Н. Г. Докучаев

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЛОКАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРОЦЕССА НА ПОВЕРХНОСТИ И ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Введение

Вопросам, связанным с вероятностным распределением функционалов от локального времени, поцвящена обширная литература (см. обзоры [1–4] и библиографию там же). Наиболее подробно изучено локальное время скалярного броуновского движения. В последнее время выяснилось, что привлечение идей, связанных с локальным временем, оказывается весьма полезным для решения задач стохастической теории оптимального управления (в частности, для задач стохастической финансовой математики – см., например, [5]). С другой стороны, естественно включить в стохастическую теорию оптимального управления новые задачи, в которых требуется минимизировать (максимизировать) локальное время пребывания в множествах нулевой меры. Это является одной из причин, почему важно иметь описание распределения локального времени для более общих процессов, чем броуновское движение (например, для диффузионных процессов с зависящим от управления сносом). В работе [3] было в принципе установлено существование локального времени пребывания на гладких гиперповерхностях общих многомерных процессов Ито (точнее, доказано существование непрерывных неубывающих процессов, возрастающих только на гиперповерхности и полученных как пределы интегралов от некоторых специальных неотрицательных функций от процесса Ито). Ниже выведены специальные аналоги уравнений Колмогорова для распределения локального времени пребывания на “кусочно-гладкой” гиперповерхности для общего многомерного диффузионного про-

Работа поддержана грантом РФФИ No. 96-01-00408.

цесса. Установлена разрешимость этих уравнений и сходимость случайных величин, предел которых обычно называют локальным временем. Найдено явное выражение локального времени через решение уравнения Колмогорова и стохастический интеграл. Рассмотрены процессы и гиперповерхности достаточно общего вида, благодаря чему оказалось возможным исследовать новую стохастическую задачу оптимального управления, в которой управление входит в коэффициент сноса диффузионного процесса и минимизируется функционал типа математического ожидания локального времени. Для этой задачи выведен аналог уравнения Беллмана как необходимое и достаточное условие оптимальности и получены достаточные условия его разрешимости.

1. Постановка задачи

На вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ рассмотрим n- мерный винеровский процесс $w(t)$ с независимыми компонентами, такой, что $w(0) = 0$. Рассмотрим случайный n-вектор a, не зависящий от $w(t)$. Пусть случайный процесс $y(t)$ размерности n является сильным решением стохастического уравнения Ито

$$dy(t) = f\Big(y(t), t\Big)\,dt + \beta\Big(y(t), t\Big)\,dw(t), \tag{1.1}$$

$$y(0) = a. \tag{1.2}$$

Функции $f(x,t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(x,t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$ ограничены и измеримы. Полагаем, что функция $\beta(x,t)$ непрерывна, производная $\partial\beta(x,t)/\partial x$ ограничена, $b(x,t) = {}^1\!/_2\,\beta(x,t)\,\beta(x,t)^{\mathrm{T}} \geqslant \delta I > 0$ для некоторого $\delta > 0$ для всех x, t.

Известно [8, §II.6], что в при таких предположениях уравнение (1.1)–(1.2) имеет слабое решение (однозначное по распределению). Введенный здесь набор $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, w(t), y(t))$ является, таким образом, одним из таких слабых решений.

Пусть $D \subset \mathbf{R}^n$ – некоторая область. Полагаем, что область D ограничена и имеет C^2-гладкую границу, $a \in D$ п.н.

Рассмотрим случайные моменты первого выхода $\tau_D = \inf\{t : y(t) \notin D\}$. Пусть $\Gamma \subset D$ – некоторая гиперповерхность размерности $n-1$, $\partial\Gamma$-край этой гиперповерхности (возможно, $\partial\Gamma = \emptyset$).

Рассмотрим некоторую норму $\|\cdot\|_E$ в $\mathbf{R}^n$, эквивалентную евклидовой норме. Введем множества

$$\begin{aligned} \Gamma_*(\varepsilon) &= \{x \in D : \inf_{y\in\Gamma} \|x-y\|_E < \varepsilon/2\}, \\ \Gamma'(\varepsilon) &= \{x \in D : \inf_{y\in\partial\Gamma} \|x-y\|_E < \varepsilon/2\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для всех $\varepsilon > 0$ зададим произвольным образом борелевские множества $\Gamma(\varepsilon)$, такие, что

$$\Gamma_*(\varepsilon)\backslash\Gamma'(\varepsilon) \subseteq \Gamma(\varepsilon) \subseteq \Gamma_*(\varepsilon). \tag{1.4}$$

Нас будет интересовать локальное время пребывания процесса $y(t)$ на Γ (до выхода из D), т.е. предельные значения при $\varepsilon \to +0$ величин

$$l_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\tau_D\wedge t} \mathrm{Ind}\{y(s) \in \Gamma(\varepsilon)\}\, ds. \tag{1.5}$$

В случае f, β, Γ общего вида будет показано, что для любого $t > 0$ эти величины сходятся к некоторой случайной величине $\widehat{\mathbf{t}}(t)$ (сходимость по распределению установлена в п. 5, в среднеквадратическом – в п.6). Будет найдено уравнение для характеристической функции

$$\phi(z) = \mathbf{E}e^{z\widehat{\mathbf{t}}(t)}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{1.6}$$

Кроме того, будут выведены уравнения, являющиеся аналогом обратного уравнения Колмогорова (и установлена их разрешимость в соответствующих классах функций) для функционалов типа

$$\phi_1 = \mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(T), \quad \phi_2 = \mathbf{E} \int_0^{\tau_D\wedge T} \varphi\big(y(t), t\big) e^{\widehat{\mathbf{t}}(t)} dt \tag{1.7}$$

для заданного числа $T > 0$ и функции φ. (Последний функционал понимаем как предел при $\varepsilon \to 0$ соответствующих функционалов для величин (1.5)). Будут также изучены задачи управления, в которых требуется минимизировать подобные функционалы (по видимому, такие задачи в стохастической теории управления ранее не рассматривались).

2. Пространства и классы функций

Зададим число $T > 0$. Обозначим $Q = D \times (0,T)$. Ниже знак $\|\cdot\|_X$ означает норму в пространстве X, $(\cdot,\cdot)_X$ означает скалярное произведение в гильбертовом пространстве X.

Введем пространства (комплекснозначных) функций.

Пусть $H^k = \overset{0}{W}{}_2^k(D)$ – гильбертовы пространства Соболева, $k = 0,1$. Пусть H^{-1} – пространство, двойственное к H^1, с нормой $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ такой, что $\|u\|_{H^{-1}}$ для $u \in H^0$ есть супремум $(u,v)_{H^0}$ по $v \in H^0$, $\|v\|_{H^1} \leqslant 1$.

Пусть $\overline{\ell}_m$ означает меру Лебега в $\mathbf{R}^m$, $\overline{B}_m$ есть σ–алгебра лебеговских множеств в $\mathbf{R}^m$. Введем пространства $C^0 = C([0,T] \to H^0)$, $X^k = L^2([0,T],\overline{B}_1,\overline{\ell}_1,H^k)$, $k = 0,\pm1$, и $Y^1 = X^1 \cap C^0$, с нормой $\|u\|_{Y^1} = \|u\|_{X^1} + \|u\|_{C^0}$.

Форму $(u,v)_{H^0}$ считаем определенной также и для $u \in H^{-1}$, $v \in H^1$ (распостраняя ее естественным образом с $u \in H^0$, $v \in H^1$).

Пусть ниже $\mu \in (1,2)$ – произвольное число в случае $n = 1$,

$$\mu \in \left(1, \frac{n}{n-1}\right) \quad \text{в случае } \ n > 1. \tag{2.1}$$

Введем пространство $\mathcal{W} = W_\mu^{(1)}(D)$ и сопряженное пространство $\mathcal{W}^*$.

Введем пространство $\mathcal{X} = L^\infty([0,T],\overline{B}_1,\overline{\ell}_1,\mathcal{W}^*)$.

Следующее предложение 2.1 стандартно.

Предложение 2.1. $\mathcal{W}^* \subset H^{-1}$, $\mathcal{X} \subset X^{-1}$.

