sigma_{,2} : \varepsilon(u_{,2})$. Для точек $x_0 \in \partial_1\Omega$ и $R < R_0$ полагаем

$$T_R^+(x_0) = B_{2R}^+(x_0) \setminus B_R^+(x_0).$$

Имеет место следующая

Лемма 4.1. *При выполнении условий теоремы 2.2 справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_R^+(x_0)} p_0(u)dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{20}}{R}\left(\int\limits_{T_R^+(x_0)} p_0(u)dx\right)^{1/2} \int\limits_{T_R^+(x_0)} \sqrt{r^{2-p}p_0(u)}dx + C_{21}R^{\mu/p'}, \tag{4.1}$$

$$\forall x_0 \in \partial_1\Omega, \quad \forall R < R_0,$$

с постоянными C_{20} и C_{21}, не зависящими от R и x_0.

Доказательство. Пусть ω – выпуклая область с гладкой границей, такая, что

$$B_{\frac{3}{2}}^+(0) \subset \omega \subset B_2^+(0).$$

Обозначим через $\omega_R \equiv \omega_R(x_0)$ область, которая получается из ω в результате сдвига и преобразования подобия следующим образом:

$$\omega_R = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{x-x_0}{R} \in \omega\right\}.$$

Далее, введем функцию

$$\tilde{f}^R(y) = R^2 f(x_0 + Ry), \quad y \in \omega$$

и найдем вектор перемещений $\tilde{w}^R \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega;\mathbb{R}^2)$, удовлетворяющий вариационному тождеству

$$\int\limits_\omega \varepsilon(\tilde{w}^R) : \varepsilon(\tilde{v})dy = \int\limits_\omega \tilde{f}^R \cdot \tilde{v}\, dy, \quad \forall \tilde{v} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega;\mathbb{R}^2). \tag{4.2}$$

Известно, что такая функция $\tilde{w}^R$ существует и, более того,

$$\tilde{w}^R \in W_{p'}^2(\omega;\mathbb{R}^2), \tag{4.3}$$

$$\|\nabla_y^2 \tilde{w}^R\|_{p',\omega} \leqslant C_{22}\|\tilde{f}^R\|_{p',\omega} \tag{4.4}$$

с постоянной C_{22}, зависящей только от p' и ω.

Полагаем теперь

$$w^R(x) = \tilde{w}^R\left(\frac{x-x_0}{R}\right), \quad x \in \omega_R.$$

Тогда после замены переменных в (4.2), (4.3), (4.4) получаем

$$\int\limits_{\omega_R} \varepsilon(w^R) : \varepsilon(v)dx = \int\limits_{\omega_R} f \cdot v\, dx \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega_R, \mathbb{R}^2), \tag{4.5}$$

$$w^R \in W^2_{p'}(\omega_R; \mathbb{R}^2), \tag{4.6}$$

$$\|\nabla^2_x w^R\|_{p',\omega_R} \leqslant C_{22}\|f\|_{p',\omega_R}. \tag{4.7}$$

Из теоремы 2.1, а также из (3.7), (4.5) вытекают соотношения

$$\int\limits_{B^+_{2R}} \sigma^\delta_{,1} : \varepsilon(v)dx = \int\limits_{B^+_{2R}} \varepsilon(w^R_{,1}) : \varepsilon(v)dx, \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega_R, \mathbb{R}^2) \tag{4.8}$$

$$\operatorname{div}\sigma + f = 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \tag{4.9}$$

где $B^+_{2R} \equiv B^+_{2R}(x_0)$.

Рассмотрим срезающую функцию

$$\varphi \in C^\infty_0(B_{\frac{3}{2}}(0)),$$

такую что

$$\varphi \equiv 1 \quad \text{на} \quad B_1(0), \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1.$$

Определим функцию φ_R следующим образом:

$$\varphi_R(x) = \varphi\left(\frac{x-x_0}{R}\right), \quad x \in \omega_R.$$

Тогда φ_R удовлетворяет условиям

$$\varphi_R \equiv 1 \quad \text{на} \quad B_R(x_0), \quad 0 \leqslant \varphi_R \leqslant 1, \quad |\nabla\varphi_R| \leqslant \frac{C_{23}}{R}, \tag{4.10}$$

с постоянной C_{23}, не зависящей от R и x_0.

