А. А. Зингер

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ МНОГОМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

1. Для многих статистических и вероятностных задач, связанных с использованием линейных статистик, важную роль играет обращение преобразования Радона, применяемое также и в прикладных вопросах (см. [1]). При этом, если его трактовать как восстановление распределения по вероятностям на полупространствах, то существенным оказывается вопрос о согласовании таких вероятностей или описание множества значений преобразования Радона. С этой проблематикой связана и рассматриваемая в настоящей заметке задача о продолжении положительно определенных функций в многомерном случае.

Пусть $f(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$, является характеристической функцией некоторого распределения в $\mathbb{R}^n$. Как известно (см. [2]), для этого необходимо и достаточно, чтобы $f(t)$ была непрерывна в нуле с нормировкой $f(0) = 1$ и положительно определена на всем пространстве. Однако М. Г. Крейном было установлено (см. [3]), что в одномерном случае последнее предположение оказывается чрезмерным. Точнее, непрерывная в нуле и положительно определенная (п.о.) в конечном интервале $(-a, a)$ при $a > 0$ функция может быть продолжена на всю прямую $\mathbb{R}$ с сохранением свойства положительной определенности, вообще, неоднозначным образом. Вскоре, в следующем году теорема М. Г. Крейна была доказана другим способом Д. А. Райковым (см. [4]). В дальнейшем естественно возник вопрос о распространении этого результата на многомерный случай. Был построен пример, показывающий, что при $n = 2$ функция, п.о. в прямоугольнике, не продолжима на всю плоскость с сохранением этого свойства (см. [5, 6]). Также в [5] было показано, что функция, сферически симметрическая и п.о. в ограниченной области, продолжается на все пространство как таковая, Б. Я. Левин и И. Е. Овча-

---

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований No. 95-01-01260 и грант No. 96-01-00852..

ренко установили, что п.о. функция из бесконечной полосы продолжается как п.о. же на на все пространство (см. [7], там же указаны и другие близкие результаты). Автором был предложен критерий продолжимости п.о. функции из выпуклой центрально-симметрической области (см. [8]). Приведем его для сферы; общий случай вполне аналогичен:

функция $f(t)$, заданная, непрерывная и п.о. в $\mathbb{R}^n$ при $|t| < a$, продолжима на все $\mathbb{R}$ как п.о. в том и только том случае, когда она допускает представление

$$f(t) = \int\limits_{\mathbb{S}^n} \gamma\big((t,e),e\big)\, d\sigma(e), \tag{1}$$

где σ – ограниченная мера на $\mathbb{S}^n$ – единичной сфере в $\mathbb{R}^n$, а $\gamma(\tau, e)$ – заданная на $(-a,a)\times\mathbb{S}^n$ функция, измеримая по e и при каждом e непрерывная п.о. функция τ в интервале $(-a,a)$. Здесь и далее обозначается $(t,e) = t_1e_1 + \ldots + t_ne_n$. Этот критерий, однако, не позволяет указать явно, каким условием надо дополнить требование положительной определенноси $f(t)$ для обеспечения возможности продолжения на все пространство с сохранением этого свойства. Это связано, видимо, главным образом с тем, что (1) не позволяет однозначно восстановить $\gamma(s,e)$ по известной $f(t)$ (см. также [1]).

В настоящей заметке рассматривается подход к задаче продолжения п.о. функции из прямоугольной ограниченной области в терминах неотрицательности некоторых многомерных тригонометрических полиномов.

Подобным образом можно трактовать и области более общего вида. Предлагаемый подход является развитием и обобщением использованного в [4] в одномерном случае.

Пусть n – какое-нибудь натуральное и $a > 0$. Обозначим

$$\mathbb{D}_a^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |\, x_j \,| < a,\ j = 1, \ldots, n\}$$

и

$$\mathbb{D}_{a+}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_j < a,\ j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Функция $f : \mathbb{D}_a^n \to \mathbb{C}$ называется п.о. в $\mathbb{D}_a^n$, если при любых $t^1, \ldots, t^N \in \mathbb{D}_{a+}^n$ и $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$ имеет место

$$\sum_{\alpha=1}^{N} \sum_{\beta=1}^{N} f(t^\alpha - t^\beta)\, z_\alpha\, \overline{z}_\beta \geqslant 0. \tag{2}$$