Лемма 2.1. *Для* $\xi \in H^1$, $\eta \in H^1$ *выполнено* $\xi\eta \in \mathcal{W}$ *и* $\|\xi\eta\|_{\mathcal{W}} \leqslant c\|\xi\|_{H^1}\|\eta\|_{H^1}$, *где* $c = c(n,D,\mu)$ *– константа.*

Доказательство. Пусть $r = 2/\mu$, $r' = r(r-1)^{-1}$, $p = \mu r'$, $\overline{\eta} \in H^0$. Имеем $p = \mu r' = 2\mu(2-\mu)$, $\mu(2-\mu)^{-1} < n(n-2)^{-1}$, $p < 2n(n-2)^{-1}$ при $n > 2$,

$$\|\xi\overline{\eta}\|_{L_\mu(D)} = \left(\int\limits_D \xi^\mu \overline{\eta}^\mu \, dx\right)^{1/\mu} \leqslant \left(\left(\int\limits_D \xi^{\mu r'} dx\right)^{1/r'} \left(\int\limits_D \overline{\eta}^2 dx\right)^{1/r}\right)^{1/\mu}$$

$$= \|\overline{\eta}\|_{H^0} \left(\int\limits_D \xi^p \, dx\right)^{1/p} \leqslant c\|\overline{\eta}\|_{H^0}\|\xi\|_{H^1}, \tag{2.2}$$

где константа $c = c(n, D, \mu)$. Последнюю оценку получили из теорем вложения для пространств Соболева (см. [6, с. 78]). Применив (2.2) к $(\partial\xi/\partial x_i)\eta$, $(\partial\eta/\partial x_i)\xi$, получаем требуемое.

Лемма 2.2. *Для $\xi \in H^1$, $g \in \mathcal{W}^* \cap H^0$ выполнено $\xi g \in H^{-1}$ и $\|\xi g\|_{H^{-1}} \leqslant c\|\xi\|_{H^1}\|g\|_{\mathcal{W}^*}$, где $c = c(n, D, \mu)$ – константа.*

Доказательство. Введем множество $BH^1 = \{\eta \in H^1 \cap L_\infty(D) : \|\eta\|_{H^1} \leqslant 1\}$. Имеем

$$\|\xi g\|_{H^{-1}} = \sup_{\eta\in BH^1} (\eta, \xi g)_{H^0} \leqslant \sup_{\eta\in BH^1} (\eta\xi, g)_{H^0} \leqslant \sup_{\eta\in BH^1} \|\eta\xi\|_{\mathcal{W}}\|g\|_{\mathcal{W}^*}$$

$$\leqslant c \sup_{\eta\in BH^1} \|\eta\|_{H^1}\|\xi\|_{H^1}\|g\|_{\mathcal{W}^*} \leqslant c\|\xi\|_{H^1}\|g\|_{\mathcal{W}^*}, \tag{2.3}$$

где c – константа из леммы 2.1. Отсюда получаем требуемое.

Введем параметр

$$\mathcal{P} = \left\{n, T, D, \delta, \sup_{x,t} |f(x,t)|, \sup_{x,t} |\beta(x,t)|, \sup_{x,t,i} \left|\frac{\partial\beta}{\partial x_i}(x,t)\right|\right\}. \tag{2.4}$$

3. Параболическое уравнение с коэффицентом из $\mathcal{X}$

Ниже будут введены параболические уравнения нового типа, которые в дальнейшем будут использованы для описания эволюции функционалов (1.6)–(1.7) (т.е. являются аналогом обратного уравнения Колмогорова). Новизна этих уравнений заключается в наличии коэффициента g, являющегося обобщенной функцией из $\mathcal{X}$.

Введем оператор $\mathcal{A}$ – производящий оператор процесса $y(t)$:

$$\mathcal{A}V = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)\frac{\partial V}{\partial x_i}(x). \tag{3.1}$$

Здесь b_{ij}, f_i, x_i- компоненты матрицы b и векторов f, x.

Будем рассматривать краевые задачи

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{A}V + gV = -\varphi, \quad V(x,t)|_{x\in\partial D} = 0, \quad V(x,T) = R(x). \tag{3.2}$$

Известно [6, §III.4], что в случае $g \in L_\infty(Q)$, $\varphi \in X^{-1}$, $R \in H^0 = L_2(D)$ эта задача однозначно разрешима в классе Y^1. В случае $g \in L_\infty(Q)$, $\varphi \in L_\infty(Q)$, $R \in W_2^2(D)$ эта задача однозначно разрешима в классе $W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$ (см. [6, §IV.9]).

Теорема 3.1. *Пусть заданы* $z \in \mathbf{C}$, $h \in \mathcal{X}$, $\varphi \in X^{-1}$, $R \in H^0$. *Пусть* $g_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $g \in \mathcal{X}$, $h_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $\varphi_\varepsilon \in L_\infty(Q)$, $R_\varepsilon \in H^0$ *– такие функции, что* $g_\varepsilon = zh_\varepsilon$, $g = zh$, $\|h_\varepsilon - h\|_{\mathcal{X}} \to 0$, $\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{X^{-1}} \to 0$, $\|R_\varepsilon - R\|_{H^0} \to 0$, $\varepsilon \to 0$. *Пусть* V_ε *– решения задачи* (3.2), *соответствующие* $g = g_\varepsilon$, $\varphi = \varphi_\varepsilon$. *Тогда последовательность* V_ε *имеет при* $\varepsilon \to +0$ *предел* V *в* Y^1, *равномерный по* $z : |z| \leqslant 1$, *определяемый однозначно, и при этом*

$$\|V\|_{Y^1} \leqslant c\left(\|\varphi\|_{X^{-1}} + \|R\|_{H^0}\right), \tag{3.3}$$

где $c > 0$*- константа, зависящая от параметров* $\mathcal{P}$, $\mu, \|g\|_{\mathcal{X}}$.

Отметим, что V в теореме для любого заданного g линейно зависит от φ, R. Кроме того, $V = 0$ в случае $\varphi = 0$, $R = 0$. Отсюда следует, что линеен и однороден оператор $\mathcal{K}(g)$, сопоставляющий решение $V = \mathcal{K}(g)\eta$ паре $\eta = (\varphi, R) \in X^{-1} \times H^0$. Введем операторы $L(g)$, $\mathcal{L}(g)$, такие, что $\mathcal{K}(g) = (L(g), \mathcal{L}(g))$, т.е. $V = L(g)\varphi + \mathcal{L}(g)R$ для соответствующего значения V из теоремы 3.1. По теореме, $L(g) : X^{-1} \to Y^1$, $\mathcal{L}(g) : H^0 \to Y^1$ – линейные непрерывные операторы; по лемме 2.2, $gV \in X^{-1}$.

Определение 3.1. *Говорим, что* V *есть решение в классе* Y^1 *задачи* (3.2) *с обобщенным* $g \in \mathcal{X}$.

Доказательство теоремы 3.1. Сначала покажем, что при подстановке $g = g_\varepsilon$ в (3.2) константа в неравенстве (3.3) для $V = V_\varepsilon$ не увеличивается при $\varepsilon \to +0$.

Ниже используем элементарное неравенство $uv \leqslant u^2/(2\gamma) + v^2\gamma/2$ $(\forall u, v, \gamma \in \mathbf{R}, \gamma > 0)$. Пусть $v \in H^1 \cap C^2(D)$. Имеем для любого $t \in [0, T]$ и оператора (3.1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, t)$ оценки

$$(v, \mathcal{A}v)_{H^0} = \left(v, \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{H^0} + \left(v, \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{H^0} =$$

$$-\sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, b_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{H^0} - \sum_{i,j=1}^n \left(v, \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)_{H^0} + \sum_{i=1}^n \left(v, f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)_{H^0}$$

$$\leqslant -\delta \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0} + \sum_{i,j=1}^n \|v\|_{H^0} \left\|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}\right\|_{L_\infty(Q)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right\|_{H^0}$$

$$+ \sum_{i=1}^n \|v\|_{H^0} \|f_i\|_{L_\infty(Q)} \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{H^0} \leqslant -\delta \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0} + \frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0}$$

$$+\frac{C}{\delta}\sum_{i,j=1}^{n}\|v\|^2_{H^0}\left(\left\|\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_i}\right\|^2_{L_\infty(Q)}+\|f_i\|^2_{L_\infty(Q)}\right), \tag{3.4}$$

где константа $C=C(n)$. Отсюда получаем, что для любого $v\in H^1$ для любого $t\in[0,T]$ выполнено

$$(v,\mathcal{A}v)_{H^0}\leqslant-\frac{3\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0}+C_1\|v\|^2_{H^0}, \tag{3.5}$$

где константа C_1 зависит от $\mathcal{P}$.