Полагая в (4.8) $v = \varphi^2_R u^\delta_{,1}$, получим соотношение

$$\int\limits_{B^+_{2R}} \varphi^2_R \sigma^\delta_{,1} : \varepsilon(u^\delta_{,1})dx = -\int\limits_{T^+_R} \sigma^\delta_{,1} : (u^\delta_{,1} \otimes \nabla\varphi^2_R)dx +$$

$$+ \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi^2_R \varepsilon(w^R_{,1}) : \varepsilon(u^\delta_{,1})dx + \int\limits_{B^+_{2R}} \varepsilon(w^R_{,1}) : (u^\delta_{,1} \otimes \nabla\varphi^2_R)dx \tag{4.11}$$

Используя (3.4), (3.13), (3.32) и рассуждая так же, как и при выводе соотношения (3.36), приходим к оценке

$$\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \sigma_{,1} : \varepsilon(u_{,1}) dx \leqslant \frac{\nu_+}{\nu_-} \varliminf_{\delta \to 0} \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \sigma_{,1}^\delta : \varepsilon(u_{,1}^\delta) dx.$$

Устремляя δ к нулю в (4.11) и учитывая, что в силу (3.32) правая часть (4.11) имеет предел, получим неравенство

$$I_1 := \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 p_1(u) dx \leqslant \frac{\nu_+}{\nu_-}(J_1 + J_2 + J_3),$$

где

$$J_1 = -\int\limits_{T_R^+} \sigma_{,1} : (u_{,1} \otimes \nabla \varphi_R^2) dx,$$

$$J_2 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \varepsilon(w_{,1}^R) : \varepsilon(u_{,1}) dx,$$

$$J_3 = \int\limits_{B_{2R}^+} \varepsilon(w_{,1}^R) : (u_{,1} \otimes \nabla \varphi_R^2) dx.$$

Для J_1 в силу (3.1), (3.2), (3.3), (4.10) имеет место оценка

$$J_1 \leqslant 2\sqrt{\nu_+} \sup |\nabla \varphi_R| \left(\int\limits_{T_R^+} \sigma_{,1} : \varepsilon(u_{,1}) dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{T_R^+} |u_{,1}|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2\sqrt{\nu_+}\, C_{23}}{R} \left(\int\limits_{T_R^+} p_1(u) dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{T_R^+} |u_{,1}|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Краевое условие

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \tag{4.12}$$

позволяет использовать неравенство типа Гальярдо, которое в случае двумерных областей может быть записано в виде

$$\left(\int\limits_{T_R^+} |u_{,1}|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant C_{24} \int\limits_{T_R^+} |\varepsilon(u_{,1})| dx, \tag{4.13}$$

где постоянная C_{24} не зависит от R и x_0.

Из (3.4) следует, что

$$|\varepsilon(u_{,1})| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\nu_-}} \sqrt{r^{2-p} p_1(u)}. \tag{4.14}$$

Таким образом, для J_1 имеется оценка

$$J_1 \leqslant \frac{C_{25}}{R} \left(\int\limits_{T_R^+} p_1(u) dx \right)^{1/2} \int\limits_{T_R^+} \sqrt{r^{2-p} p_1(u)}\, dx, \tag{4.15}$$

где $C_{25} = 2\sqrt{\frac{\nu_+}{\nu_-}}\, C_{23} C_{24}$.

Для J_2 с учетом (4.7), (2.8) имеют место неравенства

$$\begin{aligned} J_2 &\leqslant \left(\int\limits_{\omega_R} |\varepsilon(w^R_{,1})|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |\varepsilon(u_{,1})|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \\ &\leqslant C_{22} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |\varepsilon(u_{,1})|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \\ &\leqslant (2R)^{\frac{\mu}{p'}} C_{22} \|f\|_{L^{p',\mu}(\Omega;R^2)} \|\nabla \varepsilon(u)\|_{p,\Omega_0}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Аналогично, для J_3 из (4.10), (4.7) следует оценка

$$\begin{aligned} J_3 &\leqslant 2 \sup |\nabla \varphi_R| \left(\int\limits_{\omega_R} |\varepsilon(w^R_{,1})|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |u_{,1}|^p dx \right)^{1/p} \leqslant \\ &\leqslant \frac{2C_{23}}{R} C_{22} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |f|^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |u_{,1}|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Из неравенств Пуанкаре и Корна с учетом (4.12) вытекает соотношение

$$\left(\int\limits_{B^+_{2R}} |u_{,1}|^p dx \right)^{1/p} \leqslant C_{26} R \left(\int\limits_{B^+_{2R}} |\varepsilon(u_{,1})|^p dx \right)^{1/p}, \tag{4.17}$$

