В. А. Солонников, Е. В. Фролова

$\mathbf{L_p}$-ТЕОРИЯ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

Посвящается памяти А. П. Осколкова

§1. Введение

Теория классической разрешимости задачи Стефана и других задач со свободными границами для параболических уравнений построена в работах А. М. Мейрманова [1, 2], E. I. Hanzawa [3], Б. В. Базалия [4–6], Е. В. Радкевича [7–9], Г. И. Бижановой [10, 11] (для однофазной задачи Стефана классическая разрешимость была установлена ранее, в работах [12–14]). Основным результатом этой теории является локальная разрешимость таких задач в пространствах Гельдера. Целью настоящей статьи является построение аналогичной теории в анизотропных пространствах С. Л. Соболева для простейшей задачи со свободной границей, а именно однофазной задачи Стефана. Отметим, что в работе J. Escher [15] пространства Соболева $W_p^{2+s}(\Omega)$, $(p > 4, s \in (0, 1/p))$ использованы для доказательства разрешимости трехмерной задачи со свободной границей близкой к задаче (1)–(6).

Мы считаем, что в момент времени $t \geqslant 0$ теплопроводящая среда заполняет область $\Omega_t \subset \mathbb{R}^n$ с границей состоящей из двух непересекающихся поверхностей S и Γ_t, причем S – фиксированная часть границы, а Γ_t – свободная. Ради технических упрощений мы предполагаем, что Γ_t задается уравнением

$$x_n = \xi(x', t), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $\xi(x', t)$ – функция заданная при $t = 0$: $\xi(x', 0) = \xi_0(x')$ и подлежащая определению при положительных t. Причем, область Ω_t примыкает к Γ_t с той стороны, где $x_n < \xi(x', t)$ и $\operatorname{dist}(S, \Gamma_t) \geqslant \alpha_0 > 0$. Однофазная задача Стефана состоит в определении области Ω_t, $t > 0$, а также температуры $u(x, t)$, $x \in \Omega_t$, удовлетворяющей соотношениям

$$u_t - \Delta u = 0, \quad x \in \Omega_t, \quad t > 0 \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0, \quad x \in \Omega_0 \tag{3}$$

$$u\big|_{x\in S}=h, \tag{4}$$

$$u\big|_{x\in\Gamma_t}=0, \tag{5}$$

$$\left[\mu\xi_t-\nabla'\xi\cdot\nabla'u+u_{x_n}\right]\bigg|_{x\in\Gamma_t}=0, \tag{6}$$

где $\mu>0$, $\nabla'u=[u_{x_1},u_{x_2},\dots,u_{x_{n-1}}]^T$.

В условии Стефана (6) мы уже учли что свободная поверхность Γ_t задается уравнением (1). Учитывая, кроме того, равенство нулю температуры на свободной поверхности (5), запишем (6) в виде

$$\left[\mu\xi_t+(1+|\nabla\xi|^2)u_{x_n}\right]\bigg|_{x\in\Gamma_t}=0, \tag{7}$$

Мы будем рассматривать периодическую задачу, полагая, что известные функции ξ_0, u_0 и h являются периодическими по переменным x_i $(i=1,\dots,n-1)$ с периодом единица, а известная поверхность S представляет из себя гладкую поверхность, периодически меняющуюся относительно x_i $(i=1,\dots,n-1)$ с периодом 1. Тогда естественно искать решение задачи (1)–(6) и всех вспомогательных задач в классе функций периодических по переменным $x'=(x_1,\dots,x_{n-1})$ с тем же периодом. В дальнейшем мы будем называть такие функции просто периодическими.

Обозначим через $B_1(a)$, $a\in\mathbb{R}^{n-1}$ куб пространства $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$B_1(a)=\left\{x'\in\mathbb{R}^{n-1}\big/|x_i-a_i|<\frac{1}{2},\ i=1,\dots,n-1\right\},$$

а через $\Pi_{1,a}$ полосу $B_1(a)\times\mathbb{R}=\{x\in\mathbb{R}^n\big/x'\in B_1(a)\}$. Для произвольного множества $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^n$ положим $\mathcal{D}'(a)=\mathcal{D}\cap\Pi_{1,a}$.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – периодическая область, $\Omega_T=\Omega\times[0,T]$. Обозначим через $\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)$ пространство всех периодических функций, определенных в Ω_T, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_x^\alpha\, u(x,t)$, $|\alpha|\leqslant 2$, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\mathcal{D}_t\, u(x,t)$ и конечную норму

$$\|u\|^{(2)}_{p,\Omega_T}=\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)}=\|u\|_{W_p^{2,1}(\Omega'_T(a))}=$$

$$=\bigg(\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega'(a)}\bigg(\sum_{|\alpha|\leqslant 2}|\mathcal{D}_x^\alpha\, u(x,t)|^p+|\mathcal{D}_t\, u(x,t)|^p\bigg)dxdt\bigg)^{1/p},\ \forall\, a\in\mathbb{R}^{n-1},$$

$\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T)$ – пространство следов функций их $W_p^{2,1}(\Omega_T)$ на периодической поверхности S, $S\in\bar{\Omega}$. Норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{p,S_T}^{(2-1/p)}=\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T)}=\|u\|_{W_p^{2-1/p,1-1/2p}(S'_T(a))}=$$

$$=\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|\mathcal{D}_x^\alpha u\|_{p,S'_T(a)}+\sum_{|\alpha|=1}\langle\langle\mathcal{D}_x^\alpha u\rangle\rangle_{p,S'_T(a),x}^{(1-1/p)}+$$

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\langle\langle\mathcal{D}_x^\alpha u\rangle\rangle_{p,S'_T(a),t}^{(1-|\alpha|/2-1/2p)},\quad\forall\, a\in\mathbb{R}^{n-1},$$

где при $\gamma\in(0,1)$

$$\langle\langle v\rangle\rangle_{p,S'_T(a),x}^{(\gamma)}=\left(\int\limits_0^T dt\int\limits_{S'(a)}\int\limits_{S'(a)}|v(x,t)-v(y,t)|^p\frac{dxdy}{|x-y|^{n-1+p\gamma}}\right)^{1/p},$$

$$\langle\langle v\rangle\rangle_{p,S'_T(a),t}^{(\gamma)}=\left(\int\limits_{S'(a)}dx\int\limits_0^T\int\limits_0^T|v(x,t)-v(x,\tau)|^p\frac{dtd\tau}{|t-\tau|^{1+p\gamma}}\right)^{1/p}.$$

$\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\Omega_T)$ $(\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T))$ – подпространство функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T)$ $(\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T))$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям: $u\big|_{t=0}=\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=0$ $(u\big|_{t=0}=0)$. Через $\widetilde{W}_p^{2-\gamma}(\mathbb{R}^{n-1})$ $(\gamma\in(0,1))$ обозначим пространство всех периодических функций, имеющих обобщенные производные первого порядка и конечную норму

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{2-\gamma}(\mathbb{R}^{n-1})}=\|u\|_{W_p^{2-\gamma}(B_1(a))}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\int\limits_{B_1(a)}|\mathcal{D}_x^\alpha u(x)|^p\,dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{|\alpha|=1}\int\limits_{B_1(a)}\int\limits_{B_1(a)}|\mathcal{D}_x^\alpha u(x)-\mathcal{D}_y^\alpha u(y)|^p\frac{dxdy}{|x-y|^{n-1+p(\gamma-1)}}\right)^{1/p},\quad\forall\, a\in\mathbb{R}^{n-1}.$$

Под $\widetilde{L}_p(\Omega_T)$ будем подразумевать пространство периодических функций с конечной нормой в $L_p(\Omega'_T(a))$.

Определим анизотропные пространства Соболева в области с подвижной границей $Q_T=\{(x,t)\mid t\in[0,T),x\in\Omega_t\}$, $\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$ как пространства периодических функций имеющих в Q_T обобщенные производные $\mathcal{D}_x^\alpha\, u(x,t)$, $|\alpha|\leqslant 2$, $\mathcal{D}_t\, u(x,t)$ и конечную норму

$$|||u|||_{p,Q_T}^{(2)} = \left(\int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega_t'(a)} \left(\sum_{|\alpha|\leqslant 2} |\mathcal{D}_x^\alpha\, u(x,t)|^p + |\mathcal{D}_t\, u(x,t)|^p\right) dx\right)^{1/p}.$$

Подпространство функций из $\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$, удовлетворяющих нулевым начальным условиям, будем обозначать через $\underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(Q_T)$.

Если $u\in\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_T)$, то при любом фиксированном $t_0\in[0,T)$, $u\big|_{t=t_0}\in\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_{t_0})$ (вследствие теоремы о следах для обычных пространств Соболева [16]).

