Н. Л. Горн, М. А. Лифшиц

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫХ СУММ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Введение

В работе [10] рассматривались предельные множества функций, порождаемые выборочными наблюдениями винеровского процесса. Проделав линейную интерполяцию винеровской траектории между моментами наблюдения, произведя обычную для закона повторного логарифма (ЗПЛ) нормировку и линейную замену времени, можно получить семейство случайных элементов пространства $C[0,1]$, которое "сходится" с вероятностью единица к некоторому неслучайному компактному множеству. Этот предельный компакт зависит, вообще говоря, от множества моментов наблюдения и не обязательно совпадает с классическим предельным множеством Штрассена, которое отвечает случаю полностью наблюдаемой винеровской траектории. В общем случае предельное множество будет замкнутым и звездным, но не обязательно выпуклым. (Кстати, именно такая геометрическая структура отвечает осцилляции гауссовских процессов общего вида в бесконечномерном пространстве [4, 9].)

Возникает естественный вопрос – будет ли предельное множество тем же самым, если мы заменим винеровский процесс случайной ломаной, порожденной суммами независимых случайных величин. В [10] дан положительный ответ для случая *одинаково* распределенных слагаемых. Здесь совпадение предельных множеств обеспечивается известной теоремой Майора (см. [8, 11]) о скорости сходимости в сильном принципе инвариантности. Этот результат, разновидность так называемой КМТ-конструкции, дает оценку порядка $o(\sqrt{n})$ для скорости аппроксимации последовательности сумм подходящим винеровским процессом. Такая

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научно-исследовательского общества DFG (гранты 96-01-00672 и 96-01-00096ge).

оценка вполне достаточна для совпадения предельных множеств при любой нормировке, возникающей в нашей задаче.

Казалось бы, случай неодинаково распределенных слагаемых не должен вызывать особых затруднений – стоит лишь заменить конструкцию Майора каким-нибудь подходящим аналогом (см., например, [6, 14]). Эта идея действительно проходит, если, грубо говоря, слагаемые ограничены по вероятности. Однако, если в сумме присутствуют слагаемые существенно различных порядков величины и множество моментов наблюдения является достаточно редким, известные оценки скорости аппроксимации в принципе инвариантности превышают нормировку закона повторного логарифма. В этом случае указанная простая схема не работает.

Один из возможных выходов – следующий. Если последовательность сумм требуется аппроксимировать винеровским процессом только на достаточно редком множестве моментов времени, то можно получить оценки скорости аппроксимации лучшего качества, чем в общем случае. В этом и состоит смысл нашего основного результата (Теорема 3). Используя данную версию принципа инвариантности, мы можем идентифицировать предельные множества в функциональном законе повтороного логарифма и для сумм, содержащих слагаемые разного порядка. Разумеется, это делается при дополнительном предположении, которое обеспечивает выполнение классического закона повторного логарифма. В качестве такого дополнительного предположения мы используем условие В. А. Егорова [1], аналогичное условию Линдеберга в центральной предельной теореме. Интересно отметить, что чуть более общие условия В. В. Петрова [5, 15] в принципе не позволяют получить интересующую нас форму закона повторного логарифма (см. Пример 2 ниже).

В этой статье рассматриваются только суммы величин с конечными вторыми моментами. По поводу ЗПЛ без столь сильных моментных предположений см., например, [12].

Предельные множества интерполированного винеровского процесса

Как обычно, будем обозначать $C[0,1]$ пространство непрерывных функций на отрезке $[0,1]$; $\|\cdot\|$ обозначает супремум-норму в $C[0,1]$, а $|\cdot|_2$ – гильбертову норму ядра винеровской меры (см.

[3]). Выражение $\underbrace{\log\ldots\log}_{n}$ обозначим $\log_n$.

Назовем *подпоследовательностью* произвольное неограниченное замкнутое подмножество $\mathbf{R}_+$. Пусть T – подпоследовательность; тогда для каждого $M > 1$ можно определить индекс плотности T следующим образом [7, 13, 16]. Положим $\tau_0 = 1$ и

$$\tau_{n+1} = \inf\{t \in T \cap [M\tau_n, \infty)\}, \quad n \geqslant 0,$$

а затем

$$\nu(T,t) = \nu(T,t,M) = \sup\{n : \tau_n \leqslant t\}.$$

Далее положим для каждого $t > 0$

$$\mathcal{R}(T,t) = \{s \in [0,1] : st \in T\} \subset [0,1]$$

и введем в рассмотрение интерполяционный оператор π_t^T : $C[0,1] \to C[0,1]$, ассоциированный с множеством $\mathcal{R}(T,t)$, т.е. для каждого $x \in C[0,1]$ и каждого $s \in \mathcal{R}(T,t)$

$$\pi_t^T(x)(s) = x(s),$$

а для $s \in [0,1] \setminus \mathcal{R}(T,t)$

$$\pi_t^T(x)(s) = x(s_-) + \frac{s - s_-}{s_+ - s_-}(x(s_+) - x(s_-)),$$

где

$$s_- = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathcal{R}(T,t) \cap [0,s] = \varnothing; \\ \sup\{s' \in \mathcal{R}(T,t) : s' \leqslant s\}, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

и

$$s_+ = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathcal{R}(T,t) \cap [s,1] = \varnothing; \\ \inf\{s' \in \mathcal{R}(T,t) : s' \geqslant s\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для каждой последовательности $\{Z_t, t \in T\}$, индексированной элементами T и принимающей значения в $C[0,1]$, обозначим $C(Z;T)$ ее предельное множество.