Для любого $v\in H^1$ для любого $t\in[0,T]$ выполнено

$$(v,\varphi_\varepsilon(\cdot,t))_{H^0}\leqslant\|v\|^2_{H^1}\|\varphi_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}}\leqslant C_D\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{H^0}\|\varphi_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^{-1}}$$

$$\leqslant\frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0}+C_2\|\varphi_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H^{-1}}, \tag{3.6}$$

где константа C_D зависит от n,D, константа C_2 зависит от параметра $\mathcal{P}$.

Для любого $v\in H^1$ выполнено

$$(v,g_\varepsilon v)_{H^0}\leqslant\|v^2\|_{\mathcal{W}}\|g_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^*}\leqslant C_3\|v\|_{H^1}\|v\|_{H^0}\|g_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^*}$$

$$\leqslant\frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}\|v\|^2_{H^1}+\widehat{C}_3\|v\|^2_{H_0}\leqslant\frac{\delta}{4}\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2_{H^0}+C_3\|v\|^2_{H_0}, \tag{3.7}$$

где константы $\widehat{C}_3$, C_3 зависят от $\sup_\varepsilon\|g_\varepsilon\|_{\mathcal{W}^*}$, δ, n,D.

Для решения $V=V_\varepsilon$ задачи (3.2) с $g=g_\varepsilon$, $\varphi=\varphi_\varepsilon$, $R=R_\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ имеем в силу (3.5)–(3.7)

$$\|V_\varepsilon(\cdot,t)\|^2_{H^0}-\|V_\varepsilon(\cdot,T)\|^2_{H^0}$$

$$=2\int_t^T\big(V_\varepsilon(\cdot,s),\mathcal{A}V_\varepsilon(\cdot,s)+g_\varepsilon V_\varepsilon(\cdot,s)+\varphi_\varepsilon(\cdot,s)\big)_{H^0}ds$$

$$\leqslant\int_t^T\left\{-\delta\sum_{i=1}^{n}\left\|\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_i}(\cdot,s)\right\|^2_{H^0}+C_4\big(\|V_\varepsilon(\cdot,s)\|^2_{H^0}+\|\varphi_\varepsilon(\cdot,s)\|^2_{H^{-1}}\big)\right\}ds, \tag{3.8}$$

где константа C_4 зависит от $\mathcal{P}$, μ, $\|g\|_{\mathcal{X}}$.

Отсюда сразу видно, что

$$\|V_\varepsilon\|_{Y^1} \leqslant C_*\big(\|\varphi_\varepsilon\|_{X^{-1}} + \|R_\varepsilon\|_{H^0}\big) \quad (\forall\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]), \tag{3.9}$$

где константа C_* зависит от $\mathcal{P}$, μ, $\|g\|_{\mathcal{X}}$.

Покажем, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$ сходится в себе в Y^1. Пусть $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$. Обозначим $W = V_{\varepsilon_1} - V_{\varepsilon_2}$. Имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}W + g_{\varepsilon_1}W = -\xi, \quad W(x,t)|_{x\in\partial D} = 0, \quad W(x,T) = R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}, \tag{3.10}$$

где

$$\xi = \varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2} + \big(g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\big)V_{\varepsilon_2}. \tag{3.11}$$

Имеем

$$\|\varphi_{\varepsilon_1} - \varphi_{\varepsilon_2}\|_{X^{-1}} \to 0, \quad \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}} \to 0, \tag{3.12}$$

поскольку последовательности $\{\varphi_{\varepsilon_i}\}$, $\{g_{\varepsilon_i}\}$ сходятся в себе и сходятся в соответствующих пространствах. По лемме 2.2,

$$\|(g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2})V_{\varepsilon_2}\|_{X^{-1}} = \int\limits_0^T \|(g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2})V_{\varepsilon_2}(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\,dt$$

$$\leqslant \int\limits_0^T \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{W}^*}\|V_{\varepsilon_2}(\cdot,t)\|_{H^1}dt \leqslant \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}}\int\limits_0^T \|V_{\varepsilon_2}(\cdot,t)\|_{H^{-1}}dt$$

$$= \|g_{\varepsilon_1} - g_{\varepsilon_2}\|_{\mathcal{X}}\|V_{\varepsilon_2}\|_{X^1} \to 0 \tag{3.13}$$

при $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$, ввиду (3.9), (3.12). Значит, $\|\xi\|_{X^{-1}} \to 0$. Применив оценку (3.9) к решению W краевой задачи (3.10), получаем, что

$$\|W\|_{Y^1} \leqslant C_*\,(\|\xi\|_{X^{-1}} + \|R_{\varepsilon_1} - R_{\varepsilon_2}\|_{H^0}) \to 0. \tag{3.14}$$

Отсюда видно, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$, $\varepsilon = \varepsilon_i \to 0$, сходится в себе (а значит, сходится) в банаховом пространстве Y^1. Оценка (3.3) следует из (3.9), из этой же оценки следует однозначность V.

Покажем, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$ сходится в Y^1 равномерно по $z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1$. Пусть $\varepsilon \to 0$. Обозначим $W = V_\varepsilon - V$. Имеем

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \mathcal{A}W + g_\varepsilon W = -\xi, \quad W(x,t)|_{x\in\partial D} = 0, \quad W(x,T) = R_\varepsilon - R, \tag{3.15}$$

где

$$\xi = \varphi_\varepsilon - \varphi + (g_\varepsilon - g)V. \tag{3.16}$$

Имеем

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{X^{-1}} \to 0, \quad \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}} = z\|h_\varepsilon - h\|_{\mathcal{X}} \to 0 \tag{3.17}$$

равномерно по $|z| \leqslant 1$. По лемме 2.2,

$$\|(g_\varepsilon - g)V\|_{X^{-1}} = \int_0^T \|(g_\varepsilon - g)V_{\varepsilon_2}(\cdot,t)\|_{H^{-1}}\,dt$$

$$\leqslant \int_0^T \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{W}^*}\|V(\cdot,t)\|_{H^1}dt \leqslant \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}} \int_0^T \|V(\cdot,t)\|_{H^{-1}}dt$$

$$= \|g_\varepsilon - g\|_{\mathcal{X}}\|V\|_{X^1} \to 0 \tag{3.18}$$

при $\varepsilon \to 0$ и $\|\xi\|_{X^{-1}} \to 0$ равномерно по $|z| \leqslant 1$. Применив оценку (3.3) к решению W краевой задачи (3.15), получаем, что

$$\|W\|_{Y^1} \leqslant C_*(\|\xi\|_{X^{-1}} + \|R_\varepsilon - R\|_{H^0}) \to 0. \tag{3.19}$$

Отсюда видно, что последовательность $\{V_\varepsilon\}$, $\varepsilon =\to 0$, сходится равномерно по $|z| \leqslant 1$. Теорема 3.1 доказана.

4. О классе гиперповерхностей, соответствующих элементам $\mathcal{X}$

Естественно предположить, что для изучения функционалов типа (1.6)–(1.7) пригодны уравнения (3.2) с такими $g \in \mathcal{X}$, $\varphi \in X^{-1}$, что в качестве функций g_ε, φ_ε, фигурирующих в теореме 3.1, можно взять функции $\varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$ для гиперповехности $\Gamma \subset D$ (множества $\Gamma(\varepsilon)$ определены в (1.3)–(1.4)). Ниже будет показано, что предел $\varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$ принадлежит $\mathcal{X}$ для Γ из достаточно широкого класса "кусочно C^1-гладких" гиперповерхностей.

Через $e^{(j)}$ обозначаем j-ый орт в $\mathbf{R}^n$. Введем функции $\gamma_j : \Gamma \to \mathbf{R}$, такие, что $\gamma_j(x) = |\cos\alpha_j(x)|$, где $\alpha_j(x)$ – угол между $e^{(j)}$ и нормалью к Γ в точке $x \in \Gamma$, если эта нормаль определена; $\gamma_j(x) = 0$ $(\forall j)$, если x – точка нарушения гладкости, где не определена нормаль.

Обозначим через $N(x,j)$ число пересечений гиперповерхности Γ лучом из $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ в $(x_1, ..., x_{j-1}, -\infty, x_{j+1}, ..., x_n)$, точки

$\widehat{x}_k(x,j)$ являются соответствующими точками пересечения; полагаем $N(x,j) = +\infty$, если луч проходит по касательной к Γ. Определим функции

$$G_j(x) = \sum_{k=1}^{N(x,j)} \frac{\gamma_j\left(\widehat{x}_k(x,j)\right)}{\|\mathbf{n}\left(\widehat{x}_k(x,j)\right)\|_E}. \tag{4.1}$$

Полагаем $G_j(x) = +\infty$, если $N(x,j) = +\infty$.