в котором постоянная C_{26} зависит только от p. В итоге для J_3 получим оценку

$$J_3 \leqslant C_{27} R^{\frac{\mu}{p'}} \|f\|_{L^{p',\mu}(\Omega;R^2)} \|\nabla\varepsilon(u)\|_{p,\Omega_0}, \tag{4.18}$$

где $C_{27} = 2^{\frac{\mu}{p'}+1} C_{22} C_{23} C_{26}$. Объединяя оценки (4.15), (4.16), (4.18) получим

$$\int\limits_{B^+_{2R}} \varphi_R^2 p_1(u)dx \leqslant \frac{C_{28}}{R} \left(\int\limits_{T^+_R} p_1(u)dx \right)^{1/2} \int\limits_{T^+_R} \sqrt{r^{2-p} p_1(u)}\, dx + C_{29} R^{\frac{\mu}{p'}}, \tag{4.19}$$

с постоянными C_{28} и C_{29}, не зависящими от R и x_0.

Перейдем к оценке $p_2(u)$.

$$I_2 := \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi_R^2 p_2(u)dx = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_1 = \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi_R^2 \sigma_{11,2} \varepsilon_{11}(u_{,2})dx,$$
$$S_2 = 2 \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi_R^2 \sigma_{12,2} \varepsilon_{12}(u_{,2})dx,$$
$$S_3 = \int\limits_{B^+_{2R}} \varphi_R^2 \sigma_{22,2} \varepsilon_{22}(u_{,2})dx.$$

Начнем с оценки S_2. Выразим $\sigma_{12,2}$ из уравнений (4.9):

$$\sigma_{12,2} = -f_1 - \sigma_{11,1} \quad \text{п.в. в} \quad \Omega.$$

Тогда с учетом (3.4), (3.5), получим

$$S_2 \leqslant 2\left(\int\limits_{B_{2R}^+} |f|^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} |\varepsilon(u_{,2})|^p dx\right)^{1/p} +$$

$$+ 2\left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{2-p} |\sigma_{,1}|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{p-2} |\varepsilon(u_{,2})|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant 2(2R)^{\frac{\mu}{p'}} \|f\|_{L^{p',\mu}(\Omega;R^2)} \|\nabla\varepsilon(u)\|_{p.\Omega_0} + C_{30} I_1^{1/2} I_2^{1/2},$$

где $C_{30} = 2\sqrt{\frac{\nu_+}{\nu_-}}$.

S_3 оценивается аналогичным образом.

Поскольку из теоремы 2.1 следует, что

$$u_{2,11} = 2\varepsilon_{12}(u_{,1}) - \varepsilon_{11}(u_{,2}) \quad \text{п.в. в} \quad B_{2R}^+,$$

то для S_1 имеет место следующее представление:

$$S_1 = S_1' + S_2'',$$

где

$$S_1' = 2\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \sigma_{11,2} \varepsilon_{12}(u_{,1}) dx,$$

$$S_1'' = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \sigma_{11,2} u_{2,11} dx.$$

Для S_1' в силу (3.4), (3.5) справедливы неравенства

$$S_1' \leqslant 2\left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{2-p} |\sigma_{,2}|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{p-2} |\varepsilon(u_{,1})|^2 dx\right) \leqslant \qquad (4.20)$$

$$\leqslant C_{30} I_1^{1/2} I_2^{1/2}.$$

Выполняя интегрирование по частям и пользуясь (4.12), приведем S_1'' к виду

$$S_1'' = A_1 + A_2,$$

где

$$A_1 = -\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 \sigma_{11,1}\varepsilon_{22}(u_{,1})dx,$$

$$A_2 = \int\limits_{T_R^+} (\varphi_{R,1}^2\sigma_{11,2} - \varphi_{R,2}^2\sigma_{11,1})u_{2,1}dx.$$