Теперь для винеровского процесса $W(t)$, $t > 0$ и подпоследовательности T мы можем определить для каждого положительного $t > 0$ функции

$$V_t^T(s) = (2t \log \nu(T,t))^{-1/2} W(ts) \in C[0,1]$$

и

$$Y_t^T = \pi_t^T V_t^T.$$

При этом каждая функция Y_t^T полностью определяется значениями процесса $\{W(\tau), \tau \in T \cap [0,t]\}$. Мы хотим дать описание предельного множества для $Y^T = \{Y_t^T, t \in T\}$. С этой целью определим семейство подмножеств

$$T_{h,\varepsilon} = \{t \in T : \|h - \pi_t^T h\| \leqslant \varepsilon\} \subset T,$$

где $h \in C[0,1]$, $\varepsilon > 0$. Для двух произвольных последовательностей $T' \subset T$ обозначим

$$b(T'|T) = \limsup_{\substack{t\to\infty,\\ t\in T'}} \left[\frac{\log \nu(T',t)}{\log \nu(T,t)}\right]^{1/2}$$

и

$$b^T(h) =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} b(T_{h,\varepsilon}|T), & \text{если } T_{h,\varepsilon} \text{ не ограничено для всех } \varepsilon > 0, \\ 0, & \text{если } T_{h,\varepsilon} \text{ ограничено для некоторого } \varepsilon > 0. \end{cases}$$

Следующая теорема описывает предельное множество для Y^T:

Теорема 1 [10]. *Пусть T подпоследовательность, а Y^T соответствующее множество интерполированных и нормированных траекторий винеровского процесса. Тогда почти наверное для любого $h \in C[0,1]$ соотношение $h \in C(Y^T; T)$ верно в том и только в том случае, когда*

$$|h|_2 \leqslant b^T(h). \tag{1}$$

В дальнейшем мы стремимся показать, что $C(Y^T; T)$ останется тем же самым и при замене винеровского процесса подходящей случайной ломаной.

Ломаные, построенные по суммам случайных величин

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ последовательность независимых с.в. с нулевыми средними и конечными дисперсиями. Положим $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$ и $B_n = \mathbf{Var}\, S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{Var}\, X_j$. Определим $\widehat{S}(B_n) = S_n$ при $n \in \mathbf{N}$ и зададим $\widehat{S}(b)$ для произвольных $b \in \mathbf{R}_+$ при помощи линейной интерполяции. Свойства случайной ломаной $\widehat{S}$ в основном аналогичны свойствам винеровского процесса.

Для каждой подпоследовательности $T \in \mathbf{N}$ обозначим $BT = \{B_t, t \in T\}$ и рассмотрим, как и ранее, при каждом $t \in T$ множество

$$\mathcal{R}(BT, B_t) = \{s \in [0,1] \,:\, sB_t \in BT\} \subset [0,1]$$

и интерполяционный оператор $\pi_{B_t}^{BT} : C[0,1] \to C[0,1]$, ассоциированный с $\mathcal{R}(BT, B_t)$. Далее, определим нормирующий множитель $\mathcal{L}_t^T = 2\log\nu(BT, B_t)$ и зададим случайные элементы $C[0,1]$, положив для $s \in [0,1]$

$$\widehat{V}_t^T(s) = (B_t\mathcal{L}_t^T)^{-1/2}\widehat{S}(B_t s),$$

$$\widehat{Y}_t^T = \pi_{B_t}^{BT}\widehat{V}_t^T.$$

Мы будем изучать предельное поведение элементов $\widehat{Y}_t^T$, которые полностью определяются значениями $\{S_t, t \in T\}$.

Условия, связанные с законом повторного логарифма

Нам придется наложить на последовательность X_j некоторые разумные ограничения, которые обеспечивают выполнение по крайней мере обычного закона повторного логарифма. Наиболее удобными среди такого сорта условий являются условия В. В. Петрова и В. А. Егорова. Нам потребуется также фундаментальное условие А. Н. Колмогорова, которое более ограничительно, чем два предыдущих, но играет основную роль во всех доказательствах, в том числе и в нашем.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ определенная выше последовательность с.в., и пусть задана последовательность $\varepsilon_j \to 0$. Обозначим

$$L_j = \mathbf{E}X_j^2\mathbf{1}_{\{|X_j| > \varepsilon_j(B_j/\log_2 B_j)^{1/2}\}}.$$

Следующие условия являются достаточными для выполнения закона повторного логарифма (см. [1, 5]).

Условие Колмогорова:

$$\forall j \ |X_j| \leqslant M_j = \varepsilon_i\sqrt{\frac{B_j}{\log_2 B_j}}. \qquad \text{(K)}$$

Условия Петрова:

$$B_n^{-1}\sum_{j=1}^{n} L_j \to 0, \tag{P1}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}(B_j \log_2 B_j)^{-1} L_j < \infty. \tag{P2}$$

Условие Егорова:

$$\exists\alpha > 0\ \ \log B_n (\log_3 B_n)^{1+\alpha} B_n^{-1}\sum_{j=1}^{n} L_j \to 0. \tag{E}$$

Замечания. 1. Условия Егорова сильнее, чем условия Петрова, но слабее, чем условие Колмогорова.

2. Строгое неравенство $\alpha > 0$ в условии Егорова важно: если $\alpha = 0$, то ЗПЛ уже не обязан выполняться (см. [1]).

3. В определении L_j можно заменить последовательность ε_j фиксированным, но произвольно малым числом ε.

4. Некоторые обобщения условия (E) приведены в [2].

Один контрпример

Сейчас мы покажем, почему для разнораспределенных величин не годится метод доказательства из [10], где рассматривались одинаково распределенные величины. Там был использован принцип инвариантности Майора, дающий точность аппроксимации $S_n - W(n) = o(\sqrt{n})$. Такая оценка была достаточна, поскольку для любой фиксированной подпоследовательности нормирующий множитель в законе повторного логарифма имеет порядок роста больший, чем $\sqrt{n}$. Соответствующий результат для неодинаково распределенных величин должен был бы иметь вид $S_n - W(B_n) = o(\sqrt{B_n})$. Однако следующий пример показывает, что выполнение условия Егорова (и тем более условий Петрова) может оказаться недостаточным для столь точной аппроксимации.

Пример 1. Определим последовательность $p_j = (j \log j \log\log j)^{-1}$, $j \geqslant 9$. При этом будет $\sum p_j = \infty$. Пусть X_j независимые величины такие, что

$$P\{X_j = 1\} = P\{X_j = -1\} = 1/2 - p_j,$$

$$P\{X_j = \sqrt{j}\} = P\{X_j = -\sqrt{j}\} = p_j.$$

Тогда $\mathbf{Var}\, X_j = \mathbf{E}X_j^2 \to 1$ и $B_n \sim n$. По лемме Бореля–Кантелли п.н. события $|X_j| = \sqrt{j}$ происходят бесконечно часто. Для любой аппроксимации W_n сумм $S_n = \sum_{j=9}^{n} X_j$ имеем

$$|X_n| \leqslant |W_n - W_{n-1}| + |S_{n-1} - W_{n-1}| + |S_n - W_n|,$$

так что

$$|S_{n-1} - W_{n-1}| + |S_n - W_n| \geqslant |X_n| - |W_n - W_{n-1}|.$$

Для гауссовских аппроксимаций имеем $|W_n - W_{n-1}| = O(\sqrt{\log n})$. Таким образом,

$$|S_n - W_n| \geqslant \sqrt{n}/2$$

бесконечно часто.

