Л. Б. Клебанов, Ж.-Ф. Крозе

КВАЗИ–СВЕРТКИ И ПРИЛОЖЕНИЯ К КОДИРОВАННЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ

Реферат. В этой статье мы введем новый интегральный оператор, называемый квази – сверткой. Ядро оператора этого оператора подобно ядру оператора свертки, но имеет изменяющийся масштаб. Классическое обращение посредством преобразования Фурье оказывается теперь невозможным, но мы дадим примеры обращения для специальных ситуаций в одно и двумерных случаях. Мы также указываем приклажения к распознаванию изображений в медицине, где квази-свертка оказывается связаной с преобразованием “кодированного изображения”.

§1. Формализм квази-сверток

Введем следующий оператор Q, действующий на измеримые функции f с компактным носителем, содержащимся (для определенности) в единичном диске:

$$Q_f(x_0, y_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\chi\left(\frac{x_0 - x}{z(x_0, y_0)}, \frac{y_0 - y}{z(x_0, y_0)}\right) dxdy, \qquad (1.1)$$

где χ - ограниченная измеримая функция с компактнным носителем (обычно функция индикатора компактного множества в $\mathbb{R}^2$).

Аналогия с оператором свертки наводит нас на использование обозначения

$$Q_f = f \star_z \chi, \qquad (1.2)$$

где z представляет неотрицательную непрерывную масштабирующую функцию. Это преобразование следует назвать квазисверткой или, возможно, масштабированной сверткой.

Обратим внимание на то, что выбор функции z может быть широк, и что выбор множеств, содержащих f и χ мог бы быть

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00852.

легко расширен с целью улучшения математического исследования. Рассмотрим, однако, только случай широкого класса функций z. Мы проиллюстрируем это в следующем разделе, который посвящен разпознаванию изображений в медицине.

Другое замечание – то, что квази-свертка может интерпретироваться как среднее значение функция с компактным носителем, лежащим на поверхности $z = z(x, y)$.

Теперь это оказывается полезным для того, чтобы представить следующий оператор, который мы назовем присоединенным к квази-свертке,

$$Q_g^* = g \circledast_z \chi = \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y) \chi\left(\frac{x_0 - x}{z(x,y)}, \frac{y_0 - y}{z(x,y)}\right) dxdy, \tag{1.3}$$

действующим на функцию g с компактным носителем и измеримую на $\mathbb{R}^2$.

§2. Распознавание изображений в медицине и квази-свертка

Кодированное изображение – медицинский средство для восстановления некоторых патологий человеческого тела. Оно состоит в получении изображения от эмиссия гамма-лучей, следующей за введением радиоактивной серы в исследуемый орган.

Более точно, Кодированное изображение состоит в введении между органом испускания и экраном рецептора непрозрачной маски, в которой было сделано маленькое отверстие, называемое *код*.

В каждой точке M в органе, представляющем интерес, плотность эмиссии имеет значение $F(M)$, с $0 \le F(M) \le 1$. Пусть (x_0, y_0) – система координат в плоскости экрана, с началом O_0. Обозначим через L расстояние от маски до экрана, и выберем систему координат (x, y, z) на маске, с началом O в центре кода. Если $\mathcal{C}$ – функция индикатора отверстия, то изображение, регистрируемое на экране есть

$$T_f(x_0, y_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} F(x,y,z)\, \mathcal{C}\left(\frac{zx_0 + Lx}{z + L}, \frac{zy_0 + Ly}{z + L}\right) \frac{dxdydz}{(z + L)^2}$$

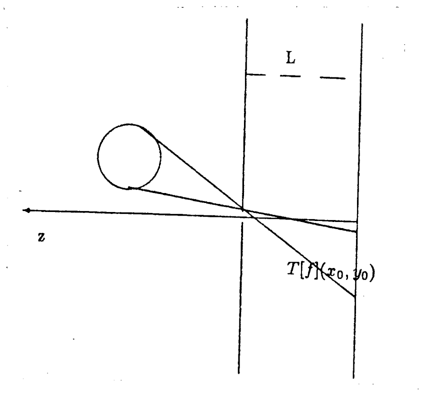

Рис. 1. Описание камеры.

