М. И. Гордин

ДВОЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕМЕШИВЮЩИХ ФИЛЬТРАЦИЙ

Пусть $T\colon X \to X$ – автоморфизм (обратимое измеримое сохраняющее меру преобразование) вероятностного пространства $(X, \mathcal{F}, \mu)$ и пусть, кроме того, в пространстве $L_2(X) = L_2(X, \mathcal{F}, P)$ действует пара μ-симметрических марковских генераторов A_u и A_s, которые являются "собственными векторами" автоморфизма T с собственными значениями $\theta_u > 1$ и $\theta_s < 1$. Для соответствующих марковских процессов $(X, \mathcal{F}, \mu)$ является пространством состояний со стационарной вероятностным распределением. При помощи вероятностной меры в пространстве реализаций этих процессов мы строим, обобщая [2], расширение исходного автоморфизма. В предположении перестановочности операторов A_u и A_s и изолированности точки 0 спектра оператора $A_u + A_s$ мы показываем, что естественным образом связанные с этим расширением возрастающая и убывающая фильтрации обладают свойством весьма быстрого стремления к 0 максимального коэффициента корреляции между составляющими эти фильтрации σ-алгебрами. В качестве примера рассмотрены гиперболические автоморфизмы торов. Указаны применения к предельным теоремам.

Введение

Пусть $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ – вероятностное пространство и $T\colon X \to X$ – его автоморфизм (измеримое преобразование, сохраняющее меру μ). Предположим, что на том же вероятностном пространстве определена марковская полугруппа $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$, симметричная относительно μ. Иначе говоря, для каждого $t \geqslant 0$ $\mathbf{P}_t$ – сохраняющий положительность самосопряженный оператор нормы 1 в

Работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант 96-01-00672), INTAS-РФФИ (грант 95-418) и гранта ведущих научных школ No. 96-15-96199.

$L_2 = L_2(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, такой, что $\mathbf{P}_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, и семейство $(\mathbf{P}_t)_{t \geqslant 0}$ образует сильно непрерывную в L_2 полугруппу. Заметим, что тогда $\mathbf{P}_t$ сохраняет интеграл по мере μ и действует с нормой 1 в каждом из пространств $L_p(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Генератор A марковской полугруппы $\mathbf{P}_t = \exp(-At)$, (или, более коротко, марковский генератор) является тогда самосопряженным оператором в L_2 с плотной в L_2 областью определения $\mathcal{D}(A)$.

В настоящей работе два таких генератора, определенным образом связанных с T и между собой, используются, чтобы построить по ним некоторое расширение исходного вероятностного пространства, являющееся пространствам реализаций случайного процесса, обладающего свойством быстрого убывания зависимости. Эта конструкция, близкая к использованной в [2], кратко описывается в разделе 1 работы. В разделе 2 при дополнительных предположениях показано, что системы σ-алгебр "прошлого" и "будущего" процесса, введенного в разделе 1, обладают некоторым свойством асимптотической независимости. В разделе 3 рассматриваются в качестве примера гиперболические автоморфизмы торов. Для них приводится конструкция пары марковских генераторов, основанная на гомоклинических трансляциях. Эти генераторы являются обобщением гомоклинического лапласиана из [5]. Наконец, в разделе 4 указываются применения к предельным теоремам для стационарных последовательностей, порожденных динамической системой в ситуации, описанной в разделе 2. В целом работа развивает подход, примененный в [2], где рассматривалась ситуация, когда имеется только один генератор, и не обсуждались свойства перемешивания. В [2] могут быть также найдены некоторые дополнительные комментарии, в частности, обсуждение связи с введенным Я. Г. Синаем понятием трансверсального потока.

1. Построение расширения

Обозначим через U_T унитарный оператор, порожденный в L_2 автоморфизмом T $(U_T f = f \circ T)$.

Определение [2]. *Пусть $\theta \in \mathbb{R}^+$. Марковский генератор A называется θ-коммутирующим с T, если имеет место соотношение*

$$A U_T = \theta U_T A. \tag{1.1}$$

Эквивалентное (1.1) условие в терминах исходной полугруппы выглядит как

$$\mathbf{P}_t\, U_T = U_T\, \mathbf{P}_{\theta t}, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \tag{1.2}$$

Мы будем предполагать, что в L_2 действуют две марковские полугруппы $(\mathbf{P}_t^u)_{t\geqslant 0}$ и $(\mathbf{P}_t^s)_{t\geqslant 0}$ с генераторами A_u и A_s (от английских слов “unstable” и “ stable”), которые, соответственно, θ_u- и θ_s-коммутируют с T, причем $\theta_u \in (1,\infty)$ и $\theta_s \in (0,1)$.