С другой стороны, проверим выполнение условия (E). В самом деле, пусть $\varepsilon_j = j^{-1/3}$. Тогда, начиная с некоторого натурального n_0, верно $1 < \varepsilon_j (B_j / \log_2 B_j)^{1/2} < \sqrt{j}$ и

$$\sum_{j=n_0}^{n} L_j = \sum_{j=n_0}^{n} ip_j = \sum_{j=n_0}^{[\sqrt{n}]} (\log j \log\log j)^{-1}) + \sum_{j=[\sqrt{n}]}^{n} (\log j \log\log j)^{-1})$$
$$= O(\sqrt{n}) + O(n(\log n \log\log n)^{-1}) = O(n(\log n \log\log n)^{-1})$$

и

$$\log B_n (\log_3 B_n)^{1+\alpha} B_n^{-1} \sum_{j=9}^{n} L_j \sim \log n (\log_3 n)^{1+\alpha} n^{-1} \sum_{j=n_0}^{n} L_j$$
$$= O((\log_3 n)^{1+\alpha} (\log\log n)^{-1}) \to 0.$$

Нетрудно усилить этот пример и добиться выполнения соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} |S_n - W_n| / \sqrt{B_n} = \infty$$

с вероятностью единица, все еще оставаясь в рамках (E).

Аппроксимация на лакунарных последовательностях при выполнении условия Колмогорова

Как это часто бывает в задачах, связанных с законом повторного логарифма, сначала нужно разобраться, что происходит при выполнении фундаментального условия (K).

Назовем последовательность $T = (t_n) \subset \mathbf{N}$ *лакунарной*, если $\gamma = \inf_n \{B_{t_{n+1}}/B_{t_n}\} > 1$. Тогда нормирующая последовательность, связанная с множеством $BT = \{B_t, t \in T\}$, допускает представление $\mathcal{L}_{t_n}^T = 2\log n$.

Пусть последовательность X_j удовлетворяет условию (K). Следующий результат дает гауссовскую аппроксимацию для сумм вдоль последовательности T.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (K) *и* T *– лакунарная последовательность. Тогда существуют такие независимые центрированные гауссовские величины* U_j, *что суммы* $W_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$ *п.н. дают аппроксимацию*

$$S_{t_n} - W_n = o\left(\sqrt{B_{t_n}\log n}\right) \tag{2}$$

при равенстве дисперсий $\mathbf{Var}\, W_n = B_{t_n}$.

Доказательство. Положим

$$S_n' = \sum_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} X_j, \quad B_n' = \sum_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} \mathbf{Var}\, X_j.$$

Построим гауссовскую аппроксимацию для S_n' стандартным квантильным методом. Положим $S_n'' = S_n'/\sqrt{B_n'}$ и обозначим F_n функцию распределения S_n''. Не ограничивая общности, можно считать, что F_n непрерывна. Тогда величина $F_n(S_n'')$ равномерно распределена на [0,1], и если Φ-ф.р. стандартного нормального закона $\mathcal{N}(0,1)$, то с.в. $\Phi^{-1}F_n(S_n'')$ имеет распределение $\mathcal{N}(0,1)$. Положим $U_n = \sqrt{B_n'}\Phi^{-1}F_n(S_n'')$, зафиксируем положительное δ и покажем, что

$$\sum P\{|S_n' - U_n| > \delta\sqrt{B_n'\log n}\} < \infty. \tag{3}$$

Для этого сначала дадим оценку вероятности

$$\begin{aligned} &P\{U_n < S_n' - \delta\sqrt{B_n'\log n}; S_n' \geqslant 0\} \\ &= P\{\Phi^{-1}F_n(S_n'') < S_n'' - \delta\sqrt{\log n}; S_n'' \geqslant 0\} \\ &= P\{F_n(S_n'') < \Phi(S_n'' - \delta\sqrt{\log n}); S_n'' \geqslant 0\}. \end{aligned} \tag{4}$$

Покажем, что соответствующее событие может случиться только, если величина S_n'' велика; как следствие, оно имеет малую вероятность. Мы опираемся на следующую ключевую лемму ([5, §10.1]).

Лемма 1. *Пусть* $X_1, \dots, X_n$ *независимые центрированные с.в.;* $|X_j| \leqslant M$ $\forall j \leqslant n$; *пусть* $B = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Var}\, X_j$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

(i) *для каждого* θ

$$\mathbf{E}\left(\exp\left\{\theta \sum_{j=1}^{n} X_j\right\}\right) \leqslant \exp\left\{\frac{\theta^2 B}{2}\left(1+\frac{\theta M}{2}\right)\right\}; \tag{5}$$

(ii) *для каждого* $x \in [0, B/M]$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j \geqslant x\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2B}\left(1-\frac{xM}{2B}\right)\right\}. \tag{6}$$

Замечание. В [5] фигурирует несколько иное условие $|X_j| \leqslant M_j$, но в доказательстве используется только последнее значение $M = M_n$.

Применим Лемму 1 к $\{X_j, t_{n-1}+1 \leqslant j \leqslant t_n\}$, $B = B_n'$, $M = M_{t_n}$. Отметим, что

$$\frac{M}{B^{1/2}} \leqslant \frac{\varepsilon_{t_n}(B_{t_n}/\log_2 B_{t_n})^{1/2}}{(B_{t_n} - B_{t_{n-1}})^{1/2}}$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon_{t_n} B_{t_n}^{1/2}(\log_2 B_{t_n})^{-1/2}}{((1-1/\gamma)B_{t_n})^{1/2}} \leqslant \mathbf{C}_1 \varepsilon_{t_n}(\log_2 B_{t_n})^{-1/2}.$$

Поэтому мы можем применять (6) для значений x, удовлетворяющих условию

$$y = \frac{x}{\sqrt{B_n'}} \leqslant (\mathbf{C}_1\varepsilon_{t_n})^{-1}(\log_2 B_{t_n})^{1/2}.$$

Рассмотрим случай $y \leqslant 2(\log n)^{1/2}$. Здесь нужное условие выполнено в силу лакунарности T. В силу (6) для таких y имеем

$$1 - F_n(y) = P\{S_n'' > y\} = P\{S_n' > x\} \leqslant \exp\left\{-\frac{y^2}{2}(1-\mathbf{C}_2\varepsilon_{t_n})\right\}.$$

