В. А. Егоров, В. И. Поздняков

О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ УРЕЗАННЫХ СУММ

Пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых случайных величин. В работах [1–4] при различных предположениях исследовался вопрос о том, сколько экстремальных слагаемых среди $\{X_n\}$ надо отбросить для справедливости результатов типа закона повторного логарифма для оставшихся цензурированных слагаемых. В данной работе для симметричных независимых одинаково распределенных случайных величин при абсолютном цензурировании этот вопрос решается в отношении функционального закона повторного логарифма.

Итак, пусть $\{X, X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин с общей функцией распределения F, $\mathbf{E}\,X^2 = \infty$. Пусть для каждого $n \geqslant 1$ $|X_{n,1}| \leqslant \ldots \leqslant |X_{n,n}|$ – абсолютные порядковые статистики, построенные по первым n из этих случайных величин.

Пусть $k(n)$ – такая последовательность неотрицательных целых чисел, что

$$k(n) \sim \alpha_n, \quad \text{где} \quad \alpha_n \nearrow \infty \quad (n \to \infty), \tag{1}$$

$$k(n)/n \sim \beta_n, \quad \text{где} \quad \beta_n \searrow 0 \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

$$k(n) \leqslant n, \quad k(n)/\ln_2 n \to \infty \quad (n \to \infty). \tag{3}$$

Пусть функция распределения F удовлетворяет следующему условию (4)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^2 \mathbf{P}\,(|X| > t)}{\mathbf{E}\,(X^2, |X| \leqslant t)} < M. \tag{4}$$

Введем обозначения:

$$T_{n,k} = X_{n,1} + \ldots + X_{n,n-k(n)+1}, \quad T^2_{n,k} = X^2_{n,1} + \ldots + X^2_{n,n-k(n)+1},$$

Эта работа частично поддержана грантами Российского Фонда Фундаментальных Исследований No. 96-01-00547 и No. 96-01-00549.

$$q(s) = \min\left\{t : \mathbf{P}\left(X^2 > t\right) = s\right\}, \quad \text{где} \quad 0 < s < 1,$$

$$b_n(\beta) = q(\beta\beta_n), \quad \text{где} \quad \beta > 0,$$

$$S_n(\beta) = \sum_{j=1}^{n} X_j\, I\{|X_j|^2 \leqslant b_n(\beta)\},$$

$$S_n^2(\beta) = \sum_{j=1}^{n} X_j^2\, I\{|X_j|^2 \leqslant b_n(\beta)\},$$

$$B_n(\beta) = \mathbf{E}\ S_n^2(\beta), \quad B_n = B_n(1).$$

Пусть множество K состоит из всех абсолютно непрерывных функций $h \in C[0,1]$ (с sup-нормой), таких, что

1) $h(0) = 0$,

2) $\int_0^1 [h'(t)]^2\, dt \leqslant 1$.

В этой работе получен закон повторного логарифма Штрассена для указанных сумм $T_{n,k}$.

Теорема 1. *Определим кусочно-линейные функции $f_n(t)$ следующим образом:*

$$f_n\left(\frac{B_m}{B_n}\right) = \frac{T_{m,k}}{\sqrt{2B_n \ln_2 B_n}} \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \ldots, n,$$

$f_n(t)$ линейна на интервалах

$$\frac{B_m}{B_n} \leqslant t \leqslant \frac{B_{m+1}}{B_n}.$$

Пусть последовательность $k(n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Если функция распределения F удовлетворяет условию (4), то с вероятностью единица последовательность функций $\{f_n(t)\}$, рассматриваемая как подмножество пространства $C[0,1]$,

1) *относительно компактна,*

2) *имеет в качестве предельного множество K.*

Наше доказательство основано на следующих двух результатах, полученных в [5] и [6].

Теорема 2. *Пусть последовательность $k(n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Если функция распределения F удовлетворяет условию (4), то*

$$\lim_{n\to\infty} T_{n,k}^2/B_n = 1 \quad \text{п.н.}$$

Кроме того,

1) *с вероятностью единица для всех достаточно больших n*

$$b_n(\beta) < X_{n,n-k(n)+1}^2 < b_n(\gamma), \quad \text{где} \quad \beta > 1 > \gamma;$$

2) *для любого $\beta > 0$ для всех достаточно больших n*

$$\frac{\beta}{M} b_n(\beta)\, k(n) \leqslant B_n(\beta) \leqslant n^{M+3},$$

где $M > 0$ – некоторая постоянная.