Теорема 4.1. *Пусть задано множество $\widehat{\Gamma} \subset \mathbf{R}^n$, являющееся объединением конечного числа многогранников $\widehat{\Gamma}_i$ размерности $n-1$ с попарно непересекающимися внутренностями, $\widehat{\Gamma} = \cup_{i=1}^{\mathcal{N}} \widehat{\Gamma}_i$. Пусть $\mathcal{M} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – некоторая непрерывная биективная функция, гиперповерхность $\Gamma \subset D$ такова, что $\Gamma = \mathcal{M}(\widehat{\Gamma})$. Предполагаем, что функции $\mathcal{M} : \widehat{\Gamma}_i \to \mathbf{R}^n$ являются C^1-гладкими биекциями, $\mathcal{M}(x) = x$, если x является вершиной какого-либо $\widehat{\Gamma}_i$, $|\mathbf{n}(x) - \mathbf{n}_i| \leqslant \delta_0$, если x принадлежит внутренней части Γ_i, $i = 1, ..., \mathcal{N}$. Здесь $\Gamma_i = \mathcal{M}(\widehat{\Gamma}_i)$, $\mathbf{n}(x)$ – нормаль к Γ в x, $\mathbf{n}_i$ нормаль к $\widehat{\Gamma}_i$, $\delta_0 \leqslant n^{-2}/2$ (ориентация нормалей фиксирована, $|\mathbf{n}(x)| = 1$, $|\mathbf{n}_i| = 1$). Тогда $N(x,j) < +\infty$ для всех j для п.в. x. Далее, определим обобщенные функции*

$$g = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial G_j}{\partial x_j}. \tag{4.2}$$

Тогда $g \in \mathcal{W}^*$ и функции $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$ сходятся к g в метрике $\mathcal{W}^*$.

Замечание 4.1. Предположения теоремы 4.1 выполнены для дисков, сфер и многих других кусочно C^1-гладких $n-1$-мерных поверхностей.

Замечание 4.2. Для изучения зависящих от времени поверхностей Γ можно использовать аналогичные зависящие от времени $g \in \mathcal{X}$.

Доказательство. Обозначим $S_0 = \cup\partial\Gamma_i$; имеем $\overline{\ell}_n(S_0) = 0$. Рассмотрим множество открытых областей $D_i \subseteq D$, таких, что $\overline{D} = \cup_{i=1}^{\mathcal{N}} \overline{D}_i$, $D_i \cap D_j = \emptyset$, если $i \neq j$, $\Gamma_i = \Gamma \cap \overline{D}_i$ (через $\overline{D}_i$, $\overline{D}$ обозначаем замыкания областей). Обозначим $\Gamma_i(\varepsilon) = \Gamma(\varepsilon) \cap \overline{D}_i$.

Обозначим $P_j(x)$ прямую линию, проходящую через x и параллельную $e^{(j)}$. Зададим функции $\psi(.,\varepsilon):\Gamma(\varepsilon)\to\Gamma\backslash S_0$, такие, что $\psi(x)\in\Gamma_i$, если $x\in\Gamma_i(\varepsilon)$, $|\psi(x,\varepsilon)-x|\leqslant c\varepsilon$, где константы c таковы, что эти функции существуют для всех $\varepsilon\leqslant\varepsilon_*$ для некоторого малого $\varepsilon_*>0$. Зададим функции $G_j^\varepsilon(x)$, $x=(x_1,...,x_n)$. Полагаем, что эти функции непрерывны по x_j. Полагаем, что эти функции $G_j^\varepsilon(x)$ постоянны на каждом отрезке $P_j(x)$, лежащем в $D\backslash\Gamma(\varepsilon)$ (константы свои для каждого такого отрезка), $G_j^\varepsilon(x)=0$, если $(x_1,...,x_{j-1},y_j,x_{j+1},...,x_n)\notin\Gamma(\varepsilon)$ $(\forall y_j<x_j)$ и $\partial G_j^\varepsilon(x)/\partial x_j=\varepsilon^{-1}\gamma_j^2(\psi(x,\varepsilon))$, $x\in P_j(x)\cap\Gamma(\varepsilon)$. Эти условия определяют $G_j^\varepsilon(x)$ однозначно.

Имеем $\sum_{j=1}^n\gamma_j^2(x)=1$ $(\forall x\in\Gamma\backslash S_0)$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^n\gamma_j^2(\psi(x,\varepsilon))=\frac{1}{\varepsilon},\quad x\in\Gamma(\varepsilon),$$

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x)=0,\quad x\notin\Gamma(\varepsilon),$$

$$\sum_{j=1}^n\frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x)=g_\varepsilon(x),\quad x\in D.$$

Имеем $\overline{\ell}_n(x\in\mathbf{R}^n:P_j(x)\cap S_0\neq\emptyset)=0$, $j=1,...,n$.

По предложению 2.1 [7], выполнено $N(j,x)<+\infty$ для п.в. x (Можно представить луч как решение тривиального обыкновенного дифференциального уравнения, тогда предложение 2.1 [7] можно переформулировать для данного случая). Ввиду кусочной C^1-гладкости Γ, имеем $N(x,j)\leqslant\mathrm{const}$ для п.в. x.

Пусть $\mathcal{N}=1$, $\Gamma=\Gamma_1$ таково, что $\mathbf{n}_1=(\mathbf{n}_1^{(1)},...,\mathbf{n}_1^{(n)})$, $|\mathbf{n}_1^{(j)}|=n^{-1/2}$, $j=1,..,n$, тогда $\gamma_j(x)\geqslant\delta_1$ $(\forall x\in\Gamma\backslash S_0)$ для некоторых $\delta_1>0$. Обозначим через $\mu_j(x,\varepsilon)$ длину минимального отрезка, лежащего в $\Gamma(\varepsilon)$ с концами в $\partial\Gamma(\varepsilon)$, проходящего через x и параллельного $e^{(j)}$. Имеем $\varepsilon^{-1}\mu_j(x,\varepsilon)\to\gamma_j^{-1}(x)\|\mathbf{n}(x)\|_E^{-1}$. Из непрерывности нормали на данной C^1-гладкой поверхности $\Gamma=\Gamma_1$ следует, что $G_i^\varepsilon(x)\to G_i(x)$ при $\varepsilon\to+0$ для п.в. x, $i=1,...,n$,

$$\sup_x|G_j^\varepsilon(x)|\leqslant\varepsilon^{-1}\mu_j(x,\varepsilon)\sup_x\gamma_j^2(\psi(x,\varepsilon))\leqslant c,$$

где константа c зависит от $\Gamma, \|\cdot\|_E$, $x \in P_j(x) \cap \Gamma(\varepsilon)$. По теореме Лебега, $\|G_i^\varepsilon - G_i\|_{L_\nu(D)} \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, $(\forall \nu > 1, i = 1, ..., n)$. Пусть $u \in C^2(D) \subset \mathcal{W}$. Имеем

$$\langle g_\varepsilon - g, u\rangle = -\sum_{j=1}^n \int\limits_D \left(G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx$$

$$+\sum_{j=1}^n \int\limits_{\partial D} \left(G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)\right) u(x) \cos(\mathbf{n}(x), e_j) dx$$

$$= -\sum_{j=1}^n \int\limits_D \left(G_j^\varepsilon(x) - G_j(x)\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) dx,$$

поскольку $G_j^\varepsilon \equiv G_j$ на ∂D. Значит, для $\nu = \mu(\mu-1)^{-1}$ имеем

$$|\langle g_\varepsilon - g, u\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^n \left(G_j^\varepsilon - G_j\right)_{L_\nu(D)} \|u\|_{\mathcal{W}}.$$

Отсюда получаем, что $g_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^\varepsilon}{\partial x_j}(x) \to g$ в $\mathcal{W}^*$.

В указанном частном случае теорема 4.1 доказана.