С другой стороны, для таких y мы имеем $y - \delta y/2 \geqslant y - \delta\sqrt{\log n}$; следовательно

$$1 - \Phi(y - \delta\sqrt{\log n}) \geqslant 1 - \Phi(y - \delta y/2) = 1 - \Phi((1-\delta/2)y)$$

и для $y > y_0(\delta)$ можно продолжить эту цепочку неравенством

$$1 - \Phi((1-\delta/2)y) \geqslant \exp\left\{-\frac{(1-\delta/4)^2 y^2}{2}\right\}.$$

Сравнивая полученные оценки, видим, что при больших n

$$F_n(y) > \Phi(y - \delta\sqrt{\log n}).$$

Следовательно, вероятность (4) оценивается суммой

$$P\{F_n(S_n'') < \Phi(S_n'' - \delta\sqrt{\log n});\ 0 \leqslant S_n'' \leqslant y_0(\delta)\} + P\{S_n'' \geqslant 2\sqrt{\log n}\}. \tag{7}$$

Покажем, что первая вероятность в (7) при больших n равна нулю. В самом деле, если событие

$$\{F_n(S_n'') < \Phi(S_n'' - \delta\sqrt{\log n});\ 0 \leqslant S_n'' \leqslant y_0(\delta)\} \tag{8}$$

непусто, для некоторого $s \in [0, y_0(\delta)]$ было бы верно

$$P\{S_n'' \leqslant 0\} = F_n(0) \leqslant F_n(s) \leqslant \Phi(s - \delta\sqrt{\log n})$$
$$\leqslant \Phi(y_0(\delta) - \delta\sqrt{\log n}) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Следующее элементарное предложение призвано исключить такую абсурдную асимметрию.

Предложение 1. *Пусть S – случайная величина с нулевым средним и единичной дисперсией. Тогда*

$$P\{S \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{2}(\mathbf{E}\exp\{|S|\}^{-3}.$$

Доказательство предложения. Воспользуемся соотношением

$$\inf_{x>0} x^{-3/2} e^{x/2} = \left[\inf_{x>0} x^{-3} e^x\right]^{1/2} = (e/3)^{3/2}$$

и применим к мере $P = \mathcal{L}(S)$ неравенство Коши

$$(e/3)^{3/2} = \int (e/3)^{3/2} |x|^2\, dP \leqslant \left(\int |x|\, dP\right)^{1/2} \left(\int e^{|x|}\, dP\right)^{1/2}.$$

Тогда

$$\int |x|\, dP \geqslant (e/3)(\mathbf{E}e^{|S|})^{-1}.$$

Повторим этот прием, скомбинировав

$$\sup_{x>0} xe^{-\sqrt{x}} = \sup_{x>0} x^2 e^{-x} = (2/e)^2$$

с неравенством Коши

$$\frac{1}{2}\int |x| dP = \int\limits_{-\infty}^{0} |x| dP \leqslant (2/e)^2 \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|x|}}\, dP$$

$$\leqslant (2/e)^2 \left[\int\limits_{-\infty}^{0} 1\, dP\right]^{1/2} \left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{|x|}\, dP\right]^{1/2} \leqslant (2/e)^2 P\{S \leqslant 0\}^{1/2}[\mathbf{E}e^{|S|}]^{1/2}.$$

Следовательно,

$$P\{S \leqslant 0\} \geqslant \frac{1}{4}\left[\int |x| dP\right]^2 (e/2)^4 [\mathbf{E}e^{|S|}]^{-1}$$
$$\geqslant \frac{1}{4}(e/3)^6 (e/2)^4 [\mathbf{E}e^{|S|}]^{-3} \geqslant \frac{1}{2}[\mathbf{E}e^{|S|}]^{-3}.$$

Применим доказанное предложение к с.в. $S = S_n''$, имеющей нулевое среднее и единичную дисперсию. Полагая в (5) $\theta = (B_n')^{-1/2}$, имеем

$$\mathbf{E}\exp\{|S_n''|\} \leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}\left(1 + M_{t_n}/2\sqrt{B_n'}\right)\right\}$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{1}{2}(1 + \mathbf{C}_3\varepsilon_{t_n})\right\} \to \sqrt{e} > 0.$$

Следовательно, $\liminf\limits_{n\to\infty} F_n(0) > 0$ и при больших n событие (8) пусто.

Для второй вероятности из (7) неравенство (6) дает хорошую оценку:

$$P\{S_n'' \geqslant 2\sqrt{\log n}\} = P\{S_n' \geqslant 2\sqrt{B_n' \log n}\} \leqslant \exp\{-2\log n(1 - \mathbf{C}_4\varepsilon_{t_n})\},$$

приводящую к сходящемуся ряду.

Суммируя полученные оценки, имеем

$$P\{U_n < S_n' - \delta\sqrt{B_n' \log n};\ S_n' \geqslant 0\} \leqslant n^{-2(1-\varepsilon'_n)}, \quad \varepsilon_n' \to 0.$$

Из соображений симметрии имеем также

$$P\{U_n > S_n' + \delta\sqrt{B_n' \log n};\ S_n' \leqslant 0\} \leqslant n^{-2(1-\varepsilon'_n)}.$$

Рассмотрим теперь остающиеся вероятности

$$P\{U_n > S_n' + \delta\sqrt{B_n' \log n};\ S_n' \geqslant 0\},$$
$$P\{U_n < S_n' - \delta\sqrt{B_n' \log n};\ S_n' \geqslant 0\}.$$

Чтобы оценить их, потребуется следующая лемма, незначительно отличающаяся от Леммы 2 из [5, §10.1].

Обозначим $K(\delta) := \delta/\sqrt{1+\delta^2}$ и $y_n := K(\delta)\sqrt{\log n}$.