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $u_0\in\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0)$, $\xi_0\in\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $h\in\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(S_T)$ с некоторым $p>n+2$ и выполняются условия согласования: $u_0\big|_S = h\big|_{t=0}$, $u_o\big|_{\Gamma_0}=0$.*

Предположим, кроме того, что $\frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\Gamma_0}\leqslant -\gamma<0$, где $\vec{n}$ – вектор внешней нормали к границе Γ_0.

Тогда существует положительное число $t^*<T$, а также периодическая функция $\xi:\mathbb{R}^{n-1}\times[0,t^*)\to\mathbb{R}$, совпадающая при $t=0$ с ξ_0 и имеющая производную по времени, причем $\xi\in\widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_{t^*}^{n-1})$, $\xi_t\in\widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_{t^*}^{n-1})$.

В области Ω_t ограниченной поверхностями S и Γ_t, задаваемой уравнением $x_n=\xi(x',t)$, $t\in[0,t^*)$, существует периодическая функция $u\in\widetilde{W}_p^{2,1}(Q_{t^*})$, которая является решением задачи (2)–(6) и имеет место оценка

$$\begin{gathered}\|\xi\|_{p,\mathbb{R}_{t^*}^{n-1}}^{(2-1/p)} + \|\xi_t\|_{p,\mathbb{R}_{t^*}^{n-1}}^{(1-1/p)} + |||u|||_{p,Q_{t^*}}^{(2)} \leqslant \\ \leqslant c_1\left(\|h\|_{p,S_{t^*}}^{(2-1/p)} + \|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|u_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0)}\right).\end{gathered} \tag{8}$$

Теорема 1 гарантирует существование решения $u(x,t)$ задачи (2)–(6), гладкость которого не уменьшается со временем, так как согласно теореме о следах, при любом фиксированном $t_0\in(0,t^*)$, $u(x,t_0)$ принадлежит пространству $\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_{t_0})$, т.е. имеет ту же гладкость, что и в начальный момент времени: $u(x,0) = u_0(x) \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega_0)$.

То же самое относится и к свободной поверхности.

Предложение 1. *Если*

$$\xi \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1}), \quad \xi_t \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1}),$$

то при любом фиксированном $t_0 \in [0,T)$ $\xi\big|_{t=t_0} \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$.

Доказательство предложения 1 можно провести аналогично доказательству других теорем о следах [24].*)

Так как функция ξ_0, задающая начальное положение свободной границы принадлежит пространству $\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, и по предложению 1 при $t > 0$ функция, задающая свободную границу $\xi(\cdot,t) \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, гладкость свободной поверхности также не уменьшается со временем.

Так же как и в случае пространств Гельдера, одним из основных моментов доказательства разрешимости задачи Стефана является ее сведение к задаче в области с известной границей. Для работы в пространствах Соболева оказалось необходимым модифицировать общепринятую схему сведения, предложенную E. I. Hanzana [3]. Опираясь на формулу (1) задания свободной границы, мы задаем преобразование координат в виде

$$x' = y', \quad x_n = y_n + \Phi(y,t),$$

подчиняя функцию Φ некоторому параболическому уравнению (переход к задаче в области с фиксированной границей описан в §2). В результате задача (2)–(6) сводится к некоторой нелинейной параболической задаче для двух неизвестных функций u и Φ, причем u удовлетворяет краевым условиям (4), (5), а для $\Phi(x,t)$ получается краевое условие, содержащее производную по времени. Разрешимость нелинейной задачи на малом интервале времени доказывается в §5 с помощью принципа сжатых отображений и анализа линеаризованной задачи проведенного в §3, 4. В §6 завершается доказательство теоремы 1.

*) На справедливость данного результате авторам впервые указал H. Koch в частной беседе.

§2. Сведение задачи (2)–(6) к задаче в области с фиксированной границей

Мы будем делать это сведение в два этапа, сначала переходя к задаче в области с известной но подвижной границей, а затем уже к задаче в области с неподвижной границей.

Лемма 1 (о продолжении). *Пусть* $\xi_0 \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})$, $\xi_1 \in \widetilde{W}_p^{1-3/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ *существует функция* $\Sigma \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$, *имеющая производную по времени* $\Sigma_t \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$, $T > 0$, *такая, что*

$$\Sigma\big|_{t=0} = \xi_0, \quad \Sigma_t\big|_{t=0} = \xi_1 \quad \textit{и} \quad \|\Sigma\|^{(2-1/p)}_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}} + \|\Sigma_t\|^{(1-1/p)}_{p,\mathbb{R}_T^{n-1}} \leqslant \leqslant c_2\Big(\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})} + \|\xi_1\|_{\widetilde{W}_p^{1-3/p}(\mathbb{R}^{n-1})}\Big). \tag{9}$$

Доказательство. Продолжим ξ_0 и ξ_1 в $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ с сохранением класса, а именно, построим

$$\widehat{\xi}_0 \in \widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}_+^n), \quad \widehat{\xi}_1 \in \widetilde{W}_p^{1-2/p}(\mathbb{R}_+^n),$$

так чтобы

$$\begin{aligned} &\|\widehat{\xi}_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}_+^n)} \leqslant c_3\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})}, \\ &\|\widehat{\xi}_1\|_{\widetilde{W}_p^{1-2/p}(\mathbb{R}_+^n)} \leqslant c_4\|\xi_1\|_{\widetilde{W}_p^{1-3/p}(\mathbb{R}^{n-1})}. \end{aligned} \tag{10}$$

Возможность построения таких функций можно доказать аналогично тому как это сделано в непериодическом случае [25]. Затем найдем $\mathcal{G}_1 \in \widetilde{W}_p^{2,2}(\mathbb{R}_{+,T}^n)$, $\mathbb{R}_{+,T}^n = \mathbb{R}_+^n \times [0,T)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$\mathcal{G}_1\big|_{t=0} = \widehat{\xi}_0, \quad \mathcal{G}_{1_t}\big|_{t=0} = 0$$

и оценке

$$\|\mathcal{G}_1\|_{\widetilde{W}_p^{2,2}(\mathbb{R}_{+,T}^n)} \leqslant c_5\|\widehat{\xi}_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}_+^n)} \tag{11}$$

и $\mathcal{G}_2 \in \widetilde{W}_p^{3,3/2}(\mathbb{R}_{+,T}^n)$, удовлетворяющую начальным условиям

$$\mathcal{G}_2\big|_{t=0} = 0, \quad \mathcal{G}_{2t}\big|_{t=0} = \widehat{\xi}_1$$

и оценке

$$\|\mathcal{G}_2\|^{(3)}_{p,\mathbb{R}_{+,T}^n} \leqslant c_6\|\widehat{\xi}_1\|_{\widetilde{W}_p^{1-2/p}(\mathbb{R}_+^n)}. \tag{12}$$

Возможность построения таких функций доказывается также как в [16] для непериодического случая. Положив $\Sigma = (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)\big|_{x_n=0}$, имеем

$$\Sigma\big|_{t=0} = \mathcal{G}_1\big|_{\substack{t=0\\x_n=0}} + \mathcal{G}_2\big|_{\substack{t=0\\x_n=0}} = \widehat{\xi}_0\big|_{x_n=0} = \xi_0,$$

$$\Sigma_t\big|_{t=0} = \mathcal{G}_{1t}\big|_{\substack{t=0\\x_n=0}} + \mathcal{G}_{2t}\big|_{\substack{t=0\\x_n=0}} = \widehat{\xi}_1\big|_{x_n=0} = \xi_1.$$

Оценка (9) следует из (10)–(12). ■

Взяв в условии (7) $t = 0$, определим

$$\xi_t\big|_{t=0} = -\frac{1}{\mu}(1 + |\nabla\xi_0|)u_{0x_n} \in \widetilde{W}_p^{1-3/p}(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Найдем периодическую функцию $\Sigma \in \widetilde{W}_p^{2-1/p,1-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ имеющую производную по времени $\Sigma_t \in W_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\mathbb{R}_T^{n-1})$ и удовлетворяющую начальным условиям

$$\Sigma\big|_{t=0} = \xi\big|_{t=0} = \xi_0, \quad \Sigma_t\big|_{t=0} = \xi_t\big|_{t=0},$$

существование которой доказано в лемме 1.

Перейдем от задачи (2)–(5), (7) к задаче в области $\widetilde{\Omega}_t$ с подвижной частью границы $\widetilde{\Gamma}_t$, задаваемой в пространстве новых переменных y уравнением $y_n = \Sigma(y', t)$, подберем преобразование координат так, чтобы неподвижная часть границы S перешла сама в себя.