Модифицируя конструкцию из [2], мы сейчас построим некоторое расширение динамической системы $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu,T)$, т.е. такие систему $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu},\overline{T})$ и сохраняющее меру отображение $\pi\colon \overline{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, что

$$\pi \circ \overline{T} = T \circ \pi. \tag{1.3}$$

При этом $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ строится как множество реализаций некоторого неоднородного по времени марковского процесса ξ, а отображение π сопоставляет реализации $\xi(\cdot)$ ее значение $\xi(0)$.

Рассмотрим определенный на $(-\infty,\infty)$ неоднородный марковский процесс (ξ_t) с генераторами A_u на $(-\infty,0]$ и A_s на $[0,\infty)$ и стационарным распределением μ. Под пространством $\overline{\mathcal{X}}$ реализаций этого процесса мы будем понимать пространство $\mathcal{X}^{(-\infty,\infty)}$ функций $\omega : (-\infty,\infty) \mapsto \mathcal{X}$. Мы снабдим $\overline{\mathcal{X}}$ σ-алгеброй $\overline{\mathcal{F}}$, порожденной цилиндрическими множествами, и вероятностной мерой $\overline{\mu}$, конечномерные распределения которой задаются обычным образом по стационарному распределению μ и полугруппам $(\mathbf{P}_t^u)_{t\geqslant 0}$ и $(\mathbf{P}_t^s)_{t\geqslant 0}$, управляющим процессом на интервалах $(-\infty,0]$ и $[0,\infty)$, соответственно.

Введем теперь измеримое сохраняющее меру отображение $\pi\colon \overline{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$, положив $\pi(\omega) = \omega(0)$, и определим в $\overline{\mathcal{X}}$ преобразование $\overline{T}$ соотношением

$$(\overline{T}\omega)(t) = \begin{cases} T\big(\omega(\theta_u^{-1}t)\big), & \text{для } t \leqslant 0,\\ T\big(\omega(\theta_s^{-1}t)\big), & \text{для } t \geqslant 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Очевидно, что $\overline{T}$ измеримо и что $\pi \circ \overline{T} = T \circ \pi$. Рассуждая так же как в [2], нетрудно проверить, что $\overline{T}$ является автоморфизмом пространства $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$.

2. Фильтрации в расширении и их свойства

В пространстве $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$, построенном в разделе 1, имеется естественная возрастающая фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}_t^u\}_{t\leqslant 0}$, в которой $\overline{\mathcal{F}}_t^u$ –

σ-алгебра, порожденная процессом $(\xi(\tau))$ на $(-\infty,t]$. Как следует из соотношения (1.4), определяющего $\overline{T}$,

$$\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}^u_t)=\overline{\mathcal{F}}^u_{\theta_u^{-1}t}.$$

В $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ имеется также естественная убывающая фильтрация $\{\overline{\mathcal{F}}^s_t\}_{t\geqslant 0}$, в которой $\overline{\mathcal{F}}^s_t$ – σ-алгебра, порожденая процессом $(\xi(\tau))$ на $[t,\infty)$. Из соотношения (1.4) на этот раз следует, что

$$\overline{T}^{-1}(\overline{\mathcal{F}}_t)=\overline{\mathcal{F}}_{\theta_s^{-1}t}.$$

Начиная отсюда, мы будем считать, что $\theta_s^{-1}=\theta_u=\theta$ для некоторого $\theta>1$. Положим

$$\mathcal{F}_n=\mathcal{F}^u_{-\theta^{-n}},\mathcal{F}^n=\mathcal{F}^s_{\theta^n}.$$

Тогда мы имеем

$$\overline{T}^{\,-1}(\mathcal{F}_n)=\mathcal{F}_{n+1}\supseteq\mathcal{F}_n,\overline{T}^{\,-1}(\mathcal{F}^n)=\mathcal{F}^{n+1}\subseteq\mathcal{F}^n.$$