Пусть $\mathcal{N} = 1$, $\mathbf{n}_1$ – произвольный вектор. Введем новые координаты $\widetilde{x}_j = \sum_{k=1}^n \theta_{jk} x_k$, где $\theta \in \mathbf{R}^{n \times n}$ – такая матрица, что $\theta^{\mathrm{T}} = \theta^{-1}$ и $|\widetilde{\mathbf{n}}_1^{(j)}| = n^{-1/2}$, $\mathbf{n}_1^{(j)} \widetilde{\mathbf{n}}_1^{(j)} \geqslant 0$, $j = 1, .., n$, где $\widetilde{\mathbf{n}}_1 = (\widetilde{\mathbf{n}}_1^{(1)}, ..., \widetilde{\mathbf{n}}_1^{(n)})$ –соответствующая нормаль к $\theta\widehat{\Gamma}$ в новых координатах. Обозначим через $\widetilde{N}(x, j)$ число пересечений гиперповерхности $\widetilde{\Gamma} = \theta\Gamma$ лучом из $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n)$ в $(\widetilde{x}_1, ..., \widetilde{x}_{j-1}, -\infty, \widetilde{x}_{j+1}, ..., \widetilde{x}_n)$, точки $\widetilde{x}'_k(x, j)$ являются соответствующими точками пересечения; полагаем $\widetilde{N}(x, j) = +\infty$, если луч проходит по касательной к Γ. Тогда $\widetilde{N}(x, j) < +\infty$ для всех j для п.в. x. Определим функции

$$\widetilde{G}_j(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^{\widetilde{N}(\widetilde{x}, j)} \frac{\gamma_j\left(\widetilde{x}'_k(\widetilde{x}, j)\right)}{\|\mathbf{n}(\widetilde{x}'_k(\widetilde{x}, j)\|_{\widetilde{E}}}.$$

Здесь $\widetilde{\gamma}_j(\widetilde{x})$ – соответствующие функции, построенные по правилу, указанному перед формулировкой теоремы, но в новых координатах, $\|\widetilde{x}\|_{\widetilde{E}} = \|\theta^{-1}\widetilde{x}\|_E$ – норма в $\mathbf{R}^n$. Обозначим $\widetilde{g} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \widetilde{G}_j}{\partial \widetilde{x}_j}$. Как выше, получаем, что $\widetilde{g}_\varepsilon(\widetilde{x}) = \mathrm{Ind}\{x = \theta^{-1}\widetilde{x} \in \Gamma(\varepsilon)\} \to \widetilde{g}$

в $\mathcal{W}^*$. Обозначим $\Delta G_j(x)$ скачок функции G_j в x на прямой $P_j(x)$, в порядке возрастания x_j. Имеем $\Delta G_j(x) = \gamma_j(x)$. Обозначим $\Delta\widetilde{G}_j(\widetilde{x})$ аналогичные скачки в новых координатах. Из того, что преобразование координат является поворотом, видно, что $\Delta\widetilde{G}_j(\widetilde{x}) = \sum_{k=1}^n \theta_{jk}\Delta G_k(\theta^{-1}\widetilde{x})$ если $N(x,j) < +\infty$, $x \in \Gamma\backslash S_0$. Значит, $\langle\widetilde{\xi},\widetilde{g}\rangle = \langle\xi, g\rangle$ для $\widetilde{\xi} \in \mathcal{W}$, $\xi(x) = \widetilde{\xi}(\theta x)$. Следовательно, теорема 4.1 доказана в этом случае.

Пусть $\mathcal{N} > 1$, $g_\varepsilon^{(i)}(x) = \operatorname{Ind}\{x \in \Gamma_i(\varepsilon)\}$. Имеем $g_\varepsilon = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} g_\varepsilon^{(i)}$, $g_\varepsilon^{(i)}(x) \to g^{(i)} \in \mathcal{W}^*$ ин $\mathcal{W}^*$, $g^{(i)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^{(i)}}{\partial x_j}$, где $G_j^{(i)}$ построены так же, как в формулировке теоремы 4.1 для соответствующих $\Gamma = \Gamma_i$. Имеем $G_j(x) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} G^{(i)}(x)$. Отсюда следует доказательство теоремы 4.1.

5. Вероятностная интерпретация решения параболического уравнения для обобщенных g, φ

Рассмотрим процесс $y(t)$, удовлетворяющий уравнению Ито (1.1)–(1.2). Полагаем, что выполнены предположения п. 1. Всюду ниже полагаем, что случайный начальный вектор $a = y(0)$ имеет плотность распределения $\rho \in H^0 = L_2(D)$. Полагаем, что задана гиперповерхность Γ, для которой выполнены предположения теоремы 4.1, g – тот же элемент $\mathcal{X}$, что в теореме 4.1.

Пусть $\Gamma(\varepsilon)$ заданы (1.3)–(1.4), $l_\varepsilon(t)$ – величины, заданные (1.5).

Теорема 5.1. . а) *Для любого $t > 0$ существует такая случайная величина $\widehat{\mathbf{t}}(t)$, что $l_\varepsilon(t) \to \widehat{\mathbf{t}}(t)$ по распределению при $\varepsilon \to +0$.*

б) *Пусть $z \in \mathbf{C}$. Введем обобщенную функцию $g_1 = zg$. Пусть $V_1 = L(g_1)g$, $V = zV_1$ (иными словами, $V = zL(zg)g$). Тогда $V \in Y^1$, и*

$$1 + (V(\cdot,0),\rho)_{H^0} = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathbf{E}\exp\{z\, l_\varepsilon(T)\} = \mathbf{E}\exp\{z\,\widehat{\mathbf{t}}(T)\}, \qquad (5.1)$$

причем предел имеет место равномерно по $z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1$.

Следствие 5.1. $\mathbf{E}e^{k\widehat{\mathbf{t}}(t)} < +\infty$, $\mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(t)^k < +\infty$ $(\forall k > 0)$.

Замечание 5.1. В работе [3] было в принципе установлено существование локального времени пребывания на гладких гиперповерхностях общих многомерных процессов Ито. Точнее, там доказано существование непрерывных неубывающих процессов

$\widehat{\mathbf{t}}(t)$, возрастающих только на гиперповерхности и таких, что их можно получить как предел п.н. величин $\widehat{l}_\varepsilon(t) = \int_0^t \widehat{g}_\varepsilon(y(t)dt$, где $\widehat{g}_\varepsilon$ – некоторые неотрицательные функции; но был оставлен открытым вопрос, можно ли в общем случае взять можно взять $\widehat{g}_\varepsilon = g_\varepsilon$ (индикатор окрестности гиперповерхности с нормирующим множителем).

Пусть ниже $\widehat{\mathbf{t}}(t)$ – величины из теоремы 5.1.

Теорема 5.2.. *Пусть $z \in \mathbf{C}$, $\varphi \in X^{-1}$, функция $R \in L_2(D)$ измерима, функции $\varphi_\varepsilon \in L_2(Q)$, –измеримые функции, такие, как в теореме 3.1 для данного φ, $V = L(zg)\varphi + \mathcal{L}(zg)R$, тогда*

$$(V(\cdot,0),\rho)_{H^0} = \lim_{\varepsilon\to+0} \mathbf{E}\biggl\{ R(y(T))\mathrm{Ind}\{\tau_D > T\}\exp\{\, z\, l_\varepsilon(T)\} + \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} \exp\{\, z\, l_\varepsilon(t)\}\varphi_\varepsilon(y(t),t)dt\biggr\}. \tag{5.2}$$

Доказательство теоремы 5.2. Введем функции $R_\varepsilon \in C^2(D)$, такие, что $\|R_\varepsilon - R\|_{H^0} \to 0$. Введем функции $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$, $V_\varepsilon = L(zg_\varepsilon)\varphi + \mathcal{L}(zg_\varepsilon)R_\varepsilon$. Имеем $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$, в силу [6, §IV.9]. Введем функцию

$$W(t) = V_\varepsilon(y(t),t)\exp\biggl\{ z\int\limits_0^t g_\varepsilon\Bigl(y(r)\Bigr)\,dr\biggr\}.$$

Имеем

$$d_tW(t) = \exp\biggl\{ z\int\limits_0^t g_\varepsilon\Bigl(y(r)\Bigr)\,dr\biggr\} d_tV_\varepsilon(y(t),t) + zg_\varepsilon\Bigl(y(r)\Bigr)W(t)dt.$$

Поскольку $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$, для $d_tV_\varepsilon(y(t),t)$ применима формула Ито §II.10 [8]. Используя эту формулу, получаем

$$\mathbf{E}(W(\tau_D\wedge T) - W(0)) = \mathbf{E}(W(\tau_D\wedge T) - V_\varepsilon(y(0),0))$$
$$= -\mathbf{E}\int\limits_0^{\tau_D\wedge T} \exp\biggl\{ z\int\limits_0^t g_\varepsilon\Bigl(y(r)\Bigr)\,dr\biggr\}\varphi_\varepsilon(y(t),t)dt,$$

$$\mathbf{E}V_\varepsilon(y(0),0) = (V_\varepsilon(\cdot,0),\rho)_{H^0}$$

$$= \mathbf{E}\Big\{ R_\varepsilon(y(T))\mathrm{Ind}\{\tau_D > T\} \exp\left(z \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} g_\varepsilon\Big(y(t)\Big)\,dt \right)$$

$$+ \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} \exp\Big\{ z \int\limits_0^t g_\varepsilon\Big(y(r)\Big)\,dr \Big\} \varphi_\varepsilon(y(t),t)dt \Big\}. \qquad (5.3)$$

По теореме 3.1 имеем $V_\varepsilon \to V$ в Y^1. Отсюда получаем требуемое.

