А. Н. Бородин

ВАРИАНТЫ ФОРМУЛЫ ФЕЙНМАНА–КАЦА

0. В первой части работы рассматриваются различные известные варианты формулы Фейнмана–Каца. Устанавливается связь между формулой Фейнмана–Каца и обратным уравнением Колмогорова. С одной стороны, как известно, обратное уравнение Колмогорова является частным случаем формулы Фейнмана–Каца. С другой стороны, как оказывается, формулу Фейнмана–Каца можно рассматривать как частный случай уравнения Колмогорова, но для процессов на единицу большей размерности. Вторая часть работы посвящена некоторым естественным обобщениям формулы Фейнмана–Каца. Результаты такого типа можно разбить на два основных класса. К первому относятся формулы, основанные на варьировании начала траектории случайного процесса, а ко второму – основанные на варьировании конца траектории. Приведем два классических результата, которые были получены М. Кацем в [1] и [2], соответственно. Идея вывода таких формул была навеяна работой физика Р. Фейнмана, в которой он описывал решение уравнения Шредингера в виде континуального интеграла.

Пусть $w(s)$, $s \geqslant 0$, – процесс броуновского движения. Будем обозначать $\mathbf{E}_x$ математического ожидание по процессу броуновского движения $w(s)$ при условии $w(0) = x$.

Для того, чтобы в дальнейшем сократить формулировки результатов, сразу приведем несколько условий наиболее часто налагаемых на ту или иную функцию одной или многих переменных. При этом не преследуется цель, чтобы условия были близки к оптимальным.

Пусть функция $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in R^n$, – дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет одному из следующий трех условий:

Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант No. 96-01-00672, грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199 и Федеральной целевой программой интеграциия No. 326.53.

при некоторых $K>0$, $C>0$ и любых i, j от 1 до n

$$|f(\vec{x})| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x})\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})\right| \leqslant K, \tag{b}$$

$$|f(\vec{x})| \leqslant K(1+\|\vec{x}\|), \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x})\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})\right| \leqslant K, \tag{ℓ}$$

$$|f(\vec{x})| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(\vec{x})\right| + \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(\vec{x})\right| \leqslant K\, e^{C\|\vec{x}\|}, \tag{e}$$

где $\|\vec{x}\|$ обозначает евклидову норму вектора $\vec{x}$.

Теорема 0.1. *Пусть функция $a(x)$ удовлетворяет условию (ℓ), и функция $F(x)$ удовлетворяет условию (e), $x \in R^1$. Тогда функция*

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(w(t)) \exp\Big(\int_0^t a(w(v))\,dv\Big)\Big\}, \quad t \geqslant 0, \quad x \in R^1 \tag{0.1}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\, m(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} m(t,x) + a(x)\, m(t,x), \tag{0.2}$$

$$m(+0,x) = F(x). \tag{0.3}$$

Этот результат основан на варьировании начала траектории броуновского процесса. Часто бывают полезными результаты, в которых задано не только начало траектории, но и ее конец. В этом случае можно получить результат, аналогичный теореме 0.1, но основанный на варьировании конца траектории броуновского процесса.

В дальнейшем для математического ожидания случайных величин $\xi = \xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, которое берется не по всему пространству исходов Ω, а лишь по некоторому подмножеству $Q \subset \Omega$, будет использоваться обозначение $\mathbf{E}_x\{\xi; Q\} := \mathbf{E}_x\{\xi(\omega) \mathbb{1}_Q(\omega)\}$, где $\mathbb{1}_Q$ – индикатор множества Q.

Теорема 0.2. *Пусть функция $a(x)$ удовлетворяет условию (ℓ). Тогда функция*

$$g(t,z) := \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(\int_0^t a(w(v))\,dv\Big);\ w(t) < z\Big\} \tag{0.4}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\, g(t,z) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\, g(t,z) + a(z)\, g(t,z), \tag{0.5}$$

$$g(+0,x) = \delta_x(z), \tag{0.6}$$

где $\delta_x(z)$ *–* δ*-функция Дирака.*

Замечание 0.1. Результаты такого типа, включающие варьирование либо начала, либо конца траектории легко можно преобразовать друг в друга. Если индексом x у функции $g(t,z)$ отметить тот факт, что она зависит еще и от x, т.е. положить $g_x(t,z) \equiv g(t,z)$, то, используя формулу полной вероятности, легко убедиться, что

$$m(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(z)\, g_x(t,z)\, dz. \tag{0.7}$$

Таким образом, функция $g_x(t,z)$, определяемая задачей (0.5), (0.6) является функцией Грина для задачи (0.2), (0.3).