Этот код может быть кольцевое маленькое отверстие ([2, 4, 5]), или концентрические кольцевые маленькие отверстия (называемые зонами Френеля). Можно выбирать, аналогично [6], регулярные сетки игольчатых отверстий, или систем прямолинейных разрезов как в [3]. Мы исследуем далее специальный класс отверстий, которые ведут к восстановлению плотности.

Если мы предполагаем, что носитель органа аппроксимирован поверхностью $\Sigma = \{(x,y,z), z = z(x,y)\}$, то нас интересует задача восстановления двумерной плотности по кодированным двумерным проекциям. Мы также имеем следующее выражение для регистрируемого изображения:

$$T_f(x_0,y_0) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x,y,z(x,y))}{(z(x,y)+L)^2}\, \mathcal{C}\left(\frac{z(x,y)x_0+Lx}{z(x,y)+L}, \frac{z(x,y)y_0+Ly}{z(x,y)+L}\right)\, dxdy\,.$$

Мы можем теперь исследовать два случая.

а) поверхность испускания компактна и является плоскостью, параллельной маске, на расстоянии d:

$$T_f(x_0,y_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x,y,d)}{(d+L)^2}\, \mathcal{C}\left(\frac{dx_0+Lx}{d+L}, \frac{dy_0+Ly}{d+L}\right)\, dxdy\,.$$

Тогда ясно, что оператор T является сверткой фиксированной масштабируемой версией плоской плотности $F_0(x, y) = F(x, y, d)$ и фиксированной масштабируемой версии индикаторной функции $\mathcal{C}$.

б) поверхность испускания компактна и является более общей поверхностью с уравнением $z = z(x, y) \geqslant 0$.

Например, миокард, довольно тонкий в сечении, имеет в конце каждого сердечного цикла форму, обычно моделируемую половиной эллипсоида с уравнением

$$z = h(x, y) = a + d\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{h}} \ , \ \ x^2 + y^2 \leq 1 \ .$$

Тогда мы получаем

$$T_f(x_0, y_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x, y, h(x, y))}{(h(x, y) + L)^2} \mathcal{C} \left(\frac{h(x, y)x_0 + Lx}{h(x, y) + L}, \frac{h(x, y)y_0 + Ly}{h(x, y) + L} \right) dxdy. \quad (2.1)$$

Следовательно [?] – не является больше сверткой, но представляет собой квази-свертку между $F_0(x, y) = F(x, y, h(x, y))$ и версией с изменяющимся масштабом индикаторной функции $\mathcal{C}$.

Заметим, что $\Phi(x, y) = \frac{z(x,y)+L}{z(x,y)}$, и предположим что возможна замена переменных

$$\begin{cases} X = -\frac{L}{z(x,y)+L} x \\ Y = -\frac{L}{z(x,y)+L} y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u(X, Y) \\ y = v(X, Y). \end{cases}$$

(мы обсудим эту возможность в следующих разделах). Тогда мы получим

$$T_f(x_0, y_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(X, Y)\, \mathcal{C} \left(\frac{x_0 - X}{\Phi(u(X, Y), v(X, Y))}, \frac{y_0 - Y}{\Phi(u(X, Y), v(X, Y))} \right) dXdY,$$

где

$$f(X, Y) = \frac{J(X, Y)F(u(X, Y), v(X, Y), z(u(X, Y), v(X, Y)))}{z(u(X, Y), v(X, Y))}$$

и J – Якобиан, соответствующий замене переменных. Предыдущее уравнение может быть переписано в форме

$$T_f = f_0 \circledast_S \mathcal{C}, \tag{2.2}$$

где

$$S(X,Y) = \Phi(u(X,Y), v(X,Y)).$$

Так, что соотношение между кодированным изображеним и связанным с квази-сверткой оператором становится ясным: $T_f = Q^*_{f_0}$.