Доказательство теоремы 5.1. Докажем сначала п.б). Пусть $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$, $V_\varepsilon = zL(zg_\varepsilon)g_\varepsilon$. Это означает, что V_ε удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + \mathcal{A}V_\varepsilon + zg_\varepsilon V_\varepsilon = -zg_\varepsilon, \quad V_\varepsilon(x,t)|_{x\in\partial D} = 0, \quad V_\varepsilon(x,T) = 0. \quad (5.4)$$

Для $(x,s) \in Q$ из формулы Ито §ИИ.10 [8] имеем аналогично (5.3)

$$V_\varepsilon(x,s) = \mathbf{E} \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} g_\varepsilon\Big(y(t)\Big) \exp\left(z \int\limits_0^t g_\varepsilon\Big(y(r)\Big) \right) dr$$

$$= \mathbf{E}\exp\left(z \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} g_\varepsilon\Big(y(t)\Big)\,dt \right) - 1. \qquad (5.5)$$

Значит,

$$\phi_\varepsilon(z) = (V_\varepsilon(\cdot,0),\rho)_{H^0} + 1 = \mathbf{E}\exp\{z\, l_\varepsilon(T)\}. \qquad (5.6)$$

Отсюда получаем утверждение б) теоремы 5.1.

Доказательство утверждения а). По теореме 3.1 имеем $V_\varepsilon \to V$ в Y^1 равномерно по $z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1$. Введем функцию $\phi(z) = (V(\cdot,0),\rho)_{H^0} + 1$. По доказанному, $\phi_\varepsilon(z) \to \phi(z)$ равномерно по $z \in \mathbf{C} : |z| \leqslant 1$. По теореме Леви [9] это означает, что $\phi(z)$–характеристическая функция некоторой случайной величины $\widehat{\mathbf{t}}(T)$, к которой величины $l_\varepsilon(T)$ сходятся по распределению. Теорема 5.1 доказана.

Теорема 5.3. *Пусть* $V = L(0)g$, *тогда*

$$(V(\cdot,0),\rho)_{H^0} = \mathbf{E}\,\widehat{\mathbf{t}}(T).$$

Доказательство. Имеем $\mathbf{E}l_\varepsilon = (\rho, V_\varepsilon(\cdot,0)_{H^0}$, где $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$, $g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\mathrm{Ind}\{x \in \Gamma(\varepsilon)\}$. По теореме 5.1 $\mathbf{E}l_\varepsilon(T) \to \mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(T)$ при $\varepsilon \to +0$, по теореме 3.1 $V_\varepsilon \to V$ в Y^1. Отсюда получаем требуемое.

Замечание. Для немарковских процессов Ито $y(t)$ в предположениях [10] (т.е. когда $\beta dw(t) = \widetilde{\beta} d\widetilde{w}(t) + \widehat{\beta} d\widehat{w}(t)$, где f, β – случайные неупреждающие по отношению к $\widehat{w}(t)$ функции, $\widetilde{\beta}\widetilde{\beta}^T \geqslant \delta I > 0$), можно получить аналог теорем 5.1–5.3 при помощи подхода [10–11].

6. Явная формула для локального времени и сильная сходимость

Пусть выполнены предположения п. 5, g – тот же элемент $\mathcal{X}$, что в теореме 4.1. Сохраняем все обозначения п. 5 (в частности, для $l_\varepsilon(T), g_\varepsilon$).

Пусть ниже β_j, $j = 1, ..., n$ – столбцы матрицы β в (1.1), $\mathcal{F}_t$-поток σ-алгебр событий, порожденных $\{a, w(s), s \leqslant t\}$. Пусть $\mathbf{L}(g) : X^{-1} \to H^0$ – оператор, сопоставляющий функции $\varphi \in X^{-1}$ значение $V(x,t)|_{t=0} = \mathbf{L}(g)\varphi$.

Теорема 6.1. *Пусть начальный вектор* a *имеет плотность распределения* $\rho \in L_\infty(D)$. *Пусть* $V = L(0)g$. *Тогда* $V \in Y^1$ *и* $\mathbf{E}|l_\varepsilon(T) \to \widehat{\mathbf{t}}(T)|^2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, *где случайная величина*

$$\widehat{\mathbf{t}}(T) = V(a,0) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial V}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t),t)\,dw_j(t). \qquad (6.1)$$

Здесь под $\partial V/\partial x$ *понимаем измеримую по Борелю функцию, являющуюся представителем класса эквивалентности* $\partial V/\partial x \in L_2(Q)$. *Функции*

$$\xi_j(t) = \frac{\partial V}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t),t)$$

таковы, что $\mathbf{E}\int_0^T |\xi_j(t)|^2 dt < +\infty$ $(\forall j)$ *и для некоторой последовательности прогрессивно измеримых относительно потока* $\mathcal{F}_t$ *случайных функций времени* $\xi_{\varepsilon,j}(t)$, $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, *выполнено* $\mathbf{E}\int_0^T |\xi_{j,\varepsilon}(t) - \xi_j(t)|^2 dt \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$, $\sup_\varepsilon \mathbf{E}\int_0^T |\xi_{j,\varepsilon}(t)|^2 dt < +\infty$ $(\forall j)$.

Пусть $p = \mathbf{L}(0)^*\rho$. *Тогда*

$$\mathbf{E}\int_0^{\tau_D \wedge T} \varphi(y(t),t) = \int_Q \varphi(x,t)p(x,t)dxdt$$

для любой функции $\varphi \in C(Q)$. *Иными словами,* $p(x,t)$ – *плотность распределения процесса* $y(t)$, *обрывающегося на* ∂D,

Следствие 6.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 6.1,* $p = \mathbf{L}(0)^*\rho$, *Тогда в обозначениях теоремы* 6.1 *имеем*

$$\mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(T)^2 = \int_D |V(x,0)|^2 \rho(x)\, dx + \sum_{j=1}^n \int_Q \left|\frac{\partial V}{\partial x}(x,t)\beta_j(x,t)\right|^2 p(x,t)\, dx\, dt.$$

Лемма 6.1. *Пусть выполнены предположения теоремы* 6.1, $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$, $\xi_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t),t)$. *Тогда*

$$l_\varepsilon(T) = V_\varepsilon(a,0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \xi_{j,\varepsilon}(t)\, dw_j(t) \tag{6.2}$$

и $\mathbf{E}|l_\varepsilon(T) - \widehat{\mathbf{t}}(T)|^2 \to 0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доказательство леммы 6.1. Пусть p – то же, что в следствии 6.1. Заметим, что $p \in L_\infty(Q)$. Для $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$ имеем $g_\varepsilon = -\partial V_\varepsilon/\partial t - AV_\varepsilon$. По теореме 9.1 §IV.9 [6] $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$ $(\forall q > 1)$. Для $x \in D$ из формулы Ито §II.10 [8] имеем

$$-V_\varepsilon(y(0),0) = V_\varepsilon(y(\tau_D \wedge T, \tau_D \wedge T) - V_\varepsilon(a,0) =$$
$$-\int_0^{\tau_D \wedge T} g_\varepsilon(y(t))\, dt + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \xi_j(y(t),t)\, dw_j(t).$$

Следовательно,

$$l_\varepsilon(T) = V_\varepsilon(y(0),0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_D \wedge T} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t),t)\, dw_j(t).$$

Отсюда получаем (6.2). Функция $\partial V_\varepsilon(x,t)/\partial x$ непрерывна, отсюда следует, что функции $\xi_{\varepsilon,j}(t)$ прогрессивно измеримых относительно потока $\mathcal{F}_t$.