Целочисленную решетку в $\mathbb{R}^n$ будем обозначать $\mathbb{Z}^n$. Соответственно обозначим при натуральном M

$$\mathbb{Z}^n_M = \{k = (k_1, \dots, k_n),\ k_j = -M, -M+1, \dots, M;\ j = 1, \dots, n\}$$

и

$$\mathbb{Z}^n_{M+} = \{k = (k_1, \dots, k_n),\ k_j = 0, 1, \dots, M;\ j = 1, \dots, n\}$$

и назовем последовательность μ_k, $k \in \mathbb{Z}^n_M$ положительно определенной (п.о.) на $\mathbb{Z}^n_M$, если при любых $k', \dots, k^{M'} \in \mathbb{Z}^n_{M+}$, $M' \leqslant M$ и

$$\sum_{\alpha=1}^{M'} \sum_{\beta=1}^{M'} \mu_{k^\alpha - k^\beta}\, z_\alpha\, \overline{z}_\beta \geqslant 0. \tag{3}$$

Еще нам понадобятся характеристические функции, обращающиеся в ноль вне данной области. Обозначим

$$\mathcal{T}^n_a = \bigl\{g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} : g(t) - \text{ характеристическая функция },$$
$$g(t) = 0,\ t \notin \mathbb{D}^n_a\bigr\}.$$

Простым примером функции кдасса $\mathcal{T}^2_1$ может служить функция

$$g_0(t_1, t_2) = (1 - |t_1|)_+ (1 - |t_2|)_+,$$

где $(A)_+$ как обычно определяется посредством

$$(A)_+ = \begin{cases} A & \text{при } A > 0, \\ 0 & \text{при } A \leqslant 0. \end{cases}$$

Теперь сформулируем основные теоремы, которые будут доказаны.

Теорема 1. *Для того, чтобы некоторая функция $f : \mathbb{D}^n_a \to \mathbb{C}$, непрерывная в нуле и $f(0) = 1$ и п.о. в $\mathbb{D}^n_a$, была продолжима на все $\mathbb{R}^n$ как п.о., необходимо и достаточно, чтобы для некоторой последовательности из $(0, 1)$ $h_\nu : \nu = 1, 2, \dots$, сходящейся к нулю, каждая конечная последовательность $f(ah_\nu k)$, $k \in \mathbb{Z}^n_{[1/h_\nu]}$, была продолжима на $\mathbb{Z}^n$ как п.о. ($[\,\cdot\,]$ – целая часть).*

При $n = 1$ условие положительной определенности на $\mathbb{Z}^1_M$ обеспечивает возможность продолжимости на всю решетку $\mathbb{Z}^1$, поэтому теорема Крейна непосредственно следует из теоремы 1. При $n > 1$ это уже не так (см. [6]), здесь продолжение возможно лишь при дополнительных условиях. Возможный вариант таких условий содержит следующая теорема.

Теорема 2. *Для того, чтобы последовательность* μ_k, $k \in \mathbb{Z}_M^n$, *могла быть продолжена на всю* $\mathbb{Z}^n$ *как п.о., необходимо и достаточно, чтобы при некоторой* $g \in \mathcal{T}_1^n$ *существовала последовательность неотрицательных тригонометрических полиномов*

$$P_s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_{N+s}} p_k \, e^{-i(k,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad s = 1, 2, \dots, \tag{4}$$

удовлетворяющих условиям

$$p_k = g\Big(\frac{1}{N+s}\, k\Big)\, \mu_k, \quad k \in \mathbb{Z}_N^n. \tag{5}$$

Здесь существенную роль играет условие неотрицательности тригонометрического полинома. В одномерном случае такое условие алгебраического характера хорошо известно (см. [9]), в многомерном же можно, к примеру, опираться на проверку неотрицательности в стационарных точках, что так же приводит к алгебраическим условиям.

2. Обратимся к доказательствам. Начнем с теоремы 1. Необходимость проверяется непосредственно. Возьмем характеристическую функцию $f(t)$, отвечающую функции распределения $F(x)$, и рассмотрим ее на решетке h_k, $k \in \mathbb{Z}^n$, $h > 0$

$$f(hk) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ih(k,x)}\, dF(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(k,x)}\, dF\Big(\frac{1}{h}\, x\Big) = \iint\limits_{\mathbb{D}^n_\pi} e^{i(k,x)}\, d\widetilde{F}(x),$$

где обозначено

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} F\Big(\frac{\pi}{h}\big((2k+1) + x\big)\Big), \quad x \in \mathbb{D}^n_\pi.$$

Из этого представления непосредственно следует, что $f(hk)$ является п.о. на $\mathbb{Z}^n$.