§3. Обратная квази-свертка для удаленных поверхностей

Следуя Введению рассматрим оператор

$$T_f(x_0, y_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathcal{C}\left(\frac{z(x,y)x_0 + Lx}{z(x,y)+L}, \frac{z(x,y)y_0 + Ly}{z(x,y)+L}\right)\frac{dxdy}{(z(x,y)+L)^2}, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{C}$ – функция индикатора отверстия. Предположим что

$$L \ll z = z(x,y). \tag{3.2}$$

Тогда получим

$$\frac{z(x,y)}{z(x,y)+L} \simeq 1,$$

$$\frac{L}{z(x,y)+L} \simeq \frac{L}{z(x,y)},$$

и оператор T_f может быть приблизительно записан как

$$T_f(x_0, y_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathcal{C}\left(x_0 + \frac{L}{z(x,y)}x, y_0 + \frac{L}{z(x,y)}y\right)\frac{dxdy}{z(x,y)^2}. \tag{3.3}$$

После замены переменных

$$\begin{cases} X = -\frac{L}{z(x,y)}x \\ Y = -\frac{L}{z(x,y)}y, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = u(X,Y) \\ y = v(X,Y), \end{cases},$$

мы получим

$$T_f(x_0, y_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{J(X,Y)f(u(X,Y),v(X,Y))}{z(u(X,Y),v(X,Y))}\mathcal{C}\,(x_0 - X, y_0 - Y)\,dXdY,$$

где J - соответствующий этой замене переменных якобиан. Предыдущее уравнение может быть переписано в виде

$$T_f = f_0 \star \mathcal{C}, \tag{3.4}$$

где

$$f_0(X,Y) = \frac{J(X,Y)f(u(X,Y),v(X,Y))}{z(u(X,Y),v(X,Y))}.$$

Вычисляя преобразование Фурье от обеих частей равенства (3.4) мы получаем

$$\widehat{T_f} = \widehat{f_0}\,\widehat{\mathcal{C}}. \tag{3.5}$$

Так как отверстие является компактным множеством, а плотность f имеет компактный носитель, то преобразования Фурье $\widehat{\mathcal{C}}$ и $\widehat{f_0}$ являются целыми функциями. Поэтому функция $\widehat{f_0}$ может быть восстановлена единственным образом из соотношения (3.5) по известным данным $\widehat{T_f}$ и $\widehat{\mathcal{C}}$. Следовательно, f_0 (и, значит, f) могут быть восстановлены с помощью обратного преобразования Фурье.

§4. Оценки близости решений для квази-сверток к соответствующему решению с помошью сверток и обращения сверток

В предыдущем разделе мы показали, что уравнение квази-свертки при условиях (3.3) может быть аппроксимировано отношением (3.4). Однако остается неясным являются ли решения начальной задачи близким к решению уравнения (3.3) или нет. Ниже мы и исследуем этот вопрос.

Рассмотрим проблему восстановления плотности f тела, базирующеюся на результате квази-свертки

$$T_f(x_0, y_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathcal{C}\left(\frac{z(x,y)x_0 + Lx}{z(x,y)+L}, \frac{z(x,y)y_0 + Ly}{z(x,y)+L}\right)\frac{dxdy}{(z(x,y)+L)^2}.$$

Обозначим $\varphi(x_0, y_0) = T_f(x_0, y_0)$, и вычислим преобразование Фурье от $\varphi(x_0, y_0)$

$$\psi(t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \varphi(x_0, y_0) e^{itx_0 + i\tau y_0} dx_0 dy_0 = \tag{4.1}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\mathcal{C}(u,v) e^{i\frac{z+L}{z}(tu+\tau v)} e^{-i\frac{L}{z}(tx+\tau y)} \frac{dxdy}{z^2} dudv.$$

Мы предполагаем что $\mathcal{C}(u,v) = 0$ снаружи квадрата $SQ = \{|u| \le M,\ |v| \le M\}$, где $M > 0$. Предположим дополнительно, что $s = z(x,y) = K + q(x,y)$, где $K > 0$ – “большая” константа и $q = q(x,y) \ge 0$, $\min_{x,y} q(x,y) = 0$, и $\max_{x,y} q(x,y) = \bar{q} < \infty$. В этом случае мы можем написать

$$e^{i\frac{L}{z}(tu+\tau v)} = e^{i\frac{L}{K}(tu+\tau v)} + Q,$$

где

$$Q = e^{i\frac{L}{K+q}(tu+\tau v)} - e^{i\frac{L}{K}(tu+\tau v)}.$$

С другой стороны из (6.1) мы имеем

$$\psi(t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} \left[\int\limits_{SQ} \left(\mathcal{C}(u,v) e^{i(1+L/K)(tu+\tau v)} + Q\mathcal{C}(u,v) e^{i(tu+\tau v)} \right) dudv \right]$$

$$e^{-i\frac{L}{z}(tx+\tau y)} \frac{f(x,y)}{z^2} dxdy. \tag{4.2}$$

Но

$$|Q\mathcal{C}(u,v)e^{\vee(tu+\tau v)}| \le 4\frac{LM\bar{q}(|t|+|\tau|)}{K^2}$$