Мы выполним этот переход с помощью преобразования $y = Y(x)$, $x \in \Omega_t$, задавая обратное преобразование $Y^{-1}(y)$ формулами

$$x' = y', \quad x_n = y_n + \Phi(y,t), \quad y \in \widetilde{\Omega}_t, \tag{13}$$

где $\Phi(y,t)$ некоторая неизвестная функция, удовлетворяющая условиям

$$\Phi\big|_{y\in S} = 0, \quad \Phi\big|_{t=0} = 0,$$
$$\Phi\big(y', \Sigma(y',t), t\big) = \xi(y',t) - \Sigma(y',t). \tag{14}$$

Матрица Якоби преобразования (13) имеет вид

$$J_{Y^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \Phi_{y_1} & \Phi_{y_2} & \dots & \Phi_{y_{n-1}} & 1 + \Phi_{y_n} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица Якоби обратного преобразования

$$J_Y = (J_{Y^{-1}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -\frac{\Phi_{y_1}}{1+\Phi_{y_n}} & -\frac{\Phi_{y_2}}{1+\Phi_{y_n}} & \dots & -\frac{\Phi_{y_{n-1}}}{1+\Phi_{y_n}} & \frac{1}{1+\Phi_{y_n}} \end{bmatrix}.$$

И для того, чтобы получить задачу соответствующую (2)–(5), (7) в области $\widetilde{\Omega}_t$, следует воспользоваться формулами

$$u_{x_i} = \widetilde{u}_{y_i} - \frac{\Phi_{y_i}}{1+\Phi_{y_n}}\widetilde{u}_{y_n}, \quad i = 1, \dots, n-1,$$

$$u_{x_n} = \frac{1}{1+\Phi_{y_n}}\widetilde{u}_{y_n},$$

$$\widetilde{u}_t = \frac{du(x,t)}{dt} = u_t + \frac{1}{1+\Phi_{y_n}}\Phi_t\widetilde{u}_{y_n}, \quad \text{откуда}$$

$$u_t = \widetilde{u}_t - \frac{\Phi_t}{1+\Phi_{y_n}}\widetilde{u}_{y_n}, \quad \text{где} \quad \widetilde{u}(y,t) = u(Y^{-1}(y), t).$$

В результате преобразования $y = Y(x)$ уравнение теплопроводности переходит в уравнение

$$L_\Phi \widetilde{u} - \frac{\widetilde{u}_{y_n}}{1+\Phi_{y_n}} L_\Phi \Phi = 0, \quad y \in \widetilde{\Omega}_t, \quad t > 0, \tag{15}$$

где введены обозначения

$$L_\Phi \widetilde{u} = \widetilde{u}_t - \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{u}_{y_i y_i} + \vec{a}(\nabla\Phi) \cdot \nabla \widetilde{u}_{y_n},$$

$$\vec{a} = \big(a_1(\nabla\Phi), \dots, a_n(\nabla\Phi)\big)^T,$$

$$a_i(\nabla\Phi) = \frac{2\Phi_{y_i}}{1+\Phi_{y_n}}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$a_n(\nabla\Phi) = -\frac{(1+|\nabla'\Phi|^2)}{(1+\Phi_{y_n})^2}, \quad \nabla'\Phi = (\Phi_{y_1}, \dots, \Phi_{y_{n-1}})^T.$$

Начальные и краевые условия (3–5), (7) переходят в условия

$$\begin{gathered}\widetilde{u}\big|_{t=0} = u_0, \quad \widetilde{u}\big|_{y\in S} = h, \quad \widetilde{u}\big|_{y\in\widetilde{\Gamma}_t} = 0,\\ \Big[\mu(\Phi_t + \Phi_{y_n}\Sigma_t) + \big(1+|\nabla'\Phi+\\ (1+\Phi_{y_n})\nabla'\Sigma|^2\big)\frac{1}{1+\Phi_{y_n}}\widetilde{u}_{y_n}\Big]\Big|_{y\in\widetilde{\Gamma}_t} = -\mu\Sigma_t,\end{gathered} \tag{16}$$

здесь при выводе краевого условия на подвижной части границы мы учли соотношение (14).

Перейдем теперь к задаче в области с фиксированной границей, для чего прежде всего найдем такую гладкую периодическую функцию $\xi^* : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, для которой имеют место неравенства

$$\begin{gathered}\max_{x'\in B_1} |\xi_0 - \xi^*| \leqslant \frac{1}{8}\delta, \quad \delta = \operatorname{dist}(\Gamma_0, S),\\ \|\xi^*\|_{\widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leqslant c_7\|\xi_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\mathbb{R}^{n-1})}.\end{gathered} \tag{17}$$

В качестве ξ^* можно, например, взять усреднение функции ξ_0

$$\xi^*(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant\frac{\delta}{8}} \omega_{\delta/8}(|x-y|)\xi_0(y)dy$$

с гладким неотрицательным ядром ω [16].

Определим в пространстве переменных z периодическую поверхность Γ^* уравнением $z_n = \xi^*(z')$ и построим преобразование координат $z = Z(y)$, переводящее область $\widetilde{\Omega}_t$, $t \geqslant 0$ в область Ω^* ограниченную поверхностями Γ^* и S. Найдем периодическую функцию $\sigma : \Omega^*_T \to \mathbb{R}$, $\sigma \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega^*_T)$ как решение задачи

$$\begin{gathered}\sigma_t - \Delta\sigma = 0, \quad (z,t) \in \Omega^*_T, \quad \sigma\big|_{z\in S} = 0,\\ \sigma\big|_{z\in\Gamma^*} = \Sigma(z',t) - \xi^*(z'), \quad \sigma\big|_{t=0} = \sigma_0,\end{gathered}$$

с некоторой функцией $\sigma_0 \in \widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega^*_T)$, для которой выполнены условия согласования

$$\sigma_0\big|_{z\in S} = 0, \quad \sigma_0\big|_{z\in\Gamma^*} = \Sigma(z',0) - \xi^*(z') = \xi_0(z') - \xi^*(z')$$

и оценка

$$\|\sigma_0\|_{\widetilde{W}_p^{2-2/p}(\Omega^*)} \leqslant c_8\|\xi_0 - \xi^*\|_{\widetilde{W}_p^{2-3/p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

Так как $|\xi_0(z') - \xi^*(z')| \leqslant \frac{1}{8}\delta$, можем выбрать σ_0 так, чтобы $|\sigma_{z_n}(z,0)| = |\sigma_{0z_n}(z)| \leqslant \frac{1}{4}$.

Тогда

$$|\sigma_{z_n}(z,t)| \leqslant |\sigma_{z_n}(z,t) - \sigma_{z_n}(z,0)| + |\sigma_{0\,z_n}| \leqslant \frac{1}{4} + [\sigma_{z_n}]^{\alpha/2}\, t^{\alpha/2} \underset{(\alpha>0)}{\leqslant}$$

$$\leqslant \frac{1}{4} + c_9\|\sigma\|^{(2)}_{p,\Omega^*_t} t^{\alpha/2} \leqslant \frac{1}{4} + c_{10}\big(\|\Sigma\|^{(2-1/p)}_{p,\mathbb{R}^{n-1}_t} + \|\xi^*\|_{\widetilde{W}^{2-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}\big)t^{\alpha/2} \leqslant \frac{1}{2}$$

при достаточно малом t ($t < T^0$).

Итак, нашли $\sigma \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\Omega^*_{T^0})$ со следующими свойствами:

$$\sigma\big|_{z\in S} = 0, \quad \sigma(z', \xi^*(z'), t) = \Sigma(z',t) - \xi^*(z'), \quad |\sigma_{z_n}| < \frac{1}{2} \tag{18.1}$$

$$\|\sigma\|^{(2)}_{p,\Omega^*_{T_0}} \leqslant c_{11}\big(\|\Sigma\|^{(2-1/p)}_{p,\mathbb{R}^{n-1}_{T_0}} + \|\xi^*\|_{\widetilde{W}^{2-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}\big). \tag{18.2}$$

Искомое преобразование координат определим, задавая обратное преобразование $Z^{-1}(z)$ формулами

$$y' = z', \quad y_n = z_n + \sigma(z', z_n, t). \tag{19}$$

Тогда композиция преобразований (13) и (19) переводит неизвестную область Ω_t, $t > 0$ в область с фиксированной границей Ω^*. Композиция задается формулами

$$x' = z', \quad x_n = z_n + \sigma(z', z_n, t) + \Phi(z', z_n + \sigma(z', z_n, t), t). \tag{20}$$

Причем, из (18.1) вытекает, что

$$\sigma_t\big|_{z\in\Gamma^*} \in W^{1-1/p,1/2-1/2p}_p(\Gamma^*_T),$$

$$\sigma\big|_{\substack{z\in\Gamma^*\\ t=0}} = \xi_0(z') - \xi^*(z'),$$

$$\sigma_t\big|_{\substack{z\in\Gamma^*\\ t=0}} = \left(-\frac{1}{\mu}(1 + |\nabla\xi_0|^2)\widehat{u}_{0\,z_n}\right)_{\substack{t=0\\ z\in\Gamma^*}} = \xi_t\big|_{t=0}.$$