A_1 оценивается с учетом (3.4), (3.5)

$$A_1 \leqslant \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{2-p}|\sigma_{,1}|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{B_{2R}^+} \varphi_R^2 r^{p-2}|\varepsilon(u_{,1})|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C_{30}I_1. \tag{4.21}$$

Для A_2 справедливы соотношения

$$A_2 \leqslant 2\sup|\nabla\varphi_R| \left(\int\limits_{T_R^+} (|\sigma_{,1}|^2 + |\sigma_{,2}|^2)dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{T_R^+} |u_{,1}|^2 dx\right)^{1/2}$$

Поскольку из (3.5) вытекает, что

$$|\sigma_{,k}|^2 \leqslant \nu_+ p_k(u), \quad k = 1,2, \tag{4.22}$$

то для A_2 с учетом (4.13) имеем оценку

$$A_2 \leqslant \frac{2\sqrt{\nu_+}}{R} C_{23}C_{24} \left(\int\limits_{T_R^+} p_0(u)dx\right)^{1/2} \int\limits_{T_R^+} |\varepsilon(u_{,1})|dx.$$

Вновь используя (4.14), окончательно получим

$$A_2 \leqslant \frac{C_{25}}{R} \left(\int\limits_{T_R^+} p_0(u)dx\right)^{1/2} \int\limits_{T_R^+} \sqrt{r^{2-p}p_1(u)}\,dx. \tag{4.23}$$

Объединяя (4.20), (4.21), (4.23) с оценками для S_2 и S_3 и складывая полученный результат с неравенствами (4.19), завершаем доказательство леммы 4.1.

Путем внесения незначительных изменений в доказательство леммы 4.1 из [2] можно получить следующую лемму:

Лемма 4.2. *Предположим, что функции $H \in L^2(\Omega_0)$ и $h \in W^1_2(\Omega_0)$ удовлетворяют оценке*

$$\int\limits_{B^+_R(x_0)} H^2 dx \leqslant \frac{C_{31}}{R} \Bigg(\int\limits_{T^+_R(x_0)} H^2 dx \Bigg)^{1/2} \int\limits_{T^+_R(x_0)} |hH| dx + C_{32} R^\gamma$$

с некоторым положительным γ для всех точек $x_0 \in \partial_1 \Omega$ и всех $R < R_0$. Тогда для любого $q \geqslant 1$ найдется положительная постоянная C_{33}, зависящая только от q, $\|h\|_{W^1_2(\Omega_0)}$, $\|H\|_{L^2(\Omega_0)}$, C_{31}, C_{32}, γ и R_0, такая что

$$\int\limits_{B^+_R(x_0)} H^2 dx \leqslant \frac{C_{33}}{\left(\log_2 \frac{2R_0}{R}\right)^q}, \quad \forall x_0 \in \partial_1 \Omega, \quad \forall R < R_0.$$

Из теоремы 2.1 и леммы 4.1 вытекает, что для функций

$$H = \sqrt{p_0(u)}, \quad h = r^{\frac{2-p}{2}} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\mu}{p'}$$

выполнены все условия леммы 4.2. Следовательно, для некоторого $q > 2$ найдется постоянная C_{34}, такая что справедлива оценка

$$\int\limits_{B^+_R(x_0)} p_0(u) dx \leqslant \frac{C_{34}}{\left(\log_2 \frac{2R_0}{R}\right)^q}, \quad \forall x_0 \in \partial_1 \Omega, \quad \forall R < R_0.$$

Из результатов работы [2] следует, что аналогичная оценка имеет место и для внутренних точек области Ω, т.е.

$$\int\limits_{B_R(x_0) \cap \Omega_0} p_0(u) dx \leqslant \frac{C_{34}}{\left(\log_2 \frac{2R_0}{R}\right)^q}, \quad \forall x_0 \in \bar{\Omega}_0, \quad \forall R < R_0.$$

Из (4.22) вытекает, что для $\sigma \in W^1_2(\Omega_0, \mathbb{M}^2_s)$ выполнены условия следующего признака непрерывности функции, справедливого для двумерных областей (см. [6]):