в случае, когда правая часть меньше чем $\pi/2$.

Введем обозначения

$$\widehat{\mathcal{C}}(t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(tu+\tau v)} \mathcal{C}(u,v) dudv,$$

$$\widehat{F}(t,\tau) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-i\frac{L}{z}(tx+\tau y)} \frac{f(x,y)}{z^2} dxdy.$$

и выберем постоянную $A > 0$ такой что $A\widehat{F}(0,0) = 1$. Из (4.2) для подходящих значений t и τ получим

$$\left| A\widehat{F}(t,\tau) - \frac{a\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)} \right| \leq \tag{4.3}$$

$$\frac{4L\bar{q}M(|t|+|\tau|)}{K^2|\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)|}.$$

Ввиду $\widehat{\mathcal{C}}(0,0) > 0$ существует $r \in (0,1)$ такое, что $|\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)| \geq \widehat{\mathcal{C}}(0,0)/2$ для всех t,τ удовлетворяющих условиям $|t| \leq r$ и $|\tau| \leq r$. Теперь из (4.3) мы находим

$$\left| A\widehat{F}(t,\tau) - \frac{a\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)} \right| \leq \frac{8L\bar{q}M}{K^2\widehat{\mathcal{C}}(0,0)} \tag{4.4}$$

Для всех t,τ удовлетворяющих условиям $|t| \leq r$ и $|\tau| \leq r$.

Обозначим через ε выражение в правой части (4.4). Если K достаточно велико, то ε произвольно мал. Очевидно, что функция

$$\frac{\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)}$$

является аналитической по обеим аргументам. Использование результата А. В. Какосяна и Л. Б. Клебанова (см. [1]) мы видим, что существуют константа C такая, что

$$\left| A\widehat{F}(t,\tau) - \frac{a\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)} \right| \leq \frac{C}{\log(\log(1/\varepsilon))} \tag{4.5}$$

Для всех t и τ удовлетворяющих условиям

$$\max(|t|,|\tau|) \leq \log(\log(1/\varepsilon)).$$

Последнее соотношение (4.5) показывает нам, что решения уравнения псевдосвертки стремятся к решению "модифицированного"[1] уравнения свертки при ε стремящемся к нулю.

[1] "модификация" состоит в рассмотрении $\frac{\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}((1+L/K)t,(1+L/K)\tau)}$ вместо $\frac{\psi(t,\tau)}{\widehat{\mathcal{C}}(t,\tau)}$, но это существенно

§5. Обращение квази-свертки в одномерном случае

5.1. Случай общих масштабных функций z.

Мы докажем существование и единственность решения уравнения квази-свертки в одномерном случае для специальных интегральных ядер.

Рассмотрим только пример кодированного изображения, связанного с присоединенным оператором квази-свертки (см. раздел 2). (Доказательство результата будет сходным и для квази-сверток, и для присоединенного преобразования).

Рассмотрим одномерную кривую Γ общего вида с уравнением

$$z = z(x) \geqslant 0,$$

и рассмотрим одномерное выражение зарегистрированного изображения

$$T_f(x_0) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} f(x)\, \mathcal{C}\left(\frac{z(x)x_0 + Lx}{z(x)+L}\right) \frac{dx}{(z(x)+L)^2}.$$

Предположим теперь, что $\mathcal{C}$ – функция индикатора одномерного кода, т.е. компактное подмножество K $\mathbb{R}^1$. Мы имеем следующий процесс восстановления