Обозначим через E_n и E^n операторы условного математического ожидания относительно σ-алгебр $\mathcal{F}_n$ и $\mathcal{F}^n$, соответственно, и через E оператор безусловного математического ожидания. Далее, для произвольного оператора S на пространстве измеримых функций обозначим через $|S|_{p,q}$ его норму как оператора из L_p в L_q для некоторых $p,q\in[1,\infty]$. Мы будем использовать одни и те же стандартные обозначения $|\cdot|_p$ для L_p-норм и $(\cdot,\cdot)$ для скалярных произведений относительно обоих пространств $(\mathcal{X},\mathcal{F},\mu)$ и $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$. Из сильной непрерывности полугрупп $\{P_s(t)\},\{P_u(t)\}$ следует, что

$$\bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}_n\supseteq\pi^{-1}(\mathcal{F}),\qquad\bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}^n\supseteq\pi^{-1}(\mathcal{F}).$$

Обозначим через $\overline{L_2}$ пространство квадратично суммируемых на $(\overline{\mathcal{X}},\overline{\mathcal{F}},\overline{\mu})$ функций, а через $L_2^0\subset L_2$ и $\overline{L_2}^{\;0}\subset\overline{L_2}$ подпространства, состоящие из всех функций с нулевыми интегралами.

Предложение 2.1. *Предположим, что A_s и A_u коммутируют и что для подходящей постоянной $c>0$ и некоторого подпространства $\mathcal{D}$ пространства L_2 такого, что $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{D}(A_u)\cap\mathcal{D}(A_s)$ и $\mathcal{D}$ плотно в L_2^0, для всех $f\in\mathcal{D}$ выполняется неравенство*

$$(A_sf+A_uf,f)\geqslant c(f,f).$$

Тогда для всех $n \geqslant 0$

$$|E^n E_{-n} - E|_{2,2} \leqslant \exp{(-c\theta^n)}.$$

и

$$|E_{-n} E^n - E|_{2,2} \leqslant \exp{(-c\theta^n)}.$$

Доказательство. Ограничимся доказательством первого из неравенств, поскольку второе выводится из него посредством сопряжения рассматриваемых операторов. Именно, покажем, что для всякой $g \in \overline{L_2}^{\,0}$, измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{-n} = \mathcal{F}^u_{-\theta^n}$, выполняется неравенство

$$|E^n g|_2 \leqslant \exp{(-c\theta^n)}|g|_2.$$

Ввиду того, что $E^n g = E^n E(g|\xi(\tau), \tau \geqslant -\theta^n)$, и поскольку в силу марковского свойства случайная величина $E^n E(g|\xi(\tau), \tau \geqslant -\theta^n)$ является $\xi_{-\theta^n}$-измеримой, достаточно доказать последнее неравенство для функций вида $g = f(\xi_{-\theta^n})$, где $f \in L_2^0$. Для таких g $E(g|\xi(0)) = (\mathbf{P}^u_{\theta^n} f)(\xi(0))$ и поэтому

$$|E^n g|_2 = |E^{\theta^n} g|_2 = |E^{\theta^n} E(g|\xi(0))|_2 == |\mathbf{P}^s_{\theta^n}\mathbf{P}^u_{\theta^n} f|_2 =$$

$$= |\exp{(-\theta^n(A_u + A_s))} f|_2 \leqslant \exp{(-c\theta^n)}|f|_2 = \exp{(-c\theta^n)}|g|_2.$$

Предложение доказано.

Следствие 2.2. *Пусть* $f \in L_2^0$ *такова, что*

$$\sum_{k \geqslant 0} \big((|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\big) < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{k \geqslant 0} \big(|E_{-k}\overline{f}|_2 + |\overline{f} - E_k \overline{f}|_2\big) < \infty,$$

где $\overline{f} = f \circ \pi$.

Доказательство. Поскольку $E_k \overline{f} = (\mathbf{P}_u(\theta^{-k}) f(\xi(-\theta^{-k}))$, то

$$\sum_{k \geqslant 0} |\overline{f} - E_k \overline{f}|_2 = \sum_{k \geqslant 0} \big(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k}) f|_2^2\big)^{1/2} < \infty,$$

и нам достаточно доказать, что

$$\sum_{k \geqslant 0} |E_{-k}\overline{f}|_2 < \infty.$$

Последнее же неравенство следует из оценок

$$\sum_{k\geqslant 0}|E_{-k}\overline{f}|_2 \leqslant \sum_{k\geqslant 0}(|E_{-k}E^k\overline{f}|_2 + |\overline{f} - E^k\overline{f}|_2)$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 0}\bigl(|E^{-k}E_k - E|_{2,2}|f|_2 + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\bigr)$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 0}\bigl(\exp\left(-c\theta^n\right)|f|_2 + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\bigr) < \infty.$$

Следствие 2.3. *В предположениях Предложения* 2.1 T *является* K*-автоморфизмом пространства* $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$.