Замечание 0.2. При $a \equiv 0$ теоремы 0.1, 0.2 превращаются соответственно в результаты, которые называются обратным уравнением и прямым уравнением Колмогорова (см. [3]).

1. Убедимся, что более общий результат, чем теорема 0.1 является фактически следствием обратного уравнения Колмогорова, примененного для двумерного диффузионного процесса $\vec{\xi}(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, где $\xi_1(t) = w(t)$, а

$$\xi_2(t) = y + \int\limits_0^t a(w(v))\, dv + \int\limits_0^t b(w(v))\, dw(v).$$

По формуле Ито для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $Q(x,y)$, удовлетворяющей условию (e)

$$\begin{aligned} dQ\big(w(t),\xi_2(t)\big) = \Big(&\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}Q\big(w(t),\xi_2(t)\big) + \frac{1}{2}b^2(w(t))\frac{\partial^2}{\partial y^2}Q\big(w(t),\xi_2(t)\big) \\ &+ b(w(t))\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}Q\big(w(t),\xi(t)\big) + a(w(t))\frac{\partial}{\partial y}Q\big(w(t),\xi_2(t)\big)\Big)\, dt \\ &+ \Big(\frac{\partial}{\partial y}Q\big(w(t),\xi_2(t)\big) + b(w(t))\frac{\partial}{\partial y}Q\big(w(t),\xi_2(t)\big)\Big)\, dw(t). \end{aligned}$$

Следовательно, производящий оператор $\mathcal{L}$ процесса $\vec{\xi}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + a(x)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда, согласно результату А. Н. Колмогорова, (обратное уравнение) функция

$$q(t,x,y) = \mathbf{E}_x\, Q\big(w(t), \xi_2(t)\big)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}q = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}q + \frac{1}{2}b^2(x)\frac{\partial^2}{\partial y^2}q + b(x)\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}q + a(x)\frac{\partial}{\partial y}q, \tag{1.1}$$

$$q(+0,x,y) = Q(x,y). \tag{1.2}$$

Для частного случая $Q(x,y) = F(x)e^y$ имеем

$$q(t,x,y) = e^y\, m(t,x),$$

где

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(w(t))\exp\Big(\int_0^t a(w(v))\,dv + \int_0^t b(w(v))\,dw(v)\Big)\Big\}. \tag{1.3}$$

Подставляя $e^y\, m(t,x)$ в задачу (1.1), (1.2) получаем следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть функции $b(x)$, $a(x)$ и $F(x)$ удовлетворяют условиям (b), (ℓ) и (e) соответственно. Тогда функция $m(t,x)$, определяемая формулой* (1.3), *является решением задачи*

$$\frac{\partial}{\partial t}m = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}m + b(x)\frac{\partial}{\partial x}m + \big(a(x) + \frac{1}{2}b^2(x)\big)m, \tag{1.4}$$

$$m(+0,x) = F(x). \tag{1.5}$$

Замечание 1.1. Теорема 1.1 формально обобщает теорему 0.1, в которой $b \equiv 0$. Однако она может быть и непосредственно выведена из теоремы 0.1, если заметить, что, согласно формуле Ито,

$$\int_0^t b(w(v))\,dw(v) = \int_x^{w(t)} b(y)\,dy - \frac{1}{2}\int_0^t b'(w(v))\,dv.$$

Тогда функцию $m(t,x)$, определяемую формулой (1.3), можно представить в виде

$$m(t,x)\exp\Bigl(\int_0^x b(y)\,dy\Bigr)$$
$$=\mathbf{E}_x\Bigl\{F(w(t))\exp\Bigl(\int_0^{w(t)} b(y)\,dy\Bigr)\exp\Bigl(\int_0^t \bigl(a(w(v))-\frac{1}{2}b'\bigl(w(v)\bigr)\bigr)\,dv\Bigr)\Bigr\}.$$

К правой части этого равенства применима теорема 0.1. Такой вывод теоремы 1.1 описан в монографии А. В. Скорохода и Н. П. Слободенюка [4].