А новая неизвестная функция Φ, вследствие (14) и (18.1) удовлетворяет соотношению

$$\Phi(z', \xi^*(z') + \sigma(z', \xi^*(z'), t), t) = \xi(z', t) - \xi^*(z') - \sigma(z', \xi^*(z'), t) \tag{21}$$

и обращается в ноль вместе со своей производной по времени при $t=0$ на Γ_0. Действительно,

$$\Phi(y',\xi_0(y'),0)=\widehat{\Phi}(z',\xi^*(z'),0)=\Phi(z',\xi^*(z')+\sigma(z',\xi^*(z'),0),0)=$$

$$=\xi_0(z')-\xi^*(z')-\sigma(z',\xi^*(z'),0)=0$$

$$\Phi_t(y',\xi_0(y'),0)=\widehat{\Phi}(z',\xi^*(z'),0)=\xi_t(z',0)-\sigma_t(z',\xi^*(z'),0)=0,$$

здесь $\widehat{\Phi}(z',z_n,t)=\Phi(Z^{-1}(z),t)$.

Проследим, как преобразуется задача (15), (16) при преобразовании $z=Z(y)$, для чего, имея в виду, что матрица Якоби преобразования (19) аналогична матрице Якоби преобразования (13), воспользуемся формулами

$$\widetilde{u}_{y_i}=\widehat{u}_{z_i}-\frac{\sigma_{z_i}}{1+\sigma_{z_n}}\widehat{u}_{z_n},\quad i=1,\dots,n-1,$$

$$\widetilde{u}_{y_n}=\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}\widehat{u}_{z_n},\quad \widetilde{u}_t=\widehat{u}_t-\frac{\sigma_t}{1+\sigma_{z_n}}\widehat{u}_{z_n},$$

где $\widehat{u}(z,t)=\widetilde{u}(Z^{-1}(z),t)=u(Y^{-1}(Z^{-1}(z)),t)$.

Тогда дифференциальный оператор $L_\Phi\widetilde{u}$ преобразуется следующим образом:

$$L_\Phi\widetilde{u}=L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}\widehat{u}-\frac{\widehat{u}_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}\sigma,$$

$$L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}\widehat{u}=\widehat{u}_t-\sum_{i=1}^{n-1}\widehat{u}_{z_iz_i}+\vec{a}(\nabla\sigma+\nabla\widehat{\Phi})\cdot\nabla\widehat{u}_{z_n},$$

а задача (15), (16) переходит в

$$\begin{gathered}L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}\widehat{u}-\frac{\widehat{u}_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n}}L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}(\sigma+\widehat{\Phi})=0,\\ \widehat{u}\big|_{t=0}=\widehat{u}_0,\quad \widehat{u}\big|_{z\in S}=\widehat{h},\quad \widehat{u}\big|_{z\in\Gamma^*}=0,\\ \mu\widehat{\Phi}_t+\Big(1+|\nabla'\sigma+\nabla'\widehat{\Phi}+(1+\sigma_{z_n}+\\ +\widehat{\Phi}_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\Big)\frac{1}{1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n}}\widehat{u}_{z_n}\bigg|_{z\in\Gamma^*}=-\mu\sigma_t.\end{gathered}\tag{22}$$

§3. Линеаризованная задача

Определим $w(z,t)$ как решение задачи

$$
\begin{gathered}
L_\sigma w - \frac{w_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}} L_\sigma \sigma = 0, \quad z \in \Omega^*, \quad t > 0 \\
w\big|_{t=0} = \widehat{u}_0, \quad w\big|_{z\in S} = \widehat{h}, \quad w\big|_{z\in\Gamma^*} = 0.
\end{gathered}
\tag{23}
$$

Так как $|\sigma_{z_n}| \leqslant \frac{1}{2}$, функция $\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}$ ограничена и поскольку, вследствие теоремы вложения [16] σ_{z_i}, $i = 1,\dots,n$ удовлетворяют условию Гельдера ($\sigma \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*)$, $p > n+2$), коэффициенты при вторых производных в уравнении задачи (23) непрерывны, а коэффициенты при первых производных принадлежат пространству $\widetilde{L}_p(\Omega_T^*)$. При помощи построения регуляризатора [16] можно доказать, что существует единственное решение задачи (23) $w \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*)$, для которого имеет место оценка

$$
\|w\|_{p,\Omega_T^*}^{(2)} \leqslant c_{12}\big(\|u_0\|_{\widetilde{W}^{2-2/p}_{\Omega_0}} + \|h\|_{p,S_T}^{(2-1/p)}\big). \tag{24}
$$

Преобразуем уравнение и краевые условия в задаче (22), выделив линейную часть относительно $v = \widehat{u} - w$ и $\widehat{\Phi}$.

Воспользуемся формулой

$$
\vec{a}(\nabla\sigma + \nabla\widehat{\Phi}) = \vec{a}(\nabla\sigma) + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi} + \vec{b}(\nabla\sigma, \nabla\widehat{\Phi}),
$$

где $A(p) = \big(\frac{\partial a_i}{\partial p_k}\big)_{i,k=1,\dots,n}$,

$$
\vec{b} = \int_0^1 \big[A(\nabla\sigma + s\nabla\widehat{\Phi}) - A(\nabla\sigma)\big]\, ds \nabla\widehat{\Phi} =
$$

$$
= \sum_{i=1}^n \int_0^1 (1-s) A_{,i}(\nabla\sigma + s\nabla\widehat{\Phi}) ds \frac{\partial\widehat{\Phi}}{\partial z_i}\nabla\widehat{\Phi}, \quad A_{,i}(p) = \frac{\partial A}{\partial p_i}.
$$

И придем к следующему выражению

$$
L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}\widehat{u} = L_\sigma \widehat{u} + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\widehat{u}_{z_n} + \vec{b}(\nabla\sigma, \nabla\widehat{\Phi})\cdot\nabla\widehat{u}_{z_n} =
$$

$$
= L_\sigma w + L_\sigma v + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla w_{z_n} + N_1(\nabla\sigma, \nabla\widehat{\Phi}, v),
$$

$$
N_1(\nabla\sigma, \nabla\widehat{\Phi}, v) = A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla v_{z_n} + \vec{b}(\nabla\sigma, \nabla\widehat{\Phi})(\nabla w_{z_n} + \nabla v_{z_n}).
$$

Аналогичная формула справедлива и для $L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}(\sigma+\widehat{\Phi})$:

$$L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}(\sigma+\widehat{\Phi}) = L_\sigma\sigma + L_\sigma\widehat{\Phi} + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\sigma_{z_n} + N_2(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi}), \quad (25)$$

$$N_2(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi}) = A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\Phi_{z_n} + \vec{b}(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi})(\nabla\sigma_{z_n}+\nabla\widehat{\Phi}_{z_n}).$$

В дальнейшем мы подчиним $\widehat{\Phi}$ уравнению

$$L_\sigma\widehat{\Phi} + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\sigma_{z_n} = 0,$$

тогда (25) сводится к

$$L_{(\sigma+\widehat{\Phi})}(\sigma+\widehat{\Phi}) = L_\sigma\sigma + N_2(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi})$$

и уравнение в задаче (22) принимает вид

$$L_\sigma v - \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}L_\sigma\sigma + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla w_{z_n} + \frac{w_{z_n}\Phi_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2}L_\sigma\sigma + Q[\sigma,\widehat{\Phi},v],$$

где через Q обозначены нелинейные слагаемые

$$Q[\sigma,\widehat{\Phi},v] = N_1(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi},v) + \frac{(w_{z_n}+v_{z_n})}{1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n}}N_2(\nabla\sigma,\nabla\widehat{\Phi}) +$$

$$+\frac{\widehat{\Phi}_{z_n}L_\sigma\sigma}{(1+\sigma_{z_n})(1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n})}\left(v_{z_n} - \frac{w_{z_n}\widehat{\Phi}_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\right).$$

Заметим, что при выводе этого уравнения мы учли уравнение (23) для w и воспользовались формулой

$$\frac{w_{z_n}+v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n}} = \frac{w_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}} + \frac{1}{1+\sigma_{z_n}}\left(v_{z_n} - \frac{w_{z_n}\widehat{\Phi}_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\right) +$$

$$+\frac{\widehat{\Phi}_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})(1+\sigma_{z_n}+\widehat{\Phi}_{z_n})}\left(-v_{z_n} + \frac{w_{z_n}\widehat{\Phi}_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\right).$$