Доказательство. Напомним, что автоморфизм T пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ называется K-автоморфизмом [5], если существует такая σ-алгебра $\mathcal{F}^0 \subset \mathcal{F}$, что

$$T^{-1}(\mathcal{F}^0) \subset \mathcal{F}^0, \quad \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \mathcal{F}, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n(\mathcal{F}^0) = \mathcal{N},$$

где $\mathcal{N}$ – тривиальная σ-алгебра пространства $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$. Далее, хорошо известно, что фактор-автоморфизм K-автоморфизма - K-автоморфизм. Положим $\mathcal{F}^s = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}}\mathcal{F}^n$. Поскольку $\pi^{-1}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{F}^s$, то T является фактором автоморфизма $T^{(s)}$, соответствующего $\overline{T}$-инвариантной подалгебре $\mathcal{F}^s$. K-свойство автоморфизма $T^{(s)} = \overline{T}|_{\mathcal{F}^s}$ будет установлено, если показать, что $E^n \to E$ в сильной операторной топологии при $n \to \infty$. Из Предложения 2.1 вытекает,что для любого целого m

$$|E^{2n+m}E_m - E|_{2,2} = |E^nE_{-n} - E|_{2,2} \leqslant \exp\left(-c\theta^n\right)$$

и, следовательно, $E^nf \to Ef$ при $n \to \infty$, если f измерима относительно $\mathcal{F}_m$. Но соотношение

$$\bigvee_{m\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_m \supseteq \pi^{-1}(\mathcal{F})$$

позволяет, выбрав m достаточно большим, сколь угодно точно аппроксимировать $\pi^{-1}(\mathcal{F})$-измеримые функции $\mathcal{F}_m$-измеримыми, что и доказывает утверждение.

Замечание 2.4. В ходе локазательтства Предложения 2.3 было фактически установлено K-свойство автоморфизма $T^{(s)}$.

3. Гиперболические автоморфизмы торов

В этом разделе приводится конструкция пары трансверсальных генераторов для гиперболического автоморфизма тора $\mathbb{T}^d$. Пусть $X = \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ с нормированной мерой Хаара μ и пусть $T : \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ - алгебраический автоморфизм $\mathbb{T}^d$ (тогда μ T-инвариантна). T накрывается обратимым линейным отображением $\tilde{T} : \tilde{\mathbb{R}^d} \to \tilde{\mathbb{R}^d}$, переводящим решетку $\mathbb{Z}^d$ на себя. Тогда $pr\,\tilde{T} = T\,pr$, где $pr : \mathbb{R}^d \to \mathbb{T}^d$ – каноническое отображение. Спектр $\mathrm{spec}(\tilde{T})$ оператора $\tilde{T}$ распадается на три части

$$\mathrm{spec}(\tilde{T}) = \sigma_s(\tilde{T}) \cup \sigma_u(\tilde{T}) \cup \sigma_n(\tilde{T}),$$

располагающиеся, соответственно, внутри, снаружи и вне единичной окружности $\{z : |z| = 1\} \subseteq \mathbb{C}$. Положим $r = \max_{\lambda\in\sigma_s} |\lambda|, R = \min_{\lambda\in\sigma_u} |\lambda|, \Lambda = \min(R, r^{-1}) > 1$. Мы предполагаем, что T – гиперболический автоморфизм, т.е. что $\sigma_n(\tilde{T}) = \emptyset$. Разложению спектра $\mathrm{spec}(\tilde{T}) = \sigma_s(\tilde{T}) \cup \sigma_u(\tilde{T})$ соответствует $\tilde{T}$ – инвариантное линейное разложение $\mathbb{R}^d = L_s \bigoplus L_u$. Обозначим через p_s и p_u соответствующие проекторы. Мы начнем с примера, для которого имеются очевидные кандидаты на роль θ-коммутирующих с T марковских генераторов.