В случае, когда коэффициенты a и b зависят еще и от параметра времени t, более естественными являются результаты, относящиеся ко второму классу, т.е. результаты, основанные на варьировании конца траектории случайного процесса. Рассмотрим вопрос об обобщении теоремы 0.2. Заметим, что функция $\widetilde{\varphi}(t)=\exp(\int_0^t a(w(v))\,dv)$, входящая под знак математического ожидания (0.4), является решением линейного уравнения

$$d\widetilde{\varphi}(t)=a(w(t))\,\widetilde{\varphi}(t)\,dt, \qquad \widetilde{\varphi}(0)=1. \tag{1.6}$$

Общий вид линейного стохастического дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от значений процесса броуновского движения, следующий:

$$\begin{aligned}&d\varphi(t)=a(t,w(t))\varphi(t)dt+b(t,w(t))\varphi(t)dw(t)+c(t,w(t))dt,\\ &\varphi(0)=\varphi_0.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Это уравнение имеет явное решение

$$\varphi(t)=\exp\Bigl(\int_0^t \bigl(a(v,w(v))-\frac{1}{2}b^2(v,w(v))\bigr)\,dv+\int_0^t b(v,w(v))\,dw(v)\Bigr)\Bigl[\varphi_0$$
$$+\int_0^t c(u,w(u))\exp\Bigl(-\int_0^u\bigl(a(v,w(v))-\frac{1}{2}b^2(v,w(v))\bigr)\,dv-\int_0^u b(v,w(v))dw(v)\Bigr)\,du\Bigr]. \tag{1.8}$$

Теорема 1.2. *Пусть функции $b(t,x)$, $a(t,x)$ и $c(t,x)$ по x удовлетворяют условиям (b), (ℓ) и (e) соответственно с константами K_t и C_t, ограниченными по t на любом конечном интервале. Тогда функция*

$$g(t,z) := \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{E}_x\bigl\{\varphi(t);\ w(t) < z\bigr\} \tag{1.9}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}g = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}g - b(t,z)\frac{\partial}{\partial z}g + \bigl(a(t,z) - \frac{\partial}{\partial z}b(t,z)\bigr)g + c(t,z)\frac{e^{-(z-x)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}, \tag{1.10}$$

$$g(+0,z) = \varphi_0\,\delta_x(z). \tag{1.11}$$

Доказательство. Воспользуемся подходом, предложенным для доказательства подобного результата в [5]. Положим

$$u(t,z) := \mathbf{E}_x\bigl\{\varphi(t) \mid w(t) = z\bigr\}. \tag{1.12}$$

Ввиду равенства

$$g(t,z) = u(t,z)\frac{e^{-(z-x)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}} \tag{1.13}$$

достаточно выяснить, какой задаче удовлетворяет функция $u(t,z)$.

Рассмотрим процесс $w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, подчиненный условию $w(t) = z$. Такой процесс называется броуновским мостом. Обозначим его $w_{t,z}(s)$. Несложно убедиться (см., например, §11, [6]), что для процесса $w_{t,z}(s)$ справедливо представление

$$w_{t,z}(s) = w(s) - \frac{s}{t}(w(t) - z), \quad s \in [0,1]. \tag{1.14}$$

Известно также, что процесс $w_{t,z}(s)$, $s \in [0,t]$ не зависит от величины $w(t)$.

Для любого фиксированного y определим семейство функций $V_t(s,y)$, $s \in [0,t]$, зависящее кроме y и от параметра t. При s изменяющемся внутри промежутка $[0,t]$ функция $V_t(s,y)$ является решением следующего стохастического уравнения

$$\begin{aligned} dV_t(s,y) &= a\bigl(s, w(s) - \tfrac{s}{t}(y-z)\bigr)V_t(s,y)ds \\ &\quad + b\bigl(s, w(s) - \tfrac{s}{t}(y-z)\bigr)V_t(s,y)\bigl(dw(s) - \tfrac{ds}{t}(y-z)\bigr) \\ &\quad + c\bigl(s, w(s) - \tfrac{s}{t}(y-z)\bigr)ds \end{aligned} \tag{1.15}$$

с начальным значением $V_t(0, y) = \varphi_0$. Принимая во внимание (1.14) и (1.7), легко убедиться, что

$$u(t, z) = \mathbf{E}_x V_t(t, w(t)). \tag{1.16}$$

Вычислим стохастический дифференциал $dV_t(t, w(t))$ по переменной t, которая тремя способами входит в функцию V. Нам понадобится следующий аналог формулы Ито.