Краевое условие на Γ^* запишем в виде

$$\Bigg(\mu\widehat{\Phi}_t + \vec{R}(\sigma,w)\cdot\nabla\widehat{\Phi} +$$

$$+\frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(1+|\nabla'\sigma+(1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\big) + Q_1[\sigma,\widehat{\Phi},v]\Bigg)\Bigg|_{z\in\Gamma^*} = g\big|_{z\in\Gamma^*},$$

здесь введены обозначения

$$\vec{R}(\sigma,w)=[R_1,R_2,\dots .R_n]^T,$$

$$R_i=\frac{2w_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(\sigma_{z_i}+(1+\sigma_{z_n})\xi^*_{z_i}\big),\quad i=1,\dots,n-1,$$

$$R_n=\frac{w_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2}\big(-1-|\nabla'\sigma|^2+(1+\sigma_{z_n})^2|\nabla\xi^*|^2\big), \tag{26}$$

$$g=-\mu\sigma_t-\frac{w_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(1+|\nabla'\sigma+(1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\big),$$

через Q_1 обозначены все нелинейные слагаемые

$$Q_1[\sigma,\widehat{\Phi},v]=\Bigg[\int\limits_0^1(1-s)\frac{d^2}{ds^2}\Bigg[\frac{w_{z_n}+sv_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+s\widehat{\Phi}_{z_n}}\big(1+$$

$$+|\nabla'(\sigma+s\widehat{\Phi})+(1+\sigma_{z_n}+s\widehat{\Phi}_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\Bigg]ds\Bigg]_{z\in\Gamma^*}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей нелинейной периодической задаче для двух неизвестных функций v и $\widehat{\Phi}$:

$$L_\sigma v-\frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}L_\sigma\sigma=$$

$$=-A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla w_{z_n}-\frac{w_{z_n}\widehat{\Phi}_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2}L_\sigma\sigma-Q[\sigma,\widehat{\Phi},v],\quad z\in\Omega^*,\quad t>0,$$

$$L_\sigma\widehat{\Phi}+A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\sigma_{z_n}=0,\quad z\in\Omega^*,\quad t>0,$$

$$v\big|_{z\in S}=0,\quad \widehat{\Phi}\big|_{z\in S}=0,\quad v\big|_{z\in\Gamma^*}=0, \tag{27}$$

$$\left(\mu\widehat{\Phi}_t+\vec{R}(\sigma,w)\cdot\nabla\widehat{\Phi}+\frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(1+|\nabla'\sigma+(1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\big)\right)\Bigg|_{z\in\Gamma^*}=$$

$$=(g-Q_1[\sigma,\widehat{\Phi}.v])\big|_{z\in\Gamma^*},$$

$$v\big|_{t=0}=0,\quad \widehat{\Phi}\big|_{t=0}=0.$$

§4. Разрешимость линейной задачи

Рассмотрим две вспомогательные задачи

$$\begin{gathered} L_\sigma v - \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}} L_\sigma \sigma = f, \quad z \in \Omega^*, \quad t \in [0,T), \\ v\big|_{z\in S} = 0, \quad v\big|_{z\in\Gamma^*} = 0, \quad v\big|_{t=0} = 0 \end{gathered} \tag{28}$$

и

$$\begin{gathered} L_\sigma \psi + A(\nabla\sigma)\nabla\psi \cdot \nabla\sigma_{z_n} = 0, \quad z \in \Omega^*, \quad t \in [0,T) \\ \psi\big|_{z\in S} = 0, \quad (\mu\psi_t + \vec{R}(\sigma, w)\cdot\nabla\psi)\big|_{z\in\Gamma^*} = q, \\ \psi\big|_{t=0} = 0. \end{gathered} \tag{29}$$

Так как σ, $w \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*)$, $p > n+2$, $|\sigma_{z_n}| \leqslant \frac{1}{2}$, коэффициенты оператора L_σ непрерывны, а коэффициенты при первых производных в уравнениях задач (28), (29) принадлежат пространству $\widetilde{L}_p(\Omega_T^*)$.

Разрешимость задачи (28) можно доказать с помощью построения регуляризатора аналогично тому как это сделано в [16] для непериодического случая. При любой $f \in \widetilde{L}_p(\Omega_T^*)$ задача (28) имеет единственное решение $v \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\Omega_T^*)$, причем

$$\|v\|_{p,\Omega_T^*}^{(2)} \leqslant c_{13}\|f\|_{p,\Omega_T^*}. \tag{30}$$

Краевое условие в задаче (29) не удовлетворяет условию дополнительности, вследствие чего задача (29) не вкладывается в общую теорию параболических задач для уравнений второго порядка, построенную в [16]. Начально-краевые задачи для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевом условии изучались рядом авторов в гельдеровских пространствах [5–8], в весовых гельдеровских пространствах [17] и в соболевских пространствах с показателем суммируемости $p = 2$ [18, 19]. В [20, 21] получены L_p-оценки решения модельной полупространственной задачи с таким краевым условием, что позволяет доказать разрешимость задачи в области с гладкой границей при помощи построения регуляризатора [16]. Приведем формулировку теоремы для периодической области. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – периодическая область с гладкой границей

$\partial D = S_1 \cup S_2$, где S_1, S_2 – периодические поверхности. Рассмотрим в D следующую начально-краевую задачу

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} a_i(x,t) u_{x_i} - a(x,t) u = f,$$

$$(x,t) \in D_T = D \times [0,T),$$

$$\mu u_t + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) u_{x_i}\big|_{x\in S_1} = \varphi, \quad u\big|_{t=0} = 0, \tag{31}$$

$$u|_{x\in S_2} = 0.$$

где $\gamma_1 \xi^2 \leqslant a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \gamma_2 \xi^2, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$

Теорема 2. *Пусть в задаче* (31) $a_{ij} \in C(D_T)$, $a_i, a \in \widetilde{L}_p(D_T)$, $b_i \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(S_T)$ *с некоторым* $p > n+2$,

$$\mu > 0, \quad \sum_{j=1}^{n} b_j(x,t)\nu_j > 0, \tag{32}$$

где $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *– вектор внешней нормали к границе области.*

Тогда при всех $f \in \widetilde{L}_p(D_T)$, $\varphi \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(S_{1,T})$ *задача* (31) *имеет единственное решение* $u \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(D_T)$, *причем это решение обладает дополнительной гладкостью на границе* S_1: $u_t\big|_{x\in S_1} \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(S_{1,T})$ *и имеет место оценка*

$$\|u\|^{(2)}_{p,D_T} + \|u_t\|^{(1-1/p)}_{p,S_T} \leqslant c_{14}\big(\|f\|_{\widetilde{L}_p,D_T} + \|\varphi\|^{(1-1/p)}_{p,S_T}\big). \tag{33}$$

Доказательство этого результата предполагается опубликовать отдельно.

Замечание. Условие (32) определяет сочетание знаков в краевом условии при котором задача (31) корректна. Как показано в работе [22], в случае другого сочетания знаков задача с таким краевым условием некорректна.

Покажем, что краевое условие на части границы Γ^* в задаче (29) удовлетворяет условиям теоремы 2.

При наших предположениях

$$\left(w \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*), \quad \sigma \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*), \quad \xi^* \in \widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1}), \quad |\sigma_{z_n}| \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

$\frac{1}{1+\sigma_{z_n}}$ и $\nabla\xi^*$ являются ограниченными функциями, а $w_{z_n}\sigma_{z_n}\big|_{\Gamma_0} \in \widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\Gamma_T^*)$ (см. лемму 2). Следовательно, функции R_i $(i = 1, \dots, n)$, g, определяемые формулами (26) являются элементами пространства $\widetilde{W}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\Gamma_T^*)$.

Проверим условие (32).

Обозначим через $\frac{\partial\psi}{\partial l_j}$ производную по направлению вектора $\vec{l}_j = \vec{e}_j + \xi^*_{z_j}\vec{e}_n$ являющемуся касательным к поверхности Γ^*. Тогда

$$\frac{\partial\psi}{\partial z_j} + \frac{\partial\xi^*}{\partial z_j}\frac{\partial\psi}{\partial z_n} = \sqrt{1+\xi^{*2}_{z_j}}\,\frac{\partial\psi}{\partial l_j}$$

и имеет место равенство

$$\vec{R}\cdot\vec{n} = -\frac{w_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2\sqrt{1+|\nabla\xi^*|^2}}\bigl(1+|\nabla'\sigma + (1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\bigr), \qquad (34)$$

здесь через $\vec{n}$ обозначен вектор внешней нормали к поверхности Γ^*.