Пример 3.1. Рассмотрим случай гиперболического автоморфизма двумерного тора $\mathbb{T}^2$. Здесь $\sigma_s = \{\lambda^{-1}\}$, $\sigma_u = \{\lambda\}$ при некотором λ, $|\lambda| > 1$. Далее, L_s и L_u в этом случае одномерны и параллельно им действуют сохраняющие меру потоки, генераторами которых являются векторные поля D_s и D_u. Поля D_s и D_u удовлетворяют соотношениям

$$D_u\,U_T = \lambda\,U_T\,D_u,\, D_s\,U_T = \lambda^{-1}U_T\,D_s.$$

Положим $A_u = -(D_u)^2$, $A_s = -(D_s)^2$. В этой ситуации (при $\theta = \lambda^2$) выполнены все условия Предложения 2.1. Необходимое свойство полуограниченности вытекает из эллиптичности оператора $-((D_u)^2 + (D_s)^2)$. Вместо применения общей теории здесь проще вычислить спектр рассматриваемого оператора. Собственные функции параметризуются элементами $\mathbb{Z}^2$, при этом соответствующие собственные значения выражаются положительно определенной квадратичной формой на $\mathbb{Z}^2$, откуда и следует нужное нам неравенство. Перестановочность A_s и A_u вытекает из перестановочности потоков с генераторами L_s и L_u.

В случае общего гиперболического автоморфизма нужна более сложная конструкция, дающая вместо пары броуновских движений на торе пару чисто разрывных процессов с независимыми приращениями, принимающими значения в $\mathbb{T}^d$. Пусть $e^l, l = 1, \ldots, d$, – стандартный базис $\mathbb{Z}^d$. Положим $\gamma^l = pr\ p_s e^l$ для $l = 1, \ldots, d$. Заметим, что $\gamma^l = -pr\ p_u e^l$, откуда следует, что для $l = 1, \ldots, d$ $e^l \in pr(L_s) \cap pr(L_u)$, и, следовательно, $T^n e^l \to 0$ экспоненциально быстро при $|n| \to \infty$.

Теперь, обобщая конструкцию из [2], мы введем пару марковских генераторов для гиперболического автоморфизма тора. Эта пара удовлетворяет условиям Предложения 3.1 . Зафиксируем некоторое $\theta \in (1, \Lambda)$. Положим

$$(A_s f)(x) = \sum_{k \in Z} \sum_{l=1}^{d} (2f(x) - f(x - T^k \gamma^l) - f(x + T^k \gamma^l))\theta^k,$$

$$(A_u f)(x) = \sum_{k \in Z} \sum_{l=1}^{d} (2f(x) - f(x - T^k \gamma^l) - f(x + T^k \gamma^l))\theta^{-k},$$

где $f \in L_2^0 \cap H^\alpha$, а $\alpha < 1$ удовлетворяет условию $\Lambda^{-\alpha}\theta < 1$ (H^α обозначает здесь пространство функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем α). Ясно, что ряды, определяющие A_u и A_s, сходятся для таких f. Соотношения коммутации с автоморфизмом T легко проверяются непосредственно для функций из описанного класса. Мы хотим установить, что A_u и A_s продолжаются до генераторов марковских полугрупп, удовлетворяющих условиям Предложения 3.1. Ключевым свойством, которое надлежит проверить, является полуограниченность оператора $A_u + A_s$.

Предложение 3.2. *Пусть $\theta \in (1, \Lambda)$, и пусть $\alpha \in (0, 1]$ таково, что $\Lambda^{-\alpha}\theta < 1$. Для введенных только что операторов A_s и A_u при некоторой постоянной $c > 0$ для всех $f \in L_2^0 \cap H^\alpha$ имеет место неравенство*

$$((A_s + A_u)f, f) \geqslant c(f, f)$$

и выполняются остальные условия Предложения 2.1.