Лемма 1.1. *Пусть для любого фиксированного y процесс $\xi(t, y)$, $t \geqslant 0$ имеет стохастический дифференциал*

$$d\xi(t, y) = f(t, y)dt + \sigma(t, y)dw(t),$$

где функции $f(t, y)$ и $\sigma(t, y)$ по y удовлетворяют условию (e) с константами K_t и C_t, ограниченными по t на любом конечном интервале. Тогда

$$\begin{aligned} d\xi(t, w(t)) = f(t, w(t))dt + \sigma(t, w(t))\, dw(t) + \frac{\partial}{\partial y}\xi(t, w(t))\, dw(t) \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\xi(t, w(t))\, dt + \frac{\partial}{\partial y}\sigma(t, w(t))\, dt. \end{aligned}$$

Основной особенностью здесь является то, что последнее слагаемое появляется благодаря смешанной производной $\frac{\partial}{\partial y} d_t\xi(t, w(t))$ домноженной на $dw(t)$, где d_t обозначает дифференциал по первому аргументу процесса ξ.

Стохастический дифференциал $dV_t(t, y)$ по переменной t имеет вид

$$\begin{aligned} dV_t(t, y) &= a(t, w(t) - y + z)V_t(t, y)dt \\ &\quad + b(t, w(t) - y + z)V_t(t, y)\big(dw(t) - \tfrac{dt}{t}(y - z)\big) \\ &\quad + c(t, w(t) - y + z)dt - \tfrac{y-z}{t}\frac{\partial}{\partial y}V_t(t, y)\, dt. \end{aligned}$$

Здесь последнее слагаемое появляется благодаря производной по t, входящей в индекс функции V_t. При вычислении этой производной нужно учесть, что индексная переменная t входит в функцию V через отношение $\frac{y-z}{t}$. В силу этого производная по t может быть выражена через частную производную по y. Кроме того заметим, что переменные y и z входят в V антисимметричным образом, поэтому $\frac{\partial}{\partial y}V = -\frac{\partial}{\partial z}V$, а $\frac{\partial^2}{\partial y^2}V = \frac{\partial^2}{\partial z^2}V$. Применяя теперь лемму 1.1, получим

$$\begin{aligned} dV_t(t,w(t)) &= a(t,z)V_t(t,w(t))dt + b(t,z)V_t(t,w(t))\big(dw(t) \\ &- \tfrac{dt}{t}(w(t)-z)\big) + c(t,z)dt + \tfrac{w(t)-z}{t}\,\frac{\partial}{\partial z}V_t(t,w(t))dt \\ &- \frac{\partial}{\partial z}V_t(t,w(t))dw(t) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}V_t(t,w(t))dt \\ &- \frac{\partial}{\partial z}b(t,z)V_t(t,w(t))dt - b(t,z)\frac{\partial}{\partial z}V_t(t,w(t))dt. \end{aligned} \tag{1.17}$$

В силу независимости величины $w(t)$ от процесса $w_{t,z}(s)$, $s \in [0,t]$, имеем, что $w(t)$ не зависит от величины $V_t(t,w(t))$, которая согласно (1.15) полностью определяется по траекториям процесса $w_{t,z}(s)$. Вычисляя от обеих частей (1.17) математическое ожидание, получаем

$$\begin{aligned} d\mathbf{E}_x V_t(t,w(t)) &= a(t,z)\,\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt - \tfrac{\mathbf{E}_x w(t)-z}{t} b(t,z)\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt \\ &+c(t,z)\,dt + \tfrac{\mathbf{E}_x w(t)-z}{t}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt \\ &-\frac{\partial}{\partial z}\,b(t,z)\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt - b(t,z)\frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{E}_x V_t(t,w(t))\,dt. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду (1.16) и очевидного факта $\mathbf{E}_x\, w(t) = x$, следует, что функция $u(t,z)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}u &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,u - \big(\tfrac{z-x}{t} + b(t,z)\big)\,\frac{\partial}{\partial z}\,u \\ &\quad + \big(a(t,z) - \frac{\partial}{\partial z}b(t,z) + \tfrac{z-x}{t}\,b(t,z)\big)u + c(t,z), \end{aligned} \tag{1.18}$$