Перейдем к достаточности. Здесь можно действовать тем же способом, что и в [4] при $n = 1$, где используется для продолжения представление п.о. последовательности как тригонометрической моментной. Здесь мы применим подход, при котором продолжение осуществляется так, чтобы при каждом расширении сохранялась положительная определенность. Для удобства и простоты записи возьмем $n = 1$ и $a = 1$. При $n > 1$ все вполне аналогично. Согласно условиям теоремы $f(t)$ непрерывна в $\mathbb{D}_1^1$ и может быть продолжена на $\{h_\nu k : \nu = 1, 2, \dots ; k \in \mathbb{Z}\}$ так, что она п.о. на решетке $h_\nu k$, $k \in \mathbb{Z}$, при каждом ν. Обозначим такое продолжение $\widetilde{f}(h_\nu k)$. Далее нам понадобятся следующие свойства п.о. функций (см. [9])

$$| f(t) | \leqslant f(0), \tag{6}$$

$$| f(t_2) - f(t_1) | \leqslant f(0)\big(f(0) - \operatorname{Re} f(t_2 - t_1)\big). \tag{7}$$

Выберем теперь какое-нибудь счетное всюду плотное множество $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$, обладающее тем свойством, что при t', $t'' \in \mathbb{T}$

$$t'' - t' \in \mathbb{T}.$$

Для каждого $t \in \mathbb{T}$ построим последовательность $\big[\,t/h_\nu\big]\, h_\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$, где $[\,\cdot\,]$ означает целую часть. Очевидно, что она сходится к t при $\nu \to \infty$. В силу (6) $\big|\widetilde{f}\left(h_\nu\big[\,t/h_\nu\big]\right)\big| \leqslant 1$. Используя диагональный процесс, можно указать такую подпоследовательность натурального ряда ν_q, $q = 1, 2, \dots$, что при каждом $t \in \mathbb{T}$ существует конечный предел $\widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\big[\,t/h_{\nu_q}\big]\right)$ при $q \to \infty$.

Положим

$$h(t) = \lim_{q\to\infty} \widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left[t\middle/h_{\nu_q}\right]\right), \quad t \in \mathbb{T},$$

и покажем, что $h(t)$ п.о. на $\mathbb{T}$. Возьмем произвольные положительные t', $t'' \in \mathbb{T}$ и рассмотрим

$$\widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left[t'' - t'\middle/h_{\nu_q}\right]\right) = \widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left(\left[t''\middle/h_{\nu_q}\right] - \left[t'\middle/h_{\nu_q}\right] - \varepsilon\right)\right), \tag{8}$$

где ε равно нулю или единице. Из свойств п.о. функций следует (см. (7)) с учетом (8)

$$\left|\widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left(\left[t''\middle/h_{\nu_q}\right] - \left[t'\middle/h_{\nu_q}\right]\right)\right) - \widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left[t'' - t'\middle/h_{\nu_q}\right]\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \operatorname{Re} \widetilde{f}\big(\varepsilon h_{\nu_q}\big). \tag{9}$$

Отсюда вытекает, что

$$h(t'' - t') = \lim_{q\to\infty} \widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left(\left[t''\middle/h_{\nu_q}\right] - \left[t'\middle/h_{\nu_q}\right]\right)\right). \tag{10}$$

Таким образом, для любых положительных $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{T}$ и комплексных $z_1, \dots, z_r$ в силу (10) (см. (2) и (3))

$$\sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} h(t_\alpha - t_\beta)\, z_\alpha\, \overline{z}_\beta =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \widetilde{f}\left(h_{\nu_q}\left(\left[t\alpha\big/h_{\nu_\alpha}\right] - \left[t\beta\big/h_{\nu_\beta}\right]\right)\right) z_\alpha\, \overline{z}_\beta \geqslant 0$$

и $|\, h(t)\,| \leqslant 1$ при $t \in \mathbb{T}$. Кроме того, из (9) очевидно следует, что $h(-t) = h(t)$ при $t \in \mathbb{T}$.