Одно из предположений теоремы 1 состоит в том, что $\frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\Gamma_0} \leqslant -\alpha < 0$, следовательно и $\frac{\partial u_0}{\partial n}\big|_{\Gamma^*} \leqslant -\alpha_1 < 0$, а значит, так как $\vec{n}\cdot\vec{e}_n > 0$,

$$w_{z_n}\big|_{\substack{\Gamma^*\\ t=0}} = \widehat{u}_{0_{z_n}}\big|_{\Gamma^*} \leqslant -\beta < 0.$$

В силу непрерывности функции w_{z_n}, $w_{z_n}\big|_{\Gamma^*}$ остается отрицательным и при малых положительных значениях t. Будем считать T настолько малым, чтобы $w_{z_n}\big|_{\Gamma^*} \leqslant -\beta/2$ при всех $t \in [0,T)$. Тогда правая часть (34) строго положительна и $\vec{R}\cdot\vec{n} > 0$. Так как предполагается, что $\mu > 0$, условие (32) выполнено. Из теоремы 2 следует разрешимость задачи (29). При любой $q \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\Gamma_T^*)$ задача (29) имеет единственное решение $\psi \in \widetilde{W}_p^{2,1}(\Omega_T^*)$, которое обладает дополнительной гладкостью на части границы Γ^*:

$$\psi_t\big|_{\Gamma^*} \in \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{1-1/p,1/2-1/2p}(\Gamma_T^*)$$

и

$$\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_T^*} + \|\psi_t\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma_T^*} \leqslant c_{15}\|q\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma_T^*}. \qquad (35)$$

Из разрешимости задач (28), (29) вытекает разрешимость в пространствах периодических функций следующей линейной задачи

$$L_\sigma v - \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}L_\sigma\sigma = f, \quad z \in \Omega^*, \quad t \in [0,T),$$

$$L_\sigma\widehat{\Phi} + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\sigma_{z_n} = 0, \quad z\in\Omega^*, \quad t\in[0,T),$$

$$v\big|_{z\in S} = 0, \quad \widehat{\Phi}\big|_{z\in S} = 0, \quad v\big|_{z\in\Gamma^*} = 0, \tag{36}$$

$$\left[\mu\widehat{\Phi}_t + \vec{R}(\sigma,w)\cdot\nabla\widehat{\Phi} + \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(1+|\nabla'\sigma+(1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\big)\right]_{z\in\Gamma^*} = q,$$

$$v\big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{\Phi}\big|_{t=0} = 0,$$

решение которой $V = \begin{bmatrix} v \\ \widehat{\Phi}\end{bmatrix}$ также подчиняется неравенствам (30), (35).

§5. Разрешимость нелинейной задачи

Введем следующие обозначения:

$$\mathcal{M}V = \Big[L_\sigma v - \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}L_\sigma\sigma,$$

$$L_\sigma\widehat{\Phi} + A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla\sigma_{z_n}, \quad v\big|_S, \quad \widehat{\Phi}\big|_S, \quad v\big|_{\Gamma^*},$$

$$\left(\mu\widehat{\Phi}_t + \vec{R}(\sigma,w)\cdot\nabla\widehat{\Phi} + \frac{v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}}\big(1+|\nabla'\sigma+(1+\sigma_{z_n})\nabla'\xi^*|^2\big)\right)_{\Gamma^*}\Big]^T,$$

$$HV = \Big[-A(\nabla\sigma)\nabla\widehat{\Phi}\cdot\nabla w_{z_n} - \frac{w_{z_n}\widehat{\Phi}_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2}L_\sigma\sigma - Q[\sigma,\widehat{\Phi},v],$$

$$0,0,0,0,-Q_1[\sigma,\widehat{\Phi},v]\Big]^T,$$

$$\mathcal{G} = [0,0,0,0,0,g]^T.$$

Тогда задача (27) может быть записана в виде

$$\mathcal{M}V = HV + \mathcal{G}. \tag{37}$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{W}}_p(\Omega^*_\tau)$ пространство периодических функций, норма в котором определяется левой частью неравенства (35) и элементы которого удовлетворяют нулевым начальным условиям:

$$\widehat{\Phi}\big|_{t=0} = 0, \quad \widehat{\Phi}_t\big|_{\substack{t=0\\ z\in\Gamma^*}} = 0$$

(так как $p > n+2$, второе условие имеет смысл). И введем пространство $W(\tau) = \underset{0}{\widetilde{W}}{}_p^{2,1}(\Omega_\tau^*) \times \widetilde{\mathcal{W}}_p(\Omega_\tau^*)$ с нормой

$$\langle\langle V \rangle\rangle_{p,\tau} = \big((\|v\|_{p,\Omega_\tau^*}^{(2)})^2 + (\|\Phi\|_{p,\Omega_\tau^*}^{(2)})^2 + (\|\Phi_t\|_{p,\Gamma_\tau^*}^{(1-1/p)})^2 \big)^{1/2}.$$

Из разрешимости задачи (36) вытекает, что у оператора $\mathcal{M}$ существует ограниченный обратный оператор $\mathcal{M}^{-1}$, применяя его к обеим частям уравнения (37), приходим к уравнению

$$V = \mathcal{M}^{-1} HV + \mathcal{M}^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{M}^{-1} HV + V_0, \tag{38}$$

здесь через $V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_0 \end{bmatrix}$ обозначено решение задачи (36) с $f = 0$, $q = g$.

Обозначив $V - V_0 = \begin{bmatrix} v \\ \widehat{\Phi} - \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \mathcal{U}$, запишем (38) в виде

$$\mathcal{U} = \mathcal{M}^{-1} H(\mathcal{U} + V_0) \equiv F\mathcal{U}, \tag{39}$$

где $F : W(\tau) \to W(\tau)$.

Покажем, что при малых τ, F переводит замкнутый шар пространства $W(\tau)$ с центром в нуле и достаточно малого радиуса r,

$$\mathcal{B}_r = \{\mathcal{U} \in W(\tau) \mid \langle\langle \mathcal{U} \rangle\rangle_{p,\tau} \leqslant r\},$$

в себя и является в этом шаре оператором сжатия.

Лемма 2 (о произведении). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с гладкой границей. Для любых двух функций v, $\psi \in \underset{0}{W}{}_p^{2,1}(\Omega_T)$ с некоторым $p > n+2$ $D^2\psi Dv \in L_p(\Omega_T)$ и при любом $\tau \in (0,T)$ имеет место оценка*

$$\|D^{(2)}\psi Dv\|_{p,\Omega_T} \leqslant c_{16}\tau^{\varepsilon} \|\psi\|_{p,\Omega_T}^{(2)} \|v\|_{p,\Omega_T}^{(2)}, \tag{40}$$

где $\varepsilon > 0$, а постоянная c_{16} не зависит от τ. (Под $D^{(2)}\psi$ подразумевается производная вида $\mathcal{D}_t^r \mathcal{D}_z^\alpha \psi(z,t)$ при $2r + |\alpha| = 2$).

Доказательство. Так как $p > n+2$, воспользовавшись интерполяционным неравенством [23] и оценкой [23]

$$\|v\|_{p,\Omega_\tau} \leqslant c_{17}\tau \|v\|_{p,\Omega_\tau}^{(2)},$$

имеем при любом $\tau \in (0,T)$:

$$\Big(\int\limits_{\Omega_\tau} |D^{(2)}\psi Dv|^p \, dz dt \Big)^{1/p} \leqslant \max_{\Omega_\tau} |Dv| \Big(\int\limits_{\Omega_\tau} |D^{(2)}\psi|^p \, dz dt \Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\Omega_\tau} |Dv| \|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} \leqslant \left(\delta^{1-\frac{(n+2)}{p}} \|v\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} + \delta^{-1-\frac{(n+2)}{p}} \|v\|_{p,\Omega_\tau}\right) \|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\delta^{1-\frac{(n+2)}{p}} + c_{18}\tau\delta^{-1-\frac{(n+2)}{p}}\right) \|v\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau} \|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau},$$

где $\delta > 0$.