Лемма 2. *Для каждого $\mu > 0$ существует такое $N = N(\delta, \mu)$, что для всех $n > N$ и всех x, удовлетворяющих неравенствам $y_n\sqrt{B_n'} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{\log n B_n'}$, верно*

$$P\{S_n' > x\} \geqslant \exp\left\{-\frac{x^2}{2B_n'}(1+\mu)\right\}.$$

Мы опускаем доказательство Леммы 2, поскольку оно вполне аналогично рассуждениям из [5]. С ее помощью мы покажем, что

$$P\{U_n > S_n' + \delta\sqrt{B_n' \log n},\ S_n' \geqslant 0\} \leqslant n^{-2(1-\varepsilon'_n)}, \quad \varepsilon_n' \to 0. \tag{9}$$

Указанная вероятность оценивается следующей суммой

$$P\{U_n > S_n' + \delta\sqrt{B_n' \log n},\ S_n' \geqslant 0\}$$
$$= P\{F_n(S_n'') > \Phi(S_n'' + \delta\sqrt{\log n}),\ S_n'' \geqslant 0\}$$
$$= P\{1 - F_n(S_n'') < 1 - \Phi(S_n'' + \delta\sqrt{\log n}), S_n'' \geqslant 0\}$$
$$\leqslant P\{S_n'' \geqslant 2\sqrt{\log n}\} +$$
$$+ P\{1 - F_n(S_n'') < 1 - \Phi(S_n'' + \delta\sqrt{\log n}), y_n$$
$$\leqslant S_n'' \geqslant 2\sqrt{\log n}\}$$
$$+ P\{1 - F_n(S_n'') < 1 - \Phi(S_n'' + \delta\sqrt{\log n}), 0 \leqslant S_n'' \leqslant y_n\}.$$

Для первой из этих вероятностей мы уже имеем оценку $n^{-2(1-\varepsilon'_n)}$. Для оценки второго слагаемого рассмотрим x в интервале $y_n\sqrt{B'_n} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{\log n B'_n}$. Полагая $y = \frac{x}{\sqrt{B'_n}}$ и применяя Лемму 2 с $\mu = \delta + \delta^2/4$, получим

$$1 - F_n(y) = P(S''_n > y) = P(S'_n > x) \geqslant \exp\left\{-\frac{y^2}{2}(1+\delta/2)^2\right\}.$$

С другой стороны, поскольку $y \leqslant 2\sqrt{\log n}$, то верно $y(1+\delta/2) \leqslant y + \delta\sqrt{\log n}$ и

$$\begin{aligned} 1 - \Phi(y + \delta\sqrt{\log n}) &\leqslant 1 - \Phi(y(1+\delta/2)) \\ &\leqslant (y_n(1+\delta/2))^{-1}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}(1+\delta/2)^2\right\}. \end{aligned}$$

Для фиксированного δ и больших n справедливо

$$\exp\left\{-\frac{y^2}{2}(1+\delta/2)^2\right\} > (y_n(1+\delta/2))^{-1}\exp\left\{-\frac{y^2}{2}(1+\delta/2)^2\right\}.$$

Таким образом, для достаточно больших n второе слагаемое из нашей оценки обращается в нуль. То же самое происходит и с третьим слагаемым. В самом деле, применяя к y_n Лемму 2 с $\mu = \delta^2$, для всех $0 \leqslant y \leqslant y_n$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - F_n(y) \geqslant 1 - F_n(y_n) = P(S''_n > y_n) &\geqslant \exp\left\{-\frac{y_n^2}{2}(1+\delta^2)\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{\delta^2\log n}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

С другой стороны,

$$1 - \Phi(y + \delta\sqrt{\log n}) \leqslant 1 - -\Phi(\delta\sqrt{\log n}) \leqslant (\delta^2\log n)^{-1}\exp\left\{-\frac{\delta^2\log n}{2}\right\}. \tag{11}$$

Сравнивая (10) и (11), получаем, что при больших n и всех $0 \leqslant y \leqslant y_n$

$$1 - F_n(y) > 1 - \Phi(y + \delta\sqrt{\log n}).$$

Таким образом, (9) доказано, и мы пришли к оценке

$$P\{|S'_n - U_n| > \delta\sqrt{B'_n\log n}\} \leqslant 4n^{-2(1-\varepsilon'_n)}.$$

По лемме Бореля–Кантелли имеем $S'_n - U_n = o(\sqrt{B'_n \log n})$. В силу лакунарности T

$$\sum_{j=1}^{n} \sqrt{B'_j \log j} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sqrt{B_{t_j}} \right) \sqrt{\log n}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^{-j/2} \right) \sqrt{B_{t_n} \log n} \leqslant \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma} - 1} \sqrt{B_{t_n} \log n},$$

и видно, что последовательности $W_n = \sum_{j=1}^{n} U_j$ и $S_{t_n} = \sum_{j=1}^{n} S'_j$ удовлетворяют соотношению

$$S_{t_n} - W_n = o(\sqrt{B_{t_n} \log n}).$$

□

Редукция к лакунарным последовательностям при выполнении условия Колмогорова

Пусть теперь $T \subset \mathbf{N}$ – произвольная подпоследовательность. Зафиксируем $\gamma > 1$ и построим лакунарную подпоследовательность (t_n) и связанное ьс ней разбиение множества T. Обозначим

$$t_1 = \inf\{t \in T\}; \quad t_{n+1} = \inf\{t \in T : B_t \geqslant \gamma B_{t_n}\};$$

$$T_n = \{t \in T : B_{t_n} \leqslant B_t < \gamma B_{t_n}\}.$$

Тогда последовательность (t_n) лакунарна и $T = \cup T_n$. Более того, нормирующий множитель в ЗПЛ допускает представление

$$\mathcal{L}_t^T \sim 2 \log n, \quad t \in T_n.$$

Следующий результат позволяет в известном смысле переходить от T к (t_n).

Предложение 2. *Пусть выполнено условие* (K), T – *произвольная подпоследовательность,* $\gamma > 1$ *и последовательность* (t_n) *построена по вышеуказанному правилу. Тогда*

$$\limsup_{n \to \infty} \sup_{t \in T_n} \frac{|S_t - S_{t_n}|}{(2B_t \log n)^{1/2}} \leqslant (\gamma - 1)^{1/2}. \tag{12}$$

Доказательство. Для каждого n положим

$$r_n = \sup\{t \in \mathbf{N} : B_t < \gamma B_{t_n}\}, \quad S'_n = \sum_{j=t_n+1}^{r_n} X_j, \quad B'_n = \mathbf{Var}\, S'_n.$$

Мы сумеем перейти от супремумов к ординарным суммам при помощи следующего стандартного приема ([5, §3.3, Теорема 12]).