$$u(0,z) = \varphi_0. \tag{1.19}$$

Граничное условие непосредственно следует из определения функции $u(t,z)$ и граничного условия в задаче (1.7). Задача (1.18) и (1.19) при замене (1.13) переходит в задачу (1.10), (1.11). Теорема доказана.

Аналогом теоремы 1.2 для дифференцирования по началу траетории броуновского процесса служит следующий результат.

Теорема 1.3. *Пусть функции $b(t,x)$ и $a(t,x)$ по x удовлетворяют условиям (b) и (ℓ) соответственно, а функции $c(t,x)$, $F(t,x)$ по x*

удовлетворяют условию (е) с константами K_t и C_t, ограниченными по t на любом конечном интервале. Тогда функция

$$m(t,x) := \mathbf{E}_x\Big\{F(w(t))\exp\Big(\int_0^t a(t-v,w(v))dv + \int_0^t b(t-v,w(v))\,dw(v)\Big)$$
$$+\int_0^t c(t-u,w(u))\exp\Big(\int_0^u a(t-v,w(v))\,dv + \int_0^u b(t-v,w(v))\,dw(v)\Big)\,du\Big\} \tag{1.20}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}m = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}m + b(t,x)\frac{\partial}{\partial x}m + \big(a(t,x)+\frac{1}{2}b^2(t,x)\big)m + c(t,x), \tag{1.21}$$
$$m(+0,x) = F(x). \tag{1.22}$$

Для доказательства этого результата можно применить классический подход, описанный, например, в §13.2 из [7]. Мы не будем приводить здесь доказательства, поскольку аналогичным методом докажем в следующем пункте более общий результат.

2. Анализ доказательства теоремы 1.2 показывает, что самым существенным для получения такого типа результатов является лишь то, что функция $\varphi(t)$ есть решение линейного дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят от значений броуновского процесса в данный момент времени. Так можно, например, взять функцию φ, зависящую еще от переменной q и являющуюся решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,q) = \sigma(t,w(t),q)\,\frac{\partial^2}{\partial q^2}\varphi(t,q) + \mu(t,w(t),q)\frac{\partial}{\partial q}\varphi(t,q)$$
$$+\, a(t,w(t),q)\varphi(t,q) + c(t,w(t),q), \tag{2.1}$$
$$\varphi(0,q) = F(q). \tag{2.2}$$

Уравнение (2.1) является неоднородным уравнением теплопроводности с коэффициентами, зависящими от случая посредством $w(t)$. Вместо (2.1) можно рассматривать и другие уравнения в частных производных с коэффициентами, зависящими от значений броуновского процесса в данный момент времени. Повторяя ход доказательства теоремы 1.2, можно получить, что функция

$$u(t,z,q) = \mathbf{E}_x\{\varphi(t,q)\mid w(t)=z\} \tag{2.3}$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z}u - \frac{z-x}{t}\frac{\partial}{\partial z}u + \sigma(t,z,q)\frac{\partial^2}{\partial q^2}u$$
$$+ \mu(t,z,q)\frac{\partial}{\partial q}u + a(t,z,q)u + c(t,z,q) \qquad (2.4)$$
$$u(0,z,q) = F(q). \qquad (2.5)$$

Рассмотрим любопытный пример применения этого результата. Для частного случая уравнения (2.1) вида

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t,q) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}\varphi(t,q) - \frac{q-p}{t}\frac{\partial}{\partial q}\varphi(t,q)$$
$$+ a(t,w(t),q)\,\varphi(t,q), \qquad \varphi(0,q) = 1, \qquad (2.6)$$