Обозначим $W_\varepsilon = V_\varepsilon - V$. Имеем

$$\mathbf{E}\int_0^{\tau_D\wedge T} |\xi_{j,\varepsilon}(t)-\xi_j(t)|^2\,dt \leqslant c\mathbf{E}\int_0^{\tau_D\wedge T}\left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\right|^2 dt$$

$$\leqslant c\int_Q \left|\frac{\partial W_\varepsilon}{\partial x}(x,t)\right|^2 p(x,t)\,dx\,dt \leqslant c\|p\|_{L_\infty(Q)}\|W_\varepsilon\|_{Y^1}\to 0, \qquad (6.3)$$

$$\mathbf{E}|V_\varepsilon(a,0)-V(a,0)|^2 \leqslant c\int_D \|W_\varepsilon(x,0)\|^2\rho(x)dx \leqslant c\|\rho\|_{L_\infty(D)}\|W_\varepsilon\|_{Y^1}\to 0 \qquad (6.4)$$

для некоторой константы $c>0$ в силу теоремы 3.1. Лемма 6.1 доказана.

Доказательство теоремы 6.1 прямо следует из леммы 6.1 и из (6.2)–(6.4).

В случае стационарных коэффициентов выведем аналог формулы Танаки.

Теорема 6.2. *Пусть $\rho\in L_\infty(D)$ и $\beta(x,t)\equiv\beta(x)$, $f(x,t)\equiv f(x)$, функция $\beta(x)$ непрерывна. Пусть $F(x)$ – решение задачи $\mathcal{A}F=g$, $F|_{\partial D}=0$ в классе H^1. Тогда $F\in C(D)$ и п.н.*

$$\widehat{\mathbf{t}}(T) = F(y(\tau_D\wedge T)) - F(a) - \sum_{j=1}^n\int_0^{\tau_D\wedge T}\frac{\partial F}{\partial x}(y(t))\beta_j(y(t))\,dw_j(t). \quad (6.5)$$

Здесь $\partial F/\partial x$ – измеримый по Борелю вариант функции $L_2(Q)$. Функции

$$\widehat{\xi}_j(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(y(t))\beta_j(y(t))$$

таковы, что $\mathbf{E}\int_0^T|\widehat{\xi}_j(t)|^2dt<+\infty$ $(\forall j)$ и $\mathbf{E}\int_0^T|\widehat{\xi}_{j,\varepsilon}(t)-\widehat{\xi}_j(t)|^2dt\to 0$ для некоторой последовательности функций $\widehat{\xi}_{\varepsilon,j}(t)$, $\varepsilon=\varepsilon_k\to 0$, прогрессивно измеримых по отношению к потоку $\mathcal{F}_t$ и таковы, что $\sup_\varepsilon\mathbf{E}\int_0^T|\widehat{\xi}_{j,\varepsilon}(t)|^2dt<+\infty$ $(\forall j)$.

Доказательство. Пусть F_ε – решение задачи $\mathcal{A}F_\varepsilon = g_\varepsilon$, $F_\varepsilon|_{\partial D} = 0$ в классе H^1. Для g выполнено (4.1), (4.2). По теореме III.14.1 [12], $F \in C(D)$, $F_\varepsilon \in C(D)$ и

$$\|F_\varepsilon - F\|_{C(D)} \to 0, \quad \|F_\varepsilon - F\|_{H^1} \to 0. \tag{6.6}$$

Пусть $V_\varepsilon = L(0)g_\varepsilon$, $U_\varepsilon = V_\varepsilon + F_\varepsilon$. Имеем $F_\varepsilon \in W_q^2(D)$, $\forall q > 1$ [12, §IV.9], $U_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $V_\varepsilon \in W_q^{2,1}(Q)$, $\forall q > 1$ [6, §IV.9],

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}(x,t) + \mathcal{A}U_\varepsilon(x,t) = 0, \quad U_\varepsilon(x,t)|_{x\in\partial D} = 0, \quad U_\varepsilon(T,x) = F(x). \tag{6.7}$$

Обозначим

$$\widehat{\xi}_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\beta_j\,(y(t)), \quad \widehat{\xi}_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial F_\varepsilon}{\partial x}(y(t))\beta_j\,(y(t)). \tag{6.8}$$

По лемме 6.1,

$$l_\varepsilon(T) = U_\varepsilon(a,0) - F_\varepsilon(a) + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} \xi_{j,\varepsilon}(t)\,dw_j(t) \tag{6.9}$$

Имеем

$$\xi_{j,\varepsilon}(t) = \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t)) - \widehat{\xi}_{j,\varepsilon}(t), \tag{6.10}$$

$$F_\varepsilon\left(y(\tau_D\wedge T)\right) = U_\varepsilon\left(y(\tau_D\wedge T, \tau_D\wedge T)\right). \tag{6.11}$$

По формуле Ито §II.10 [8] и (6.7), имеем

$$U_\varepsilon\left(y(\tau_D\wedge T)\right) = U_\varepsilon(a,0) + \sum_{j=1}^n \int\limits_0^{\tau_D\wedge T} \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(y(t),t)\beta_j(y(t))\,dw_j(t). \tag{6.12}$$

Из (6.6)–(6.12) получаем доказательство теоремы 6.2.

Замечание 6.1. Аналог теоремы 6.2 можно получить для $D = \mathbf{R}^n$. В этом случае (6.5) выполнено для функции F, являющейся решением уравнения $\mathcal{A}F = g$ в классе функций полиномиального порядка роста. Известную формулу Танаки для броуновского локального времени можно записать в виде (6.5), где $n = 1$, $D = \mathbf{R}$, $y(t) = a + w(t)$, $\Gamma = \{0\}$, $F(x) = 2x^+$.

7. Непрерывность локального времени

Теорема 7.1. *Пусть имеется набор гиперповерхностей* $\{\Gamma\} = \{\Gamma_h\}$ $\Gamma_h = \Gamma_0 + h$, $h \in \Delta$, *где* $\Delta \subset \mathbf{R}^n$ *есть некоторое открытое множество,* $\Gamma_h \subset D$ $(\forall h)$, $0 \in \Delta$. *Пусть выполнены предположения теоремы* 6.1 *и сохранены обозначения этой теоремы. Пусть* $\widehat{\mathbf{t}}(T) = \widehat{\mathbf{t}}(T,h)$ – *соответствующие величины для* $\Gamma = \Gamma_h$, $h \in \Delta$. *Тогда* $\mathbf{E}|\widehat{\mathbf{t}}(T,h) - \widehat{\mathbf{t}}(T,0)|^2 \to 0$ *при* $h \to 0$.

Доказательство. Пусть $g = g^h$, G_j^h – соответствующие функции (4.2), $V^h = L(0)g^h$, $W^h = V^h - V^0$. Имеем $g^h = \sum_{j=1}^n \frac{\partial G_j^h}{\partial x_j}$. Очевидно, $G_j^h(x) \equiv G_j^0(x-h)$, $\|G_j^h - G_j^0\|_{L_2(D)} \to 0$ при $h \to 0$, $j = 1,...,n$, тогда $\|g^h - g^0\|_{H^{-1}} \to 0$. По теоремам 3.1, 6.1, выполнено

$$\mathbf{E}|\widehat{\mathbf{t}}(T,h) - \widehat{\mathbf{t}}(T,0)|^2 \leqslant c\mathbf{E}|V^h(a,0) - V^0(a,0)|^2 + c\mathbf{E}\int\limits_0^{\tau_D \wedge T} \left|\frac{\partial W^h}{\partial x}(y(t),t)\right|^2 dt$$

$$\leqslant c\int\limits_D \|W^h(x,0)\|^2 \rho(x)dx + c\int\limits_Q \left|\frac{\partial W^h}{\partial x}(x,t)\right|^2 p(x,t)\,dx\,dt$$

$$\leqslant c\|p\|_{L_\infty(Q)}\|W^h\|_{Y^1} \leqslant c\|p\|_{L_\infty(Q)}\|g^h - g^0\|_{H^{-1}} \to 0$$

для некоторой константы $c > 0$. Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2. *Пусть* $T_0 \in [0,T]$, $T_1 \in [0,T]$. *Пусть сохраняются предположения и обозначения теоремы* 6.1. *Тогда* $\mathbf{E}|\widehat{\mathbf{t}}(T_1) - \widehat{\mathbf{t}}(T_0)|^2 \to 0$ *при* $T_1 \to T_0$.