Лемма 3. *Пусть $X_1, \dots, X_n$ независимые центрированные с.в. Тогда для каждого x*

$$P\left\{\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \sum_{j=1}^{k} X_j \geqslant x\right\} \leqslant 2P\left\{\sum_{j=1}^{n} X_j \geqslant x - \sqrt{2\sum_{j=1}^{n} \mathbf{Var}\, X_j}\right\}.$$

Поскольку $T_n \subset [t_n, r_n]$, мы имеем

$$\sup_{t\in T_n}(S_t - S_{t_n}) \leqslant \sup_{t_n+1\leqslant k\leqslant r_n} \sum_{j=t_n+1}^{k} X_j.$$

Для произвольного фиксированного $\delta > 0$ применим Лемму 3 к уровню $x = x_n = ((2+\delta)B'_n \log n)^{1/2}$. Получим

$$\begin{aligned} &P\left\{\sup_{t\in T_n}(S_t - S_{t_n}) \geqslant x_n\right\} \leqslant 2P\left\{S'_n \geqslant x_n - \sqrt{2B'_n}\right\} \\ &= 2P\{S'_n \geqslant ((2+\delta-\alpha_n)B'_n \log n)^{1/2}\}, \quad \alpha_n \to 0. \end{aligned}$$

Снова применим Лемму 1. Это возможно, поскольку условие (K) обеспечивает $B_{r_n} \sim \gamma B_{t_n}$, $B'_n = B_{r_n} - B_{t_n} \sim (\gamma-1)B_{t_n}$ и

$$\begin{aligned} &\frac{((2+\delta-\alpha_n)B'_n \log n)^{1/2} M_{r_n}}{B'_n} \\ &= \frac{((2+\delta-\alpha_n)\log n)^{1/2}\varepsilon_{r_n} B_{r_n}^{1/2}}{(B'_n)^{1/2}(\log_2 B_{r_n})^{1/2}} = O(\varepsilon_{r_n}) \to 0. \end{aligned}$$

Из (6) следует

$$P\{S'_n \geqslant x_n(1-o(1))\} \leqslant \exp\{-(1+\delta/2)\log n(1-o(1))\} = n^{-(1+\delta/2-o(1))}.$$

Таким образом,

$$P\left\{\sup_{t\in T_n}(S_t - S_{t_n}) \geqslant x_n\right\} \leqslant 2n^{-(1+\delta/2-o(1))}.$$

В силу симметрии верно и неравенство для модулей

$$P\left\{\sup_{t\in T_n}|S_t - S_{t_n}| \geqslant x_n\right\} \leqslant 4n^{-(1+\delta/2-o(1))}.$$

Поскольку $x_n \sim ((2+\delta)(\gamma-1)B_{t_n}\log n)^{1/2}$, лемма Бореля–Кантелли обеспечивает выполнение (12) почти наверное. □

Гауссовские аппроксимации при выполнении условия Егорова

Следующая теорема представляет собой принцип инвариантности, достаточный для нахождения интересующих нас предельных множеств.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (E), *а* $T \subset \mathbf{N}$ – *произвольная подпоследовательность. Тогда для любого* $\eta > 0$ *последовательность* X_j *может быть реализована на одном вероятностном пространстве с винеровским процессом* W, *удовлетворяющим условию*

$$\limsup_{\substack{t\to\infty,\\ t\in T}}(B_t\mathcal{L}_t^T)^{-1/2}|S_t - W(B_t)| \leqslant \eta. \tag{13}$$

Доказательство. Каждую из величин X_j мы представим в виде суммы двух центрированных величин, первая из которых удовлетворяет условию (K), а вторая является остатком. Поведение сумм при выполнении (K) мы уже изучили. В дальнейшем же будет показано, что остатки не влияют на общую картину, так как порядок роста их сумм есть $o\left(\sqrt{B_T\mathcal{L}_t^T}\right)$. Положим

$$X_j^{(1)} = X_j 1_{\{|X_j|\leqslant\varepsilon_j(B_j/\log\log B_j)^{1/2}\}},$$
$$X_j^{(2)} = X_j 1_{\{\varepsilon_j(B_j/\log\log B_j)^{1/2}<|X_j|\}}$$

и воспользуемся представлением

$$X_j = Z_j^{(1)} + Z_j^{(2)},$$

где

$$Z_j^{(1)} = X_j^{(1)} - \mathbf{E}X_j^{(1)}; \quad Z_j^{(2)} - \mathbf{E}X_j^{(2)}.$$

Слагаемые $Z_j^{(1)}$ подчиняются условию Колмогорова. Введем следующие обозначения

$$S_n^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} Z_j^{(1)}, \quad S_n^{(2)} = \sum_{j=1}^{n} Z_j^{(2)}, \quad \widetilde{B}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Var}\, Z_j^{(1)}.$$

Заметим, что из условия (E) следует $\widetilde{B}_n \sim B_n$, поскольку

$$0 \leqslant \mathbf{Var}\, X_j - \mathbf{Var}\, X_j^{(1)} \leqslant 2L_j,$$

а значит

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n - \widetilde{B}_n}{B_n} = 0.$$

Построим лакунарную подпоследовательность (t_n) и связанное с ней разбиение T. Определим $\gamma > 1$ так, чтобы $\eta = 2(\gamma-1)^{1/2}$. Положим

$$t_1 = \inf\{t \in T\}; \quad t_{n+1} = \inf\{t \in T : \widetilde{B}_t \geqslant \gamma \widetilde{B}_{t_n}\};$$
$$T_n = \{t \in T : \widetilde{B}_{t_n} \leqslant \widetilde{B}_t < \gamma \widetilde{B}_{t_n}\}.$$

Пусть $r_n = \sup\{t \in \mathbf{N} : \widetilde{B}_t < \gamma \widetilde{B}_{t_n}\}$. Тогда обе последовательности (t_n) и (r_n) лакунарны, $T = \cup T_n$ и

$$\mathcal{L}_t^T \sim 2\log n, \quad t \in T_n \quad (t \to \infty).$$

По Теореме 2 найдется гауссовская последовательность с независимыми приращениями W_n, для которой

$$S_{t_n}^{(1)} - W_n = o\left(\sqrt{B_{t_n} \log n}\right)$$

и $\mathbf{Var}\, W_n = \widetilde{B}_{t_n}$. По Предложению 2 имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n} \frac{|S_t^{(1)} - S_{t_n}^{(1)}|}{(2B_t \log n)^{1/2}} \leqslant (\gamma-1)^{1/2}.$$

Теперь покажем, что суммы слагаемых $Z_j^{(2)}$ асимптотически несущественны.