Доказательство. Проверим первым делом выполнение неравенства. Пусть Δ – это оператор в L_2, определенный на гельдеровских функциях f выражением

$$(\Delta f)(x) = \sum_{k\in Z}\sum_{l=1}^{d}(2f(x) - f(x - T^k\gamma^l) - f(x + T^k\gamma^l)).$$

Тогда мы имеем для $f \in D$:

$$(A_s f + A_u f, f) = \sum_{k\in Z}\sum_{l=1}^{d}(2f(x) - f(x - T^k\gamma^l) - f(x + T^k\gamma^l), f)(\theta^k + \theta^{-k})$$

$$\geqslant 2(\Delta f, f) \geqslant c(f, f),$$

где последнее неравенство – это установленное в [5] свойство изолированности собственного значения нуль в спектре оператора Δ (отметим другой выбор знака в определении Δ в [5]). Остальные утверждения вытекают из доказанного неравенства. В самом деле, замкнем по Фридрихсу оператор $A_u + A_s$. Тогда операторы A_u и A_s, будучи положительно определенными, тоже могут быть согласованным образом (т.е. с сохранением аддитивных соотношений) замкнуты. Порождаемые ими полугруппы будут марковскими (т.е. сохраняющими положительность и значения постоянных), т.к. они являются пределами полугрупп с ограниченными генераторами, полученными отбрасыванием "бесконечных хвостов" в рядах, представляющих A_u, A_s и $A_u + A_s$. Эти ограниченные генераторы порождают марковские процессы с конечным с вероятностью 1 числом скачков на ограниченном интервале, что делает очевидным марковский характер этих генераторов. Та же аппроксимация доказывает перестановочность (для аппроксимирующих процессов она есть просто следствие коммутативности тора как группы).

Теперь мы приведем условия, обеспечивающие в рассматриваемой в настоящем разделе ситуации выполнение предположений Следствия 2.2.

Замечание 3.3. Пусть $f \in L_2$ удовлетворяет условию $|f(\cdot + r) - f(\cdot)|_2 \leqslant w(|r|)$ для $r \in \mathbb{T}^d$ (где $|r|$ – расстояние от r до 0 в инвариантной римановой метрике на $\mathbb{T}^d$), а непрерывная возрастающая на некотором интервале вида $[0, A)$ функция w такова, что функция $h \mapsto w^2(h^{1/2})$ вогнута и, если N настолько велико, что $\theta^{-N} < A$, то $\sum_{k\geqslant N} w(\theta^{-k}) < \infty$ (примером такой функции на $[0, 1)$

является $h \mapsto 1/(-\log h)^{1+\epsilon}$, где $\epsilon > 0$). Тогда для f выполнены условия Следствия 2.2, касающиеся сходимости рядов.

Доказательство. Установим, например, сходимость ряда

$$\sum_{k \geqslant 0} \big(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2\big)^{1/2}.$$

Заметим, что из вида оператора A_s следует, что $(\xi(\tau), \tau \geqslant 0)$ является безгранично делимым $\mathbb{T}^d$–значным процессом с однородными независмыми приращениями. Далее, он имеет конечные вторые моменты (более точно, его нетрудно представить в виде $\xi(\tau) = \pi(\overline{\xi}(\tau))$, где $\overline{\xi}(\tau))$ – безгранично делимый $\mathbb{R}^d$-значный процесс с однородными независмыми приращениями и конечными вторыми моментами). Поэтому при малых $\tau > 0$ справедлива оценка $E|\xi(\tau) - \xi(0)|^2 \leqslant M\tau$. Учитывая независимость $\xi(0)$ и $\xi(\theta^{-k}) - \xi(0)$ и выбрав N достаточно большим, имеем

$$\sum_{k \geqslant N} \big(|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2\big)^{1/2} = \sum_{k \geqslant N} \big(E(f(\xi(\theta^{-k})) - f(\xi(0)))^2\big)^{1/2} =$$

$$\sum_{k \geqslant N} \big(E(f(\xi(0) + \xi(\theta^{-k}) - \xi(0)) - f(\xi(0)))^2\big)^{1/2} \leqslant$$

$$\sum_{k \geqslant N} \big(Ew^2(|\xi(\theta^{-k}) - \xi(0)|)\big)^{1/2} \leqslant \sum_{k \geqslant N} \big(w^2(E^{1/2}|\xi(\theta^{-k}) - \xi(0)|^2\big)^{1/2} =$$

$$\sum_{k \geqslant N} w(E^{1/2}|\xi(\theta^{-k}) - \xi(0)|^2) \leqslant \sum_{k \geqslant N} w\big(\sqrt{M\theta^{-k}}\big) < \infty.$$

4. Приложение к предельным теоремам

Мы будем считать в этом разделе, что выполнены условия Предложения 2.1.