3) *для любого $\varepsilon > 0$ существует $\beta > 1$, такое, что для всех достаточно больших n*

$$B_n(\beta^{-1})/B_n < 1 + \varepsilon, \quad B_n/B_n(\beta) < 1 + \varepsilon;$$

4) *для любого $\beta > 1$ с вероятностью единица*

$$\lim_{n\to\infty} S_n^2(\beta)/B_n(\beta) = 1;$$

5) *для любого $\beta > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} B_n(\beta)/B_{n+1}(\beta) = 1.$$

Из функционального закона повторного логарифма для усеченных сумм (см. [6]), с учетом соотношения (2) и пункта 2 Теоремы 2, получим, что для $S_n = S_n(1)$ справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Пусть*

$$f_n\Big(\frac{B_m}{B_n}\Big) = \frac{S_m}{\sqrt{2B_n \ln_2 B_n}} \quad \text{для} \quad m = 0, 1, \dots, n,$$

$f_n(t)$ линейна на интервалах

$$\frac{B_m}{B_n} \leqslant t \leqslant \frac{B_{m+1}}{B_n}.$$

Пусть последовательность $k(n)$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Если для функции распределения F выполняется условие (4), *то с вероятностью единица последовательность функций* $\{f_n(t)\}$, *рассматриваемая как подмножество* $C[0,1]$,

1) *относительно компактна,*
2) *имеет своим предельным множеством множество* K.

Таким образом, чтобы установить наш главный результат, достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 1. *При выполнении условий Теоремы* 1

$$\limsup_{n\to\infty} |T_{n,k} - S_n| \sqrt{2B_n \ln_2 B_n} = 0 \quad \text{п.н.}. \tag{5}$$

Нам потребуется следующий результат.

Лемма 2. *Пусть* $\{X_j\}_{j\geqslant 1}$ – *последовательность неотрицательных чисел,* $\{\xi_j\}$ – *последовательность независимых случайных величин, таких, что*

$$\mathbf{P}\,(\xi_j = X_j) = \mathbf{P}\,(\xi_j = -X_j) = \frac{1}{2};$$

$\{d_j \geqslant 0,\, b_j \geqslant 0\}$ – *числовые последовательности,*

$$c_{2n} = \max(d_1, b_1, \ldots, d_n, b_n), \quad c_1 = \min(d_1, b_1, \ldots, d_n, b_n).$$

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j I\{X_j^2 \leqslant x\}.$$

Тогда для всех $a > 0$

$$\mathbf{P}\left(\max_{k\leqslant n} |(S_k(d_k) - S_k(b_k)| > a\right) \leqslant 8\mathbf{P}\left(|S_n(c_{2n}) - S_n(c_1)| > a/2\right).$$

Доказательство Леммы 2. По “лемме о событиях” (см. [7], с. 328) мы имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n} [S_n(d_i) - S_n(b_i)] > a\right)$$

$$= \mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n} [S_i(d_i) - S_i(b_i) + S_n(d_i) - S_n(b_i) - S_i(d_i) + S_i(b_i)] > a\right)$$

$$\geqslant \mathbf{P}\left(\bigcup_{i\leqslant n} \{S_i(d_i) - S_i(b_i) > a\} \bigcap \{S_n(d_i) - S_n(b_i) - S_i(d_i) + S_i(b_i) \geqslant 0\}\right)$$

$$\geqslant \mathbf{P}\Big(\bigcup_{i\leqslant n}\{S_i(d_i)-S_i(b_i)>a\Big)/2=\mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n}[S_i(d_i)-S_i(b_i)]>a\right)/2.$$

С другой стороны, если

$$\{c_i\}_{1\leqslant i\leqslant 2n},\ c_1\leqslant\ldots\leqslant c_{2n}\ \ -$$

неубывающая последовательность, построенная путем упорядочения последовательности $\{d_1,b_1,\ldots,d_n,b_n\}$, то, используя симметрию и Лемму 3 из [6], мы имеем

$$\mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n}|S_i(d_i)-S_i(b_i)|>a\right)\leqslant 2\mathbf{P}\left(\max_{i\leqslant n}|S_n(d_i)-S_n(b_i)|>a\right)$$

$$\leqslant 2\mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant i,j\leqslant 2n}|(S_n(c_i)-S_n(c_j)|>a\Big)\leqslant 8\mathbf{P}\left(|S_n(c_{2n})-S_n(c_1)|>a/2\right).$$

Заметим, что, если $\{x_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ не убывает, то

$$S_1(x_1),\ S_2(x_2)-S_1(x_1),\ldots,S_n(x_n)-S_{n-1}(x_{n-1})\ \ -$$

независимые случайные величины.

Доказательство Леммы 1. Зафиксируем последовательность квадратов $\{X_j^2\}$ и сначала докажем (5) в этом “условном” вероятностном пространстве.

Пусть $\{n_r\}$ – такая последовательность индексов, что

$$B_{n_r}\sim\gamma^r,\quad \gamma>1.$$

Достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\gamma>1$, что

$$\sum_r \mathbf{P}'\Big(\max_{n_r<n\leqslant n_{r+1}}|T_{n,k}-S_n|>\varepsilon\sqrt{2B_{n_r}\ln_2 B_{n_r}}\Big)<\infty,$$

$$\mathbf{P}\ \ -\text{п.н.}\tag{6}$$

(Здесь $\mathbf{P}'$ обозначает условную вероятность при фиксированных $\{X_j^2\}$.)