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in X^{-1}$, $\varphi_1 \in X^{-1}$, $\varphi_i(t) = g$ для $t \leqslant T_i$, $\varphi_i(t) = 0$ для $t > T_i$, $i = 0,1$. Пусть $V_i = L(0)\varphi_i$, $W = V_1 - V_0$. Очевидно, $\|\varphi_1 - \varphi_0\|_{X^{-1}} \to 0$. По теореме 3.1, $\|W\|_{Y^1} \to 0$. Далее доказательство теоремы 7.2 аналогично доказательству теоремы 7.1.

Теорема 7.3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 6.2. *Тогда существует вариант* $\widehat{\mathbf{t}}(T)$, *п.н. непрерывный по* T.

Доказательство является прямым следствием из (6.5).

8. Задача оптимального управления

Ниже полагаем, что случайный начальный вектор a имеет плотность распределения $\rho \in H^0 = L_2(D)$. Полагаем, что задана гиперповерхность $\Gamma \subset D$, D–область, такая, как указано в п. 1, для которой выполнены предположения теоремы 4.1, g – тот же элемент $\mathcal{X}$, что в теореме 4.1.

Рассмотрим управляемое стохастическое уравнение Ито

$$dy(t) = f\Big(y(t), u\big(y(t), t\big), t\Big)dt + \beta\Big(y(t), t\Big)dw(t), \tag{8.1}$$

$$y(0) = a. \tag{8.2}$$

Здесь $y(t)$ – вектор состояния размерности n, $u\big(y(t), t\big)$ – вектор управления размерности m, винеровский процесс $w(t)$ имеет размерность n. Случайный вектор a не зависит от $w(t)$ для $t > 0$.

Функции $f(x, u, t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, $\beta(x, t) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n\times n}$, ограничены и измеримы. Функция $f(x, u, t)$ непрерывна по u для каждого x, t. Полагаем, что матрица $b(x, t) = {}^1\!/_2\,\beta(x, t)\,\beta(x, t)^{\mathrm{T}}$ равномерно невырождена, производная $\partial\beta/\partial x$ существует и ограничена.

Пусть $\Delta \subset \mathbf{R}^m$ – заданное компактное множество, $T > 0$ – некоторое число, $Q = D \times (0, T)$. Через U_0 обозначим класс допустимых управлений, состоящий из всех измеримых функций $u(x, t) : Q \to \mathbf{R}^m$ таких, что $u(x, t) \in \Delta$ для почти всех $(x, t) \in Q$.

Отметим, что для каждого $u(\cdot) \in U_0$ функция $f(x, t) = f(x, u(x, t), t)$ удовлетворяет предположениям п. 1. Следовательно, существует однозначное по распределению слабое решение уравнения (8.1)–(8.2). Для соответствующего решения V задачи (3.2) будем использовать обозначение $V = L(u, g)\varphi + \mathcal{L}(u, g)R$. По теореме 3.1, $L(u, g) : Y^{-1} \to Y^1$, $\mathcal{L}(u, g) : H^0 \to Y^1$ – линейные непрерывные операторы. Пусть $c_0 = 1$ или $c_0 = -1$. Для каждого $u(\cdot) \in U_0$ задана случайная величина $\widehat{\mathbf{t}}(T)$ (так, как указано в теореме 5.1 или так, как указано в теореме 6.1, для $\rho \in L_\infty(D)$). Зададим функционал $\Phi_0\big(u(\,\cdot\,)\big) = c_0\mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(T) = (V(\cdot, 0), \rho)_{H^0}$, где $V = L(u, 0)g$.

Расссмотрим задачу оптимального управления

$$\Phi_0\big(u(\,\cdot\,)\big) = c_0\mathbf{E}\widehat{\mathbf{t}}(T) \to \min_{u(\cdot)} \tag{8.3}$$

Оказывается, для этой задачи существует оптимальное управление и для оптимального решения выполнен некоторый аналог уравнения Беллмана.

Теорема 8.1. *Существует управление* $\widehat{u}(\cdot) \in U_0$, *являющееся оптимальным в классе* U_0 *в задаче* (8.3) *одновременно для всех плотностей* $\rho \in L_2(D)$ *(являющихся плотностью распределения начального вектора* a*). Функция* $\widehat{V} = L(\widehat{u}, 0)g$ *для п.в.* $(x,t) \in Q$ *удовлетворяет соотношению*

$$\frac{\partial \widehat{V}}{\partial x}(x,t)f(x,\widehat{u}(x,t),t) \leqslant \frac{\partial \widehat{V}}{\partial x}(x,t)f(x,v,t) \quad (\forall v \in \Delta). \tag{8.4}$$

Справедливо также и более общее утверждение. Пусть задана вещественная обобщенная функция $\varphi \in X^{-1}$ и функционал

$$\Phi\big(u(\,\cdot\,))\big) = \mathbf{E}V(a,0) = \int\limits_D V(x,0)\rho(x)dx = (V(\cdot,0),\rho)_{H^0}, \tag{8.5}$$

где $V = L(u,0)\varphi$.

Теорема 8.2. а) *Цуществует управление* $\widehat{u}(\cdot) \in U_0$, *являющееся оптимальным в классе* U_0 *в задаче*

$$\Phi\big(u(\,\cdot\,)\big) \to \min_{u(\cdot)} \tag{8.6}$$

для всех плотностей $\rho \in L_2(D)$ *одновременно. Функция* $\widehat{V} = L(\widehat{u},0)\varphi$ *для п.в.* $(x,t) \in Q$ *удовлетворяет соотношению* (8.4).

б) *Любое управление* $\widehat{u}(\cdot) \in U_0$, *для которого выполнено* (8.4) *с* $\widehat{V} = L(\widehat{u},0)\varphi$ *для п.в.* $(x,t) \in Q$, *является оптимальным в классе* U_0 *в задаче* (8.6) *для всех плотностей* $\rho \in L_2(D)$ *одновременно.*

Уравнение $\widehat{V} = L(\widehat{u},0)\varphi$ *вместе с (8.4) составляют уравнение Беллмана для задачи (8.6).*

Доказательство теорем 8.1–8.2. Теорема 8.2 является прямым следствием теоремы 2.1 [13], относящейся к более общей задаче с $T \leqslant +\infty$ (если положить $\kappa = 0$ в обозначениях [12]). Теорема 8.1 является частным случаем теоремы 8.2.

Литература

1. А. Н. Бородин, *Броуновское локальное время.* Успехи матем. наук **44**, вып. 2 (266) (1989), 7–48.

2. D. Geman, J. Horovitz, *Occupation density*. The Annals of Probability **8**, No. 1 (1980), 1–67.
3. R. F. Bass, *Occupation time of d-dimensional semimartingales*. Seminar on Stochastic Processes. 1982. Progr. Prob. Stat. **5** (1983), 51–96.
4. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **195** (1994), 285 с.
5. М. Жанблан–Пике, А. Н. Ширяев, *Оптимизация потока дивидентов*. Успехи матем. наук **50**, вып.2 (302) (1995), 25–46.
6. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*. М., 1967.
7. Н. Г. Докучаев, *Интегральные оценки для решений обыкновенных дифференциальных уравнений при обрыве на границе области*. Дифференц. уравн. **28**, No. 11 (1992), 1890–1900.
8. Н. В. Крылов, *Управляемые процессы диффузионного типа*. М., 1977.
9. Т. Хида, *Броуновское движение*. М., 1987.
10. Н. Г. Докучаев, *Краевые задачи для функционалов от процессов Ито*. Теор. вероятн. и ее примен. **36**, No. 3 (1991), 464–481.
11. Н. Г. Докучаев, *Распределения процессов Ито: оценки для плотности и для условных ожиданий интегральных функционалов*. Теор. вероятн. и ее примен. **39**, No. 4 (1994), 825–833.
12. О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. М., 1968.
13. Н. Г. Докучаев, *Параболические уравнения без граничного условия Коши и задачи управления диффузионными процессами. Ч. 2.*. Дифференц. уравн. **31**, No. 8 (1995), 1409–1418.

Dokuchaev N. G. Equations for probability distributions of local time on surface for diffusion processes and control problems.

The paper studies local time on surface for general n-dimensional diffusion process. Analogs of Kolmogorov–Fokker–Planck equations for the characteristic function and probability distributions of local time are derived and investigated for a wide class of $(n-1)$-dimensional surfaces. A general explicit formula which is an analog of the Tanaka formula is presented. Optimal control problems with functionals which depend on local time are investigated.

Институт математики и механики
С.-Петербургского государственного
университета

Поступило 2 ноября 1997 г.