Лемма 4.3. *Пусть для функции $g \in W^1_2(\Omega_0)$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{B_R(x_0) \cap \Omega_0} |\nabla g|^2 dx \leqslant \frac{C_{34}}{\left(\log_2 \frac{2R_0}{R}\right)^q}$$

с некоторым $q>2$ для всех $x_0\in\Omega_0$ и всех $R<R_0$. Тогда

$$g\in C^0(\bar\Omega_0).$$

По лемме 4.3 получаем, что $\sigma\in C^0(\bar\Omega_0;\mathbb{M}^2_s)$, и в силу соотношений двойственности (2.4) $\varepsilon(u)\in C^0(\bar\Omega_0;\mathbb{M}^2_s)$. Тогда из (4.1) вытекает оценка

$$\int\limits_{B_R^+} p_0(u)dx \leqslant C_{35}\int\limits_{T_R^+} p_0(u)dx + C_{21}R^{\frac{\mu}{p'}},$$

где $C_{35}=C_{20}\sup\limits_{\bar\Omega_0}(1+|\varepsilon(u)|^2)^{\frac{2-p}{2}}$.

Из последнего соотношения следует неравенство

$$\int\limits_{B_R^+} p_0(u)dx \leqslant \theta\int\limits_{B_{2R}^+} p_0(u)dx + C_{36}R^{\frac{\mu}{p'}} \tag{4.24}$$

с постоянными $\theta=\frac{C_{35}}{1+C_{35}}<1$ и $C_{36}=\frac{C_{21}}{1+C_{35}}$. При помощи итераций из (4.24) можно получить, что существуют положительные постоянные ν, C_{37} и ρ_0, зависящие только от θ, μ, p', C_{36}, R_0, такие что справедлива оценка

$$\int\limits_{B_\rho(x_0)} p_0(u)dx \leqslant C_{37}\rho^{2\nu},\quad \forall\rho<\rho_0,\quad \forall x_0\in\partial_1\Omega.$$

Из результатов работы [2] вытекает, что аналогичная оценка имеет место и для внутренних точек области Ω, т.е.

$$\int\limits_{B_\rho^+(x_0)\cap\Omega_0} p_0(u)dx \leqslant C_{37}\rho^{2\nu},\quad \forall\rho<\rho_0,\quad \forall x_0\in\Omega_0.$$

В силу признака Морри непрерывности функции по Гельдеру, с учетом (4.22) получим, что

$$\sigma\in C^\nu(\bar\Omega_0;\mathbb{M}^2_s).$$

Из соотношений двойственности (2.4) теперь следует, что

$$\varepsilon(u)\in C^\nu(\bar\Omega_0;\mathbb{M}^2_s).$$

Теорема 2.2 доказана.

Литература

1. G. A. Seregin, *On the regularity of the minimizers of some variational problems of plasticity theory.* — Algebra Anal. **4** (1993), 181–218.
2. J. Frehse, G. A. Seregin, *Regularity for Solutions of Variational Problems in the Deformation Theory of Plasticity with Logarithmic Hardering.* Preprint no. 421, SFB256, Bonn, 1995.
3. G. A. Seregin, *Differentiability properties of weak solutions of certain variational problems in the theory of perfect elastoplastic plates.* — Appl. Math. Optim. **28** (1993), 307–335.
4. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* М, Наука, 1973.
5. П. П. Мосолов, В. П. Мясников, *О корректности краевых задач в механике сплошных сред.* — матем. сб. **88** вып. **2** (1972), 256–287.
6. J. Frehse, *Two dimensional variational problems with thin obstacles.* — Math. Z. **143** (1975), 279–288.

Seregin G. A., Shilkin T. N. Regularity for minimaizers of some variational problems in plasticity theory.

A variational problem for functionals depending on the symmetric part of the gradient of unknown vector-valued function is considered. We suppose that the integrand of the problem has the power growth with the exponent less then two. We prove summability of the second derivatives of minimizers near the boundary. In two-dimentional case Holder continuity up to the boundary of the strain and stress tensors is established.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стекова АН СССР

Поступило 31 марта 1996 г.