Предложение 3. *Пусть* X_j *удовлетворяет условию* (E) *и пусть* (t_n) *– лакунарная последовательность,*

$$\gamma = \liminf_{n\to\infty} B_{t_{n+1}}/B_{t_n} > 1.$$

Тогда с вероятностью единица,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{|S^{(2)}_{t_m}|}{(B_{t_m}\log m)^{1/2}} = 0. \tag{14}$$

Доказательство. Полагая $S'_n = \sum\limits_{j=t_{n-1}+1}^{t_n} Z^{(2)}_j$, запишем

$$\frac{S^{(2)}_{t_m}}{(B_{t_m}\log m)^{1/2}} = (B_{t_m}\log m)^{-1/2}\sum_{n=1}^{m} S'_n.$$

В силу (E) и лакунарности (t_n) имеем при некоторых n_0 и $\alpha > 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mathbf{Var}\,(S'_n)}{B_{t_n}\log n} &\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{t_n} L_j}{B_{t_n}\log n} \\
&= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{t_n} L_j}{B_{t_n}} \frac{\log B_{t_n}(\log_3 B_{t_n})^{1+\alpha}}{\log n \log B_{t_n}(\log_3 B_{t_n})^{1+\alpha}} \\
&\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{\log n \log B_{t_n}(\log_3 B_{t_n})^{1+\alpha}} < \infty.
\end{aligned} \tag{15}$$

Применяя усиленный закон больших чисел (см. [5, §9.3, Теорема 12]), получаем (14). □

Продолжая доказательство Теоремы 3, покажем, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{t\in T_n} \frac{|S^{(2)}_t - S^{(2)}_{t_n}|}{(2B_t\log n)^{1/2}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \sup_{t_n\leqslant t\leqslant r_n} \frac{|S^{(2)}_t - S^{(2)}_{t_n}|}{(2B_{t_n}\log n)^{1/2}} = 0. \tag{16}$$

Пусть $S'_n = S^{(2)}_{r_n} - S^{(2)}_{t_n}$. Тогда в силу Предложения 3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S'_n|}{(B_{t_n}\log n)^{1/2}} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{|S^{(2)}_{t_n}|}{(B_{t_n}\log n)^{1/2}} + \lim_{n\to\infty} \frac{|S^{(2)}_{r_n}|}{(B_{t_n}\log n)^{1/2}} = 0.$$

Поскольку величины S'_n независмы, из леммы Бореля–Кантелли следует, что для каждого δ

$$\sum_n P\{|S'_n| > \delta(B_{t_n}\log n)^{1/2}\} < \infty.$$

Применяя Лемму 3, выводим отсюда

$$\sum_n P\left\{\sup_{t_n\leqslant t\leqslant r_n}(S_t^{(2)} - S_{t_n}^{(2)}) \geqslant \delta(B_{t_n}\log n)^{1/2}\right\} < \infty,$$

и (16) выполнено. Суммируя полученные оценки, находим

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in T_n}\frac{|S_t - W_n|}{(2B_t\log n)^{1/2}} \leqslant (\gamma-1)^{1/2}.$$

Если вероятностное пространство достаточно богато, то последовательность (W_n) можно так встроить (делая линейную интерполяцию и добавляя независимые броуновские мосты) в винеровский процесс W, чтобы $W_n = W(\widetilde{B}_{t_n})$. Более того, из результатов [10] о винеровском процессе следует, что

$$\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in T_n}\frac{|W(\widetilde{B}_{t_n}) - W(B_t)|}{(2B_t\log n)^{1/2}} \leqslant (\gamma-1)^{1/2},$$

откуда и вытекает утверждение Теоремы 3. □

Из доказанного принципа инвариантности мгновенно вытекает характеризация интересующих нас предельных множеств для интерполированных и нормированных случайных ломаных.

Следствие. *Пусть последовательность X_j удовлетворяет условию* (E), *а T – произвольная подпоследовательность моментов времени. Тогда с вероятностью единица*

$$C(\hat{Y}^T;T) = C(Y^T;T) = \{h\in C[0,1] : |h|_2 \leqslant b^T(h)\}.$$

Еще один контрпример

Покажем, что полученные нами результаты уже не обязаны выполняться, если условие Егорова (E) заменить несколько более слабыми условиями (P1), (P2).

Пример 2. Пусть $T = (t_n) \subset \mathbf{N}$ какая-нибудь лакунарная последовательность, удовлетворяющая условию быстрого роста

$$\sum (\log\log t_n)^{-1} < \infty.$$

Пусть (p_n) такая последовательность, что $0 \leqslant p_n \leqslant 1$, $p_n \to 0$ и

$$\sum \frac{p_n}{\log n} = \infty.$$

Наконец, пусть (H_n) – положительная последовательность, возрастающая к бесконечности, но настолько медленно, что $H_n p_n \to 0$. Определим распределения независимых с.в. X_j следующим образом. Для $j \notin T$ положим

$$P\{X_j = 1\} = P\{X_j = -1\} = 1/2,$$

а для каждого n пусть

$$P\{X_{t_n} = (H_n t_n \log n)^{1/2}\} = P\{X_{t_n} = -(H_n t_n \log n)^{1/2}\} = \frac{p_n}{2\log n},$$

$$P\{X_{t_n} = 0\} = 1 - \frac{p_n}{\log n}.$$

При $j \notin T$ имеем $\mathbf{Var}\, X_j = 1$, в то время как $\mathbf{Var}\, X_{t_n} = H_n t_n p_n$. Отсюда следует, что $B_j \sim j$. Далее, полагая $\varepsilon_j = j^{-1/3} \to 0$, имеем $L_j = 0$ для $j \notin T$ и $L_{t_n} = \mathbf{Var}\, X_{t_n} = H_n t_n p_n$. Отсюда легко выводятся оба условия Петрова. С другой стороны, по лемме Бореля–Кантелли почти наверное выполнено

$$\limsup_{n\to\infty} |X_{t_n}|/(B_{t_n}\log n)^{1/2} \geqslant \limsup_{n\to\infty} H_n^{1/2} = \infty,$$

что противоречит даже нефункциональной форме закона повторного лагарифма для подпоследовательностей.