Предложение 4.1. *Пусть $f \in L_2^0$ такова, что*

$$\sum_{k \geqslant 0} \big((|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\big) < \infty.$$

Тогда $\overline{f} = f \circ \pi$ представима в виде

$$\overline{f} = h + g \circ \overline{T} - g,$$

где $h, g \in L_2(\overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, h *измерима относительно* $\mathcal{F}_0$ *и* $E_{-1}h = 0$.

Доказательство. Согласно Следствию 2.2, в наших предположениях имеют место соотношения

$$\sum_{k \geqslant 0} \big(|E_{-k}\overline{f}|_2 + |\overline{f} - E_k\overline{f}|_2\big) < \infty,$$

а из сходимости указанных рядов следует возможность представить $\overline{f}$ в описанной выше форме [1].

Предложение 4.2. *Пусть в условиях Предложения* 2.1 *для функции* $f \in L_2^0$, *выполнено соотношение*

$$\sum_{k \geqslant 0} \big((|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\big) < \infty,$$

Тогда существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k \right|_2^2 = \sigma^2$$

и распределения случайных функций на $[0,1]$, *равных* 0 *в* 0 *и*

$$n^{-1/2} \sum_{k=0}^{m-1} f \circ T^k$$

на интервале $((m-1)/n, m/n]$, $m = 1, ..., n$, *слабо сходятся (в пространстве* $D([0,1])$*) к мере Винера со средним значением* 0 *и дисперсией* σ^2 *в точке* 1.

Доказательство. Как и в [2], вместо последовательности $\{f \circ T^k, k \geqslant 0\}$ будет рассматриваться одинаково с ней распределенная последовательность $\{\overline{f} \circ \overline{T}^k, k \geqslant 0\}$. Из наших предположений следует, что к $\overline{f}$ приложимо Предложение 4.1. Из представления для $\overline{f}$, наличие которого утверждает Предложение 4.1, будет вытекать Предложение 4.2 (см., напр., доказательство теоремы 8.1 гл.4 из [3]), если только мы установим эргодичность последовательности $h \circ T^k, k \in \mathbb{Z}$. Но из Замечания 2.4 следует более сильное, чем эргодичность K-свойство автоморфизма $T^{(s)} = \overline{T}|_{\mathcal{F}^s}$, где $\mathcal{F}^s = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^n$, что и завершает доказательство.

Замечание 4.3. В условиях Предложения 4.2 справедлив также закон повторного логарифма (в обычной форме и в форме Ф. Штрассена).

Литература

1. М. И. Гордин, *О центральной предельной теореме для стационарных процессов.* — Доклады АН СССР **188**, № 1 (1969), 739–741.
2. М. И. Гордин, *Расширения динамических систем и метод мартингальной аппроксимации.* — Зап.научн. семин. ПОМИ **216** (1994), 10–19.
3. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, — Труды МИАН 216 (1994), 10–19, *Предельные теоремы для случайных блужданий.*
4. В. А. Рохлин, *Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой.* — Успехи матем. наук **22**, № 5 (1967), 1–56.
5. M. Gordin, *Homoclinic approach to the central limit theorem for dynamical systems.* — Contemporary Math. **149** (1993), 149–162.

Gordin M. I. Double extensions of dynamical systems and a construction of mixing filtrations.

Let T be an automorphism of a probability space $(X, \mathcal{F}, P)$ and let A_s and A_u be generators of symmetric Markov transition semigroups on X. A_s and A_u are supposed also to be "eigenvectors" for T with eigenvalues θ^{-1} and θ for some $\theta > 1$. We give a probabilistic construction (based on A_s and A_u) of an extension of the quadruple $(X, \mathcal{F}, P, T)$. This extension $(X', \mathcal{F}', P, T')$ is naturally supplied with decreasing and increasing filtrations.

Under the assumptions that A_s and A_u commute and that their sum $A_s + A_u$ is bounded below apart from zero we establish very strong decay to zero of the maximal correlation coefficient between the σ-fields of these filtrations.

As an application we prove the following assertion under the above conjectures. Let $f \in L_2$ has integral 0 with respect to P and be such that

$$\sum_{k\geqslant 0}\left((|f|_2^2 - |\mathbf{P}_s(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2} + (|f|_2^2 - |\mathbf{P}_u(\theta^{-k})f|_2^2)^{1/2}\right) < \infty.$$

Then the sequence $\{f \circ T^k, k \in \mathbb{Z}\}$ satisfies the Functional Central Limit Theorem.

As an example we consider hyperbolic toral automorphisms.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 10 декабря 1997 г.