где p – некоторый параметр, согласно (1.18), (1.12) и (1.8) для функции $\varphi(t,q)$ имеется вероятностное представление

$$\varphi(t,q) = \widetilde{\mathbf{E}}_p\Big\{\exp\Big(\int_0^t a\big(v,w(v),\widetilde{w}(v)\big)\,dv\Big) \mid \widetilde{w}\,(t) = q\Big\},$$

где $\widetilde{w}(s)$ – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса $w(s)$, а $\widetilde{\mathbf{E}}_p$ – математическое ожидание по $\widetilde{w}$ при условии $\widetilde{w}(0) = p$. В силу (2.3) – (2.5) функция

$$u(t,z,q) = \mathbf{E}_x\{\varphi(t,q) \mid w(t) = z\}$$

$$= \mathbf{E}_{x,p}\Big\{\exp\Big(\int_0^t a\big(v,w(v),\widetilde{w}\,(v)\big)\,dv\Big) \mid w(t) = z,\ \widetilde{w}\,(t) = q\Big\}, \qquad (2.7)$$

где $\mathbf{E}_{x,p}$ обозначает математическое ожидание по процессам w, $\widetilde{w}$ с начальными значениями x и p соответственно, является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}u + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}u - \frac{z-x}{t}\frac{\partial}{\partial z}u - \frac{q-p}{t}\frac{\partial}{\partial q}u + a(t,z,q)u, \qquad (2.8)$$
$$u(0,z,q) = 1. \qquad (2.9)$$

Этот результат представляет собой вариант теоремы 1.2 для двумерного броуновского процесса $(w(t),\widetilde{w}\,(t))$. Результаты типа теорем 1.2 и 1.3 для многомерных броуновских движений можно получать прямыми методами полностью аналогичными методам используемым для одномерного движения.

Рассмотрим еще одно направление, в котором можно обобщать уравнение (1.7) так, чтобы был справедлив аналог теоремы 1.2. Оно связано с многомерной линейной системой стохастических дифференциальных уравнений, коэффициенты которой и стохастический дифференциал определяются по одномерному процессу броуновского движения $w(t)$, $t \geqslant 0$.

Пусть $\vec{\varphi}(t)$ – решение n-мерной системы линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\vec{\varphi}(t) &= \mathbb{A}(t, w(t))\,\vec{\varphi}(t)dt + \mathbb{B}(t, w(t))\,\vec{\varphi}(t)dw(t) \\ &+\vec{c}(t, w(t))dt, \qquad \vec{\varphi}_0(0) = \vec{\varphi}_0, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где $\mathbb{A}(t,y) = \|a_{k,l}(t,y)\|_{k,l=1}^n$, $\mathbb{B}(t,y) = \|b_{k,l}(t,y)\|_{k,l=1}^n$ – матрицы коэффициентов, а $\vec{c}(t,y)$ – n-мерный вектор свободных коэффициентов. Полностью аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.2 устанавливается следующий векторный аналог этого утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть функции $b_{k,l}(t,x)$, $a_{k,l}(t,x)$ и $c_k(t,x)$, $k = 1,2,\dots,n$, $l = 1,2,\dots,n$, по x удовлетворяют условиям (b), (ℓ) и (e) соответственно с константами K_t и C_t, ограниченными по t на любом конечном интервале. Тогда функция*

$$\vec{g}(t,z) := \frac{\partial}{\partial z}\,\mathbf{E}_x\bigl\{\vec{\varphi}(t);\ w(t) < z\bigr\} \tag{2.11}$$

является решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\vec{g}(t,z) &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\vec{g}(t,z) - \mathbb{B}(t,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\vec{g}(t,z) \\ &+ \Bigl(\mathbb{A}(t,z) - \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{B}(t,z)\Bigr)\vec{g}(t,z) + \vec{c}(t,z)\frac{e^{-(z-x)^2/2t}}{\sqrt{2\pi t}}, \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$\vec{g}(0,z) = \vec{\varphi}_0\,\delta_x(z). \tag{2.13}$$

Векторный аналог теоремы 1.3 имеет более оригинальную формулировку. Рассмотрим однородную n-мерную систему линейных стохастических дифференциальных уравнений

$$d\vec{\varphi}(s) = \mathbb{A}(t-s, w(s))\,\vec{\varphi}(s)\,ds + \mathbb{B}(t-s, w(s))\,\vec{\varphi}(s)\,dw(s), \tag{2.14}$$

при $0 < s < t$.