Сложение величин одного порядка

Для случая, когда складываемые величины имеют приблизительно одинаковый порядок, можно получить требуемый функциональный закон для подпоследовательностей при несколько иных условиях; приводимый ниже результат является прямым обобщением [10], где рассмотрены одинаково распределенные величины. Вслед за [14] будем говорить, что семейство с.в. $\{\{X_j, j \geqslant 1\}, X\}$ принадлежит классу $\mathcal{Z}$, если $\{X_j\}$ независимы и существует константа C такая, что

$$P\{|X_j| \geqslant x\} \leqslant CP\{|X| \geqslant x\}$$

для всех $j \geqslant 1$ и каждого $x \geqslant 1$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\{X_j\}, X\}$ *принадлежат классу* $\mathcal{Z}$, *причем* $\mathbf{E}X_j = 0$ *и* $\mathbf{E}X^2 < \infty$. *Предположим также, что* $\liminf\limits_{n\to\infty} B_n/n > 0$ *и что вероятностное пространство достаточно богато. Тогда можно построить винеровский процесс* W, *удовлетворяющий для каждой подпоследовательности* T *условиям*

$$\lim_{\substack{t\in T,\\ t\to\infty}} \frac{|\widehat{S}(B_t) - W(\widetilde{B}_t)|}{\sqrt{B_t \mathcal{L}_t^T}} = 0, \qquad \lim_{\substack{t\in T,\\ t\to\infty}} \|\widehat{Y}_t^{\,T} - Y_t^T\| = 0$$

почти наверное.

Доказательство. В основе рассуждений лежит следующая версия принципа инвариантности.

Лемма 4 [14]. *Пусть* $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *возрастающая функция,* $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = \infty$, $G(2x) \leqslant \mathbf{C}_1 G(x)$ *для некоторой положительной константы* $\mathbf{C}_1$ *и каждого* $x \geqslant 1$. *Пусть* $\{\{X_j\}, X\}$ *принадлежит классу* $\mathcal{Z}$, $\mathbf{E}G(|X|) < \infty$, $\mathbf{E}X_j = 0$ *и* $G(x)/x$ *не убывает.*

Тогда найдется последовательность независимых нормальных с.в. $\{U_j, j \geqslant 1\}$ *с нулевыми средними и дисперсиями* $\sigma_j^2 = \mathbf{Var}\, X_j I\{G(|X_j|) \leqslant j\}$, *что*

$$\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n U_j = o(G^{-1}(n))$$

почти наверное.

Применим Лемму 4 к $G(x) = x^2$ и найдем такую последовательность независимых центрированных нормальных с.в. $\{U_j\}$, для которых $\mathbf{Var}\, U_j = \sigma_j^2 = \mathbf{Var}\, X_j I\{|X_j| \leqslant \sqrt{n}\}$ и

$$\sum_{j=1}^n X_j - \sum_{j=1}^n U_j = o(\sqrt{n}).$$

Положим $\widetilde{B}_t := \sum\limits_{j=1}^t \sigma_j^2$. Если вероятностное пространство достаточно богато, существует винеровский процесс W, для которого

$$\sum_{j=1}^n U_j = W(\widetilde{B}_n).$$

Поэтому утверждение Леммы 4 можно записать как

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|\widehat{S}(B_t) - W(\widetilde{B}_t)|}{\sqrt{t}} = 0,$$

откуда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{S}(B_t) - W(\widetilde{B}_t)|}{\sqrt{B_t}} = 0. \tag{17}$$

В условиях Теоремы 4 имеем также

$$\lim_{t\to\infty} (B_t - \widehat{B}_t)/B_t = 0,$$

откуда следует (см. [10])

$$\lim_{\substack{t\in T,\\ t\to\infty}} \frac{|W(B_t) - W(\widetilde{B}_t)|}{\sqrt{B_t \mathcal{L}_t^T}} = 0, \tag{18}$$

и теперь первое утверждение Теоремы 4 вытекает из (17) и (18). Дальнейшее очевидно. □

Авторы признательны М. Веберу, В. А. Егорову, В. Линде за полезные советы, полученные при работе над статьей.

Литература

1. В. В. Егоров, *О законе повторного логарифма.* — Теория вероятн. и ее примен. **14, No. 4** (1969), 722–729.
2. В. В. Егоров, *Несколько теорем об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма.* — Теория вероятн. и ее примен. **17, No. 1** (1972), 84–98.
3. М. А. Лифшиц, *Гауссовские случайные функции.* Киев, ТВиМС, 1995.
4. А. Е. Михайлов, *Об осцилляции гауссовских процессов I, II.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **177** (1989), 92–97; **194** (1992) 119–123.
5. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М, Наука, 1972.
6. А. И. Саханенко, *Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами.* — Труды инст. матем. СОАН СССР **3** (1984), 4–49.
7. I. S. Chang, C. A. Hsiung, *Strassen invariance principle for random sequences.* — Z. Wahrsch. verw. Gebiete **64** (1983), 401–409.
8. M. Csörgő, P. Révész, *Strong approximations in probability and statistics.* Budapest, Acad. Kiado, 1981.
9. X. Fernique, *Oscillations de fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles.* — Math. Scand. **60** (1987), 96–108.

10. M. A. Lifshits, M. Weber, *Strassen law for partially observed processes.* — J. Theor. Probab. **10** (1997), 101–115.
11. P. Major,, *An improvement of Strassen's invariance principle.* — Ann. Probab **7** (1979), 55–61.
12. A. I. Martikainen, *Generalizations of the law of the iterated logarithm.* — In: Probab. Theory and Math. Statist. **2** (1986), 235–251.
13. C. Qualls, *The law of iterated logarithm on arbitrary sequence for stationary Gaussian processes and Brownian motion.* — Ann. Probab. **5** (1977), 724–739.
14. Q.-M. Shao, *Strong approximation theorems for independent random variables and their applications.* — J. Multivariate Anal. **52** (1995), 107–130.
15. V. V. Petrov, *On the law of the iterated logarithm without assumptions about the existence of moments.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **59,** No. **4** (1968), 1068–1072.
16. M. Weber, *The law of the iterated logarithm on the subsequences. Characterizations.* — Nagoya Math. J. **118** (1990), 65–97.

Gorn N. L., Lifshits M. A On the functional law of the iterated logarithm for partially observed sums of random variables.

We consider partial sum process generated by a sequence of nonidentically distributed independent random variables. Assuming that this process is available for observations along arbitrary time sequence, we fill the gaps by linear interpolation and prove the functional law of the iterated logarithm (FLIL) for sample paths obtained in this way. Assuming that condition of V. A. Egorov holds, we show that FLIL is valid, while under other conditions sufficient for usual law of the iterated logarithm FLIL may fail.

Университет им. Ф. Шиллера
Йена, Германия
ЦПО Менкомтех, С.-Петербург

Поступило 8 февраля 1997 г.