Откуда, выбирая $\delta = \tau^{1/2}$, приходим к (40) с $\varepsilon = \frac{1}{2}(1 - \frac{n+2}{p}) > 0$. ■

Возьмем $\mathcal{U} \in \mathcal{B}_r$ и оценим $\langle\langle F\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}$

$$\langle\langle F\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau} = \langle\langle \mathcal{M}^{-1} H(\mathcal{U} + V_0)\rangle\rangle_{p,\tau} \leqslant c_{19} \|H(\mathcal{U} + V_0)\|_{p,\Omega^*_\tau} \leqslant$$

$$c_{20}\Big\{ \|A(\nabla\sigma)\nabla(\psi+\psi_0)\cdot\nabla w_{z_n}\|_{p,\Omega^*_\tau} + \left\| \frac{w_{z_n}(\psi_{z_n} + \psi_{0z_n})}{(1+\sigma_{z_n})^2} L_\sigma \sigma \right\|_{p,\Omega^*_\tau} + \tag{41}$$

$$+ \|Q[\sigma, \psi + \psi_0, v]\|_{p,\Omega^*_\tau} + \|Q_1[\sigma, \psi + \psi_0, v]\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma^*_\tau} \Big\}.$$

Для оценки первых двух слагаемых в правой части неравенства (41) воспользуемся следующим неравенством [23]:

$$\|D\psi\|_{p,\Omega^*_\tau} \leqslant c_{21}\tau^{1/2} \|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau}, \tag{42}$$

имеем

$$\|A(\nabla\sigma)(\nabla\psi + \nabla\psi_0) \cdot \nabla w_{z_n}\|_{p,\Omega^*_\tau} + \left\| \frac{w_{z_n}(\psi_{z_n} + \psi_{0z_n})}{(1+\sigma_{z_n})^2} L_\sigma \sigma \right\|_{p,\Omega^*_\tau} \leqslant$$

$$\leqslant c_{22} \|\nabla\psi + \nabla\psi_0\|_{p,\Omega^*_\tau} \leqslant c_{23}\tau^{1/2} \big(\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\psi_0\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau}\big) \leqslant$$

$$\leqslant c_{24}\tau^{1/2} (\langle\langle \mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau} + \langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau}), \ \ c_{24} = c_{24}(\sigma, w).$$

Оценка третьего слагаемого в правой части неравенства (41) получается с помощью леммы 2, вследствие того, что нелинейные слагаемые представляют из себя произведения неизвестных функций, их производных по пространственным переменным и сомножителя $\frac{1}{1+\sigma_{z_n}+(\psi+\psi_0)_{z_n}}$ и линейны относительно вторых производных неизвестных функций. Оценим, например, нелинейное слагаемое

$$\frac{(\psi + \psi_0)_{z_i z_n} v_{zn}}{1 + \sigma_{z_n} + \psi_{z_n} + \psi_{0z_n}}. \tag{43}$$

Так как ψ, $\psi_0 \in \overset{\circ}{W}{}_p^{2,1}(\Omega_\tau^*)$, то за счет уменьшения τ и r можно добиться, например, чтобы $|\psi_{z_n}+\psi_{0z_n}|\leqslant\frac{1}{4}$, тогда, так как $|\sigma_{z_n}|\leqslant\frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{|1+\sigma_{z_n}+\psi_{z_n}+\psi_{0z_n}|}\leqslant 4$$

и (43) оценивается следующим образом

$$\left\|\frac{(\psi_{z_iz_n}+\psi_{0z_iz_n})v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+\psi_{z_n}+\psi_{0z_n}}\right\|_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant 4\|\psi_{z_iz_n}v_{z_n}+\psi_{0z_iz_n}v_{z_n}\|_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant$$

$$\leqslant c_{25}\tau^\varepsilon\big(\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}+\|\psi_0\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}\big)\|v\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant c_{26}\tau^\varepsilon(\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}+\langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau})\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}.$$

При оценке последнего слагаемого в правой части неравенства (41), учтем, что нелинейные слагаемые входящие в Q_1 представляют из себя произведения неизвестных функций, их первых производных по пространственным переменным и сомножителя $\frac{1}{1+\sigma_{z_n}+(\psi+\psi_0)_{z_n}}$, имеем

$$\|Q_1[\sigma,\psi+\psi_0,v]\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma_\tau^*}\leqslant c_{27}\|\nabla(\psi+\psi_0)\cdot\nabla v\|^{(1)}_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant$$

$$c_{28}\max_{\Omega_\tau^*}|\nabla v|\|\nabla\psi+\nabla\psi_0\|^{(1)}_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant c_{29}\max_{\Omega_\tau^*}|\nabla v|\cdot\|\psi+\psi_0\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant$$

$$\leqslant c_{30}\tau^\varepsilon\|v\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}\big(\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}+\|\psi_0\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}\big)\leqslant c_{31}\tau^\varepsilon\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}\big(\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}+\langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau}\big)_{\varepsilon>0},$$

$$c_{31}=c_{31}\big(\|\sigma\|^{(2)}_{\Omega_T^*},\|\xi^*\|_{\widetilde{W}_p^{2-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})},\|w\|^{(2)}_{\Omega_T^*}\big),$$

здесь мы воспользовались оценкой $\|\nabla\psi\|^{(1)}_{p,\Omega_\tau^*}\leqslant c_{32}\|\psi\|^{(2)}_{p,\Omega_\tau^*}$ [24] и теми же рассуждениями, что и при доказательстве леммы 2.

Итак

$$\langle\langle F\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}\leqslant c_{33}\big\{\tau^{1/2}(\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}+\langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau})+\tau^\varepsilon\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}\big(\langle\langle\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}+$$

$$+\langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau}\big)\big\}\leqslant c_{34}(\tau^{1/2}+r\tau^\varepsilon)(r+\langle\langle V_0\rangle\rangle_{p,\tau}).\qquad(44)$$

Выбирая τ достаточно малым, добьемся того, чтобы правая часть неравенства (44) не превосходила r. Таким образом, $\langle\langle F\mathcal{U}\rangle\rangle_{p,\tau}\leqslant r$, мы показали, что при достаточно малом τ F переводит $\mathcal{B}_r$ в себя. Покажем, что это отображение является сжимающим. Выберем $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2\in\mathcal{B}_r$ и оценим норму разности $F\mathcal{U}_1-F\mathcal{U}_2$:

$$\langle\langle F\mathcal{U}_1-F\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau}=\langle\langle\mathcal{M}^{-1}(H(\mathcal{U}_1+V_0)-H(\mathcal{U}_2+V_0))\rangle\rangle_{p,\tau}\leqslant$$

$$\leqslant c_{35}\Big\{\|A(\nabla\sigma)\nabla(\psi_1-\psi_2)\cdot\nabla w_{z_n}\|_{p,\Omega^*_\tau}+$$

$$+\Big\|\frac{w_{z_n}}{(1+\sigma_{z_n})^2}(\psi_{1z_n}-\psi_{2z_n})L_\sigma\sigma\Big\|_{p,\Omega^*_\tau}+$$

$$+\|Q[\sigma,\psi_1+\psi_0,v]-\|Q[\sigma,\psi_2+\psi_0,v]\|_{p,\Omega^*_\tau}+$$

$$+\|Q_1[\sigma,\psi_1+\psi_0,v]-\|Q_1[\sigma,\psi_2+\psi_0,v]\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma^*_\tau}\Big\}. \qquad (45)$$

Оценим первые два слагаемых в правой части (45) через

$$c_{36}\tau^{1/2}\|\psi_1-\psi_2\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau}\leqslant c_{37}\tau^{1/2}\langle\langle\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau},$$

$$c_{37}=c_{37}\big(\|\sigma\|^{(2)}_{\Omega^*_T},\ \|\xi^*\|_{\widetilde{W}^{2-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})},\ \|w\|^{(2)}_{\Omega^*_T}\big).$$

Оценку разности нелинейных слагаемых продемонстрируем на примере слагаемого (43).

Воспользовавшись очевидным равенством

$$\frac{\psi_1+\psi_0}{1+\sigma+\psi_1+\psi_0}-\frac{\psi_2+\psi_0}{1+\sigma+\psi_2+\psi_0}=$$

$$=\frac{(1+\sigma)(\psi_1-\psi_2)}{(1+\sigma+\psi_1+\psi_0)(1+\sigma+\psi_2+\psi_0)}$$

и леммой 2, имеем:

$$\Big\|\frac{(\psi_{1z_iz_n}+\psi_{0z_iz_n})v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+\psi_{1z_n}+\psi_{0z_n}}-\frac{(\psi_{2z_iz_n}+\psi_{0z_iz_n})v_{z_n}}{1+\sigma_{z_n}+\psi_{2z_n}+\psi_{0z_n}}\Big\|_{p,\Omega^*_\tau}\leqslant$$

$$\leqslant c_{38}\|(\psi_{1z_iz_n}-\psi_{2z_iz_n})v_{z_n}\|_{p,\Omega^*_\tau}\leqslant c_{39}\tau^\varepsilon\|\psi_1-\psi_2\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau}\|v\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau}\leqslant$$

$$\leqslant c_{39}\tau^\varepsilon\langle\langle\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau}\langle\langle\mathcal{U}_1\rangle\rangle_{p,\tau}.$$

Таким образом, можно показать, что

$$\langle\langle F\mathcal{U}_1-F\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau}\leqslant c_{40}(\tau^{1/2}+r\tau^\varepsilon)\langle\langle\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau}\leqslant\gamma(\tau)\langle\langle\mathcal{U}_1-\mathcal{U}_2\rangle\rangle_{p,\tau},$$

здесь за счет выбора достаточно малого τ можно добиться того, чтобы $\gamma(\tau)\in(0,1)$, $\forall\ \tau\in(0,\tau_0)$.