Пусть $\vec{\varphi}_l(s)$, $l = 1, 2, \dots, n$, – произвольные линейно независимые решения этой системы. Образуем матрицу решений $\mathbb{P}(s) = (\vec{\varphi}_1(s), \vec{\varphi}_2(s), \dots, \vec{\varphi}_n(s)) = \|\varphi_{l,k}(s)\|_{l,k=1}^n$. Тогда уравнение (2.14) можно записать в матричной форме

$$d\mathbb{P}(s) = \mathbb{A}(t-s, w(s))\mathbb{P}(s)\,ds + \mathbb{B}(t-s, w(s))\mathbb{P}(s)\,dw(s). \qquad (2.15)$$

Пусть символ $\top$ обозначает транспонирование матрицы. Пусть $\vec{F}(x)$, $\vec{c}(t,x)$ – векторнозначные функции с координатами $f_k(x)$ и $c_k(t,x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, соответственно.

Теорема 2.2. *Пусть функции $b_{k,l}(t,x)$ и $a_{k,l}(t,x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $l = 1, 2, \dots, n$, по x удовлетворяют условиям (b) и (ℓ) соответственно, а функции $f_k(x)$ и $c_k(t,x)$, $k = 1, 2, \dots, n$, по x удовлетворяют условию (e) с константами K_t и C_t, ограниченными по t на любом конечном интервале. Тогда функция $\vec{m}(t,x)$, определяемая равенством*

$$\mathbb{P}^\top(0)\vec{m}(t,x) = \mathbf{E}_x\left\{\mathbb{P}^\top(t)\,\vec{F}(w(t)) + \int\limits_0^t \mathbb{P}^\top(v)\vec{c}(t-v, w(v))\,dv\right\}, \qquad (2.16)$$

является решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{m}(t,x) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{m}(t,x) + \mathbb{B}^\top(t,x)\frac{\partial}{\partial x}\vec{m}(t,x) + \mathbb{A}^\top(t,x)\,\vec{m}(t,x) + \vec{c}(t,x), \qquad (2.17)$$

$$\vec{m}(0,x) = \vec{F}(x). \qquad (2.18)$$

Доказательство. Определим процесс $\vec{\xi}(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$, равенством

$$\vec{\xi}(s) = \mathbb{P}^\top(s)\,\vec{m}(t-s, w(s)) + \int\limits_0^s \mathbb{P}^\top(v)\,\vec{c}(t-v, w(v))\,dv,$$

где функция $\vec{m}(t,x)$ является решением задачи (2.17), (2.18). Протранспонировав матричное уравнение (2.15), получим

$$d\mathbb{P}^\top(s) = \mathbb{P}^\top(s)\,\mathbb{A}^\top(t-s, w(s))\,ds + \mathbb{P}^\top(s)\,\mathbb{B}^\top(t-s, w(s))\,dw(s).$$

Тогда для стохастического дифференциала $d\vec{\xi}(s)$ с учетом (2.17) имеем

$$\begin{aligned} d\vec{\xi}(s) &= \mathbb{P}^{\top}(s)\Big[\mathbb{A}^{\top}(t-s,w(s))\vec{m}\,(t-s,w(s))\,ds \\ &\quad + \mathbb{B}^{\top}(t-s,w(s))\,\vec{m}\,(t-s,w(s))\,dw(s) - \frac{\partial}{\partial t}\,\vec{m}\,(t-s,w(s))\,ds \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x}\,\vec{m}\,(t-s,w(s))\,dw(s) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{m}\,(t-s,w(s))\,ds \\ &\quad + \mathbb{B}^{\top}(t-s,w(s))\,\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{m}\,(t-s,w(s))\,ds + \vec{c}(t-s,w(s))\,ds\Big] \\ &= \mathbb{P}^{\top}(s)\Big[\frac{\partial}{\partial x}\,\vec{m}\,(t-s,w(s)) + \mathbb{B}^{\top}(t-s,w(s))\,\vec{m}\,(t-s,w(s))\Big]\,dw(s). \end{aligned}$$

Следовательно, процесс $\vec{\xi}(s)$ является мартингалом, и $\mathbf{E}_x\,\vec{\xi}(t) = \mathbf{E}_x\,\vec{\xi}(0)$. Это равенство влечет утверждение теоремы, поскольку $\mathbf{E}_x\vec{\xi}(t)$ равно правой части (2.16), а $\mathbf{E}_x\,\vec{\xi}(0) = \mathbb{P}^{\top}(0)\,\vec{m}\,(t,x)$.