Далее расширим определение $h(t)$ на $\mathbb{R}$.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Возьмем последовательность $t_\nu \in \mathbb{T}$, $\nu = 1, 2, \ldots$, сходящуюся к t. В силу свойства (7) $h(t_\nu)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, является фундаментальной, а значит и сходящейся. Положим

$$h(t) = \lim_{\nu\to\infty} h(t_\nu), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{11}$$

Легко видеть, что определение $h(t)$ в (11) не зависит от выбора t_ν, сходящейся к t, $h(t)$ п.о. и по построению совпадает с $f(t)$ на $\mathbb{D}_1^1$, а это и требуется. Теорема доказана.

3. Рассмотрим доказательство теоремы 2. Необходимость условий ее проверяется непосредственно. Возьмем произвольную $g(t) \in \mathcal{T}^n$; при любых натуральных N, s последовательность $g\left(\frac{1}{N+s}\,k\right)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, является п.о., причем по определению

$$g\left(\frac{1}{N+s}\,k\right) = 0 \tag{12}$$

при $k = (k_1, \ldots, k_n)$ таких, что $\max\limits_j k_j \geqslant N + s$. Поскольку μ_k, $k \in \mathbb{Z}^n$, является п.о., то и $\mu_k\, g\left(\frac{1}{N+s}\,k\right)$, $k \in \mathbb{Z}^n$, также является п.о., обладающей свойством (12). Отсюда следует, что в роли неотрицательных полиномов, фигурирующих в условиях теоремы 2, выступают полиномы

$$P_s(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n_{N+s}} g\left(\frac{1}{N+s}\,k\right)\mu_k\, e^{-i(k,x)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

По построению эти полиномы удовлетворяют условию (5).

Переходя к доказательству достаточности условий теоремы 2, мы найдем из (4) и (5)

$$\mu_k\, g\left(\frac{1}{N+s}\,k\right) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{D}^n_\pi} e^{i(k,x)}\, P_s(x)\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}^n_N. \tag{13}$$

Обозначим посредством $\Pi_s(x)$ функцию распределения, сосредоточенного на $\mathbb{D}^n_\pi$, имеющего плотность $1/(2\pi)^n\, P_s(x)$. Согласно теореме Хелли можно выбрать подпоследовательность $\Pi_{s_r}(x)$, слабо сходящуюся к некоторой функции распределения на $\mathbb{D}^n_\pi$ $\sigma(x)$.

При этом

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{D}_\pi^n} e^{i(k,x)}\, P_{s_r}(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{D}_\pi^n} e^{i(k,x)}\, d\sigma(x). \qquad (14)$$

Поскольку $g\left(\frac{1}{N+s}\, k\right) \to 1$ при $s \to \infty$, то из (13) с учетом (14) следует, что

$$\mu_k = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{D}_\pi^n} e^{i(k,x)}\, d\sigma(x), \quad k \in \mathbb{Z}_N^n. \qquad (15)$$

Представление (15) показывает, что μ_k может быть продолжено на $\mathbb{Z}^n$ как п.о., а это и требуется. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии.* Мир, М. (1990).
2. S. Bochner, *Harmonic Analysis and Theory of Probability.* Univ. Calif. Press (1955).
3. М. Крейн, *О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций.* — Докл. АН СССР **26** (1940), 17–21.
4. Д. Райков, *О положительно определенных функциях.* — Докл. АН СССР **26** (1940), 857–862.
5. W. Rudin, *On extension problem for positive definite functions.* — Illinois J. of Math. **3** (1963), 532–539.
6. A. Galderon, R. Pepinski, *Fouriers coefficients and the phase problem of positive definite function.* Computing methods in X-Ray Analysis, Pensilvania (1953).
7. Б. Левин, И. Овчаренко, *Продолжение эрмитово позитивных функций, заданных в полосе.* — В кн.: Теория функций, функциональный анализ и их приложения, No. 5,. Харьков (1967).
8. А. Зингер, *О многомерных характеристических функциях.* — Теор. вероятн. и ее прим. **28(3)** (1983), 618.
9. Н. Ахиезер, *Классичесакая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с ней.* Физматгиз, Москва (1961).

Zinger A. A. On characteristic functions of the multidimensional distributions.

The problem of extension of the positive definite on bounded domain functions onto the whole space is considered. It is shown that the problem may be reduced to the some problem for functions given on the integer lattice. A criterion providing extension in this case is given also.

С.-Петербургский университет
аэрокосмического приборостроения

Поступило 10 июня 1997 г.