Значит существует $T_0\in(0,T)$, такое, что при $\tau\leqslant T_0$ F переводит замкнутый шар пространства $W(\tau)$ достаточно малого радиуса в себя и является в этом шаре оператором сжатия. По принципу сжимающих отображений уравнение (39) однозначно разрешимо в $W(\tau)$. Положив $V = \mathcal{U} + V_0$, находим решение задачи (27), для него имеет место оценка

$$\begin{gathered} \|v\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\widehat{\Phi}\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\widehat{\Phi}_t\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma^*_\tau} \leqslant \\ \leqslant c_{41}\big(\|\sigma\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\sigma_t\|^{(1-1/p)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|w\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\xi^*\|_{\widetilde{W}^{2-1/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}\big). \end{gathered} \tag{46}$$

Решением задачи (22) является пара функций $\widehat{\Phi}$, $\widehat{u} = v + w$. Из оценок (17), (18.2), (24), (46) следует, что

$$\begin{gathered} \|\widehat{u}|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\widehat{\Phi}\|^{(2)}_{p,\Omega^*_\tau} + \|\widehat{\Phi}_t\|^{(1-1/p)}_{p,\Gamma^*_\tau} \leqslant \\ \leqslant c_{42}\big(\|u_0\|_{\widetilde{W}^{2-2/p}_{\Omega_0}} + \|h\|^{(2-1/p)}_{p,S_\tau} + \|\xi_0\|_{\widetilde{W}^{2-2/p}_p(\mathbb{R}^{n-1})}\big). \end{gathered} \tag{47}$$

§6. Заключение

Возвращаясь к переменным y при помощи преобразования $y = Z^{-1}(z)$ (19), находим функции, удовлетворяющие соотношениям (15), (16). При малых значениях времени Якобиан преобразования (19) положителен, что вместе с леммой 2 дает возможность утверждать, что при некотором $t^* \leqslant T_0$

$$\widehat{u}(y,t) = \widehat{u}(Z(y),\, t) \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\widetilde{Q}_{t^*}),$$

$$\Phi(y,t) = \widehat{\Phi}(Z(y),\, t) \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\widetilde{Q}_{t^*}), \quad \widetilde{Q}_{t^*} = \big\{(y,t)\big|t \in [0,t^*),\, y \in \widetilde{\Omega}_t\big\}.$$

Вернемся к переменным x, воспользовавшись преобразованием $x = Y^{-1}(y)$ (13). Так как $\Phi \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\widetilde{\Omega}_t \times [0,t^*))$, имеем вследствие (14)

$$\xi(x',t) \in \widetilde{W}^{2-1/p,1-1/2p}_p(\mathbb{R}^{n-1}_{t^*}).$$

А так как функции Σ, σ, Φ имеют производную по времени на Γ^*, из соотношений (14), (21) следует, что ξ_t также существует и является элементом пространства $\widetilde{W}^{1-1/p,1/2-1/2p}_p(\mathbb{R}^{n-1}_{t^*})$.

Рассмотрим область $Q_{t^*} = \{(x,t) \mid t \in [0,t^*),\ x \in \Omega_t\}$ с подвижной частью границы Γ_t, задаваемой уравнением (1). Так как якобиан преобразования (13) положителен, а

$$\Phi \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\widetilde{\Omega}_{t^*}),$$

то

$$u(x,t) = \widetilde{u}\big(Y(x),t\big) \in \widetilde{W}^{2,1}_p(\Omega_t \times [0,t^*))$$

и, очевидно, удовлетворяет соотношениям (2)–(6). Таким образом, мы нашли пару функций $\xi(x', t)$ и $u(x, t)$ существование которых утверждается в теореме 1.

Замечание 1. Единственность обобщенного решения однофазной задачи Стефана была доказана в [26, 27].

Замечание 2. Можно применить такое же преобразование координат и при доказательстве разрешимости задачи (2)–(6) в гельдеровских пространствах, при этом нет необходимости вводить промежуточное преобразование в область с подвижной границей $\widetilde{\Gamma}$, можно сразу задать преобразование переводящее Ω_t в Ω_0.

Работа выполнена в рамках проекта INTAS No. 94–2187.

Литература

1. А. М. Мейрманов, *О классической разрешимости задачи Стефана.* — Докл. АН СССР **249, No. 6** (1979), 1309–1312.
2. А. М. Мейрманов, *Задача Стефана.* Новосибирск, Наука, (1986) 239 с.
3. E. I. Hanzawa, *Classical solution of the Stefan problem.* — Tohoku Math. J. **33** (1981), 297–335.
4. Б. В. Базалий, *Исследование двухфазной задачи Стефана в окрестности стационарного решения.* — ДАН УССР, Сер. А **No. 12** (1983), 3–7.
5. В. Б. Базалий, *Задача Стефана.* — ДАН УССР, Сер. А **No. 11** (1986), 3–7.
6. Б. В. Базалий, С. П. Дегтярев, *О классической разрешимости многомерной задачи Стефана при конвективном движении вязкой несжимаемой жидкости.* — Мат. сб. **132, No. 1** (1987), 3–19.
7. Е. В. Радкевич, *О разрешимости нестационарных задач со свободной границей.* — ДАН СССР **288, No. 5** (1986), 1094–1099.
8. Е. В. Радкевич, А. С. Меликулов, *Краевые задачи со свободной границей.* Ташкент, ФАН (1988).
9. Е. В. Радкевич, *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей.* — В кн.: Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики, Новосибирск, 1986 с. 85–111.
10. Г. И. Бижанова, *Исследование разрешимости в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и нестационарной фильтрации Флорина для параболических уравнений второго порядка (задачи Коши–Стефана и Коши–Флорина).* — Зап. научн. семин. ПОМИ **213** (1994), 14–47.
11. Г. И. Бижанова, *Решение в весовом гельдеровском пространстве функций многомерных двухфазных задач Стефана и Флорина для параболических уравнений второго порядка в ограниченной области.* — Алгебра и анализ **7, вып. 2** (1995), 46–76.
12. A. Friedman, D. Kinderlehrer, *A one phase Stefan problem.* — Indiana Univ. Math. J. **24** (1975), 1005–1035.

13. L. A. Caffarelly, *Some aspects of the one-phase Stefan problem.* — Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 73–77.
14. D. Kinderlehrer, L. Nirenberg, *The smoothness of the free boundary in the one phase Stefan problem.* — Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 257–282.
15. J. Escher, *On moving boundaries in deformable media.* — Advances in Math. siences and applications, 1997 (to appear).
16. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука (1967).
17. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О разрешимости начально-краевой задачи для параболического уравнения второго порядка с производной по времени в граничном условии в весовом гельдеровском пространстве функций.* — Алгебра и анализ **5, вып. 1** (1993), 109–142.
18. Н. А. Григорьева, И. Ш. Могилевский, *Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности.* — Сб. статей "Геометрические вопросы теории функций и множеств" Калинин (1985), 27–42.
19. Е. В. Фролова, *Начально-краевая задача с некоэрцитивным краевым условием в области с ребрами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **213** (1994), 206–223.
20. Е. В. Фролова, *L_p-оценки решений модельных задач с производной по времени в краевом условии или в условии сопряжения.* — Изв. СПГЭТУ вып. **450** (1996), 69–79.
21. H. Koch, Preprint series of SFB 359 at the University of Heidelberg.
22. С. И. Темирбулатов, *Некорректные смешанные задачи теплопроводности.* — ДАН СССР **264, No. 1** (1982), 45–47.
23. В. А. Солонников, *Об оценках в L_p решений эллиптических и параболических систем.* — Труды МИАН **102** (1967), 137–160.
24. В. А. Солонников, *Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа.* — Труды МИАН **70** (1964), 133-212.
25. В. П. Ильин, В. А. Солонников, *О некоторых свойствах дифференцируемых функций многих переменных.* — Труды МИАН **66** (1962), 205–226.
26. О. А. Олейник, *Об одном методе решения общей задачи Стефана.* — ДАН СССР **135, No. 5** (1960), 1054–1057.
27. С. Л. Каменомостская, *О задаче Стефана.* — Мат. сб. **53, No. 4** (1961), 489–514.

Solonnikov V. A., Frolova E. V. L_p-theory of the Stefan problem.

Local solvability of the one-phase Stefan problem is established in anisotropic Sobolev spaces. There is no loss of regularity. Hanzawa transformation of the Stefan problem to a problem in a domain with a fixed boundary is modified.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

С.-Петербургский
Электротехнический Университет

Поступило 12 декабря 1996 г.