Приведем следующий пример применения теоремы 2.2. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2}{ds}\,\psi(s) = c(w(s))\,\psi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{2.19}$$

Существует (см., например, §13.2 из [7]) вероятностное представление для решений таких уравнений. Пусть $\widetilde{w}\,(s)$ – процесс броуновского движения, не зависящий от процесса $w(s)$, как и в предыдущем примере. Смысл символов $\widetilde{\mathbf{E}}_p$ и $\mathbf{E}_{x,p}$ тоже остается в силе. Тогда функции

$$\psi_1(s) = \widetilde{\mathbf{E}}_s\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^H c(w(\widetilde{w}(v)))\,dv\Big);\ \widetilde{w}\,(H) = 1\Big\},$$

$$\psi_2(s) = \widetilde{\mathbf{E}}_s\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^H c(w(\widetilde{w}(v)))\,dv\Big);\ \widetilde{w}\,(H) = 0\Big\},$$

где $H = \min\{v : \widetilde{w}\,(v) \notin (0,1)\}$, являются линейно независимыми решениями (2.19) с граничными условиями $\psi_1(0) = \psi_2(1) = 0$, $\psi_1(1) = \psi_2(0) = 1$. Обозначим $\varphi(s) = \frac{d}{ds}\psi(s)$. Тогда (2.19) можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{ds}\,\psi(s) = \varphi(s), \\ & && 0 \leqslant s \leqslant t. \\ &\frac{d}{ds}\,\varphi(s) = 2c(w(s))\,\psi(s), \end{aligned}$$

Двумерные функции $(\psi_1(s), \varphi_1(s))$ и $(\psi_2(s), \varphi_2(s))$ будут линейно независимыми решениями этой системы.

Воспользуемся теоремой 2.2 для функций $\vec{F}\,(x) = (1, 0)$. Тогда получим, что функции $m_1(t, x)$ и $m_2(t, x)$, определяемые из равенств

$$\psi_1'(0)\, m_1(t,x) = \mathbf{E}_{x,t}\biggl\{ \exp\biggl(-\int\limits_0^H c(w(\widetilde{w}(v)))\,dv \biggr); \widetilde{w}(H) = 1 \biggr\},$$

$$m_1(t,x) + \psi_2'(0)\, m_2(t,x) = \mathbf{E}_{x,t}\biggl\{ \exp\biggl(-\int\limits_0^H c(w(\widetilde{w}(v)))\,dv \biggr); \widetilde{w}(H) = 0 \biggr\},$$

являются при $t \in [0, 1]$, $x \in R^1$ решением задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\, m_1(t,x) &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, m_1(t,x) + 2c(x)\, m_2(t,x), \qquad && m_1(0,x) = 1, \\ \frac{\partial}{\partial t}\, m_2(t,x) &= \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, m_2(t,x) + m_1(t,x), && m_2(0,x) = 0. \end{aligned}$$

Литература

1. M. Kac, *On distribution of certain Wiener functionals.* — Trans. Am. Math. Soc. **65** (1949), 1–13.
2. M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
3. A. N. Kolmogorov, *Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* — Mathemat. Ann. **104** (1931), 415–458, русский перевод: УМН, V (1938), c. 5–41.
4. А. В. Скороход, Н. П. Слободенюк, *Предельные теоремы для случайных блужданий.* Наукова думка, Киев (1970).
5. А. Н. Бородин, *Распределение интегральных функционалов от процесса броуновского движения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **119** (1982), 19–38.
6. П. Биллингсли, *Сходимость вероятностных мер.* Наука, Москва (1977).
7. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов.* Наука, Москва (1975).

Borodin A. N. Versions of the Feynman–Kac formula.

Some new versions of the Feynman-Kac formula for Brownian motion are considered. An intersting generalization of the formula is connected with the solutions of systems of linear differential equations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 27 ноября 1997 г.