По Теореме 2 для всех достаточно больших n с вероятностью единица имеем

$$b_n(\beta)<X^2_{n,n-k(n)+1}<b_n(\beta^{-1}),\quad \text{где}\quad \beta>1.$$

В силу Леммы 2 с вероятностью единица

$$\mathbf{P}'\Big(\max_{n_r<n\leqslant n_{r+1}}|T_{n,k}-S_n|>\varepsilon\sqrt{2B_{n_r}\ln_2 B_{n_r}}\Big)$$
$$\leqslant 8\mathbf{P}'\Big(\sum_{i\in I_r}\xi_i>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2B_{n_r}\ln_2 B_{n_r}}\Big),$$

где $I_r=\{i\leqslant n_{r+1}: b_{n_r}(\beta)<X_i^2<b_{n_r+1}(\beta^{-1})\}$.

По неравенству Марцинкевича с оценкой константы в нем для случая симметричных случайных величин (см. Лемму 1 из [6]) мы имеем для всех достаточно больших r

$$\mathbf{P}'\Big(\sum_{i\in I_r}\xi_i>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2B_{n_r}\ln_2 B_{n_r}}\Big)$$
$$<\Big(\frac{2(B_{n_{r+1}}(\beta^{-1})-B_{n_r}(\beta))}{(\varepsilon/2)^2\,B_{n_r}}\Big)^{\ln_2 B_{n_r}}\ \mathbf{P}\quad\text{– п.н.}$$

В силу Теоремы 2 отношение

$$\frac{B_{n_{r+1}}(\beta^{-1})-B_{n_r}(\beta)}{B_{n_r}}$$

может быть сделано сколь угодно малым для всех достаточно больших r с помощью выбора β и γ достаточно близкими к единице. Отсюда следует соотношение (6). Теперь, используя лемму Бореля–Кантелли, мы находим, что

$$\mathbf{P}'\left(\limsup_{n\to\infty}|T_{n,k}-S_n|\big/\sqrt{2B_n\ln_2 B_n}=0\right)=1\ \mathbf{P}\quad\text{– п.н.}$$

Интегрирование последнего равенства доказывает Лемму 1.

Доказательсто Теоремы 1. Теорема непосредственно следует из Леммы 1 и Теоремы 3.

Замечание. 1 Центральным местом нашего доказательства является применение функционального закона повторного логарифма для усеченных сумм, полученного в [6]. Используя его вместе с Теоремой 2 из [6], мы можем получить некоторые другие результаты типа функционального закона повторного логарифма.

Например, пусть $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ – последовательность независимых симметричных случайных величин с непрерывной функцией распределения, k – фиксированное целое число. Построим случайные непрерывные ломаные $\{h_n\}$ по точкам $\Big(\frac{T^2_{m,k}}{T^2_{n,k}},\frac{T_{m,k}}{\sqrt{2T^2_{n,k}\ln_2 T^2_{n,k}}}\Big)$.

Предположим, что $T^2_{n,k} \to \infty$ п.н.

Тогда с вероятностью единица последовательность функций $\{h_n(t)\}$, рассматриваемая как подмножество пространства $C[0,1]$,

1) относительно компактна,

2) имеет в качестве своего предельного множества множество K.

Литература

1. E. Haeusler, D. Mason, *Laws of iterated logarithm for sums of the middle portion of the sample.* — Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **101** (1987), 301–311.
2. E. Haeusler, D. Mason, *A law of the iterated logarithm for modulus trimming.* Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 57. Limit Theorems in Prob. and Statist. Pecs (Hungary) (1989).
3. В. А. Егоров, В. И. Поздняков, *О законе повторного логарифма для урезанных сумм.* — Вестн. СПГУ **22** (1994), 29–34.
4. В. А. Егоров, В. И. Поздняков, *О влиянии экстремальных порядковых статистик на скорость роста сумм.* — Теор. вероятн. и ее прим. **35(3)** (1990), 566–570.
5. В. А. Егоров, В. И. Поздняков, *Сильный закон больших чисел для урезанных сумм.* — Вестн. СПГУ **8** (1994), 20–25.
6. В. А. Егоров, В. И. Поздняков, *Функциональный закон повторного логарифма для урезанных сумм.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **244** (1997).
7. М. Лоэв, *Теория вероятностей.* ИЛ., М. (1962).

Egorov V. A., Pozdnjakov V. I. On functional law of the iterated logarithm for trimmed sums.

We obtain some new conditions for the functional law of the iterated logarithm for trimmed sums of symmetric iid random variables.

С.-Петербургский
государственный
электротехнический университет

Поступило 16 октября 1997 г.