Теорема 5.1. *Пусть K компактный интервал такой, что $K = [x_1, x_2] \cup \cdots \cup K_0$ с $x_1 \neq x_2$ и $\sup_{x\in K_1} x \leq x_1$. Пусть Γ – выпуклая одномерная кривая и пусть T_f зарегистрированные данные, т.е. соответствующее преобразование измеримой функции с компактным носителем. Тогда f может быть восстановлена единственным образом.*

Доказательство. Обозначим

$$u(x) = \frac{z(x)}{z(x)+L}x_0 + \frac{L}{z(x)+L}x,$$

и предположим что

$$U(x) \in K \iff x \in \mathcal{K}(x_0)\ ,$$

где множество $\mathcal{K}(x_0)$ зависит от x_0 и от L. Из предположений ясно, что

$$\mathcal{K}(x_0) = \mathcal{K}_0(x_0) \cup [\alpha(x_0), \beta(x_0)]\ ,$$

где

$$\sup_{x\in\mathcal{K}_0(x_0)} x \leq \alpha(x_0) ,$$

и α и β убывающие функции, $\alpha(x_0) < \beta(x_0)$ для всех x_0. Теперь мы можем написать

$$T_f(x_0) = \int\limits_{\alpha(x_0)}^{\beta(x_0)} f(x)\frac{dx}{(z(x)+L)^2} + \int\limits_{\mathcal{K}_0(x_0)} f(x)\frac{dx}{(z(x)+L)^2} .$$

Обозначим

$$G(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} f(x)/(z(x)+L)^2\,dx .$$

Мы видим, что f может быть восстановлена единственным образом на основе g. Действительно, мы получаем

$$T_f(x_0) = g(\beta(x_0)) - g(\alpha(x_0)) + \int\limits_{\mathcal{K}_0(x_0)} f(x)\frac{dx}{(z(x)+L)^2}.$$

Так как f имеет компактный носитель, (т.е. $f=0$ вне компактной части поверхности $z=z(x)$) и так как α – убывающая функция, то существует число x_1 такое, что $g(\alpha(x_0))=0$ для всех $x_0 \geq x_1$.

Таким образом $g(\beta(x_o))$ может быть восстановлена единственным образом для $x_0 \geq x_1$. То есть мы восстанавливаем значения $g(\alpha(x_0))$ для всех $x_0 \geq x_2$, где $x_2 < x_1$, по соответствующим значениям f и $\int_{\mathcal{K}_0(x_0)} f(x)/(z(x)+L)^2\,dx$.

Продолжая этот процесс, мы можем восстановить единственным образом значения $g(\beta(x_0))$ для $x_0 \geq x_2$, т.е. значения $g(\alpha(x_0))$ для $x_0 \geq x_3$, $x_3 < x_2$, вычисляя соответствующие значения f и $\int_{\mathcal{K}_0(x_0)} f(x)/(z(x)+L)^2\,dx$.

После конечного числа шагов, мы восстановим таким образом функцию g для всех значений x_0 и, с помощью дифференцирования, всю функцию f. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

5.2. Случай общих сверток.

В этом разделе мы исследуем обращение в специальной ситуации.

Теорема 5.2. *χ - ограниченная измеримая функция с компактным носителем. Пусть z афинная масштабирующая функция $z(x) = ax + b \geqslant 0$ и предположим, что дана квази-свертка $Q_f = f \star_z \chi$,, где f - измеримая функция (плотность) с компактным носителем. Тогда f может быть восстановлена единственным образом по данным Q_f.*

Доказательство. Преобразование Q_f может быть записано

$$Q_f(x_0) = \int f(x)\,\chi\left(\frac{x_0 - x}{ax_0 + b}\right) dx\ .$$

Затем мы получаем

$$Q_f(x_0/a - b) =$$

$$= \int f(x)\,\chi\left(\frac{x_0/a - b - x}{x_0}\right) dx = \int f(x-b)\,\chi\left(1/a - \frac{x}{x_0}\right) dx\ .$$

Запишем

$$Q_f(x_0/a - b) = \int f_0(x)\,\chi_0\left(\frac{x}{x_0}\right) dx\ ,$$

где $f_0(x) = f(x-b)$, и $\chi_0 = \chi(1/a - x)$. Преобразование Меллина от левой части при целом N дает нам

$$\int Q_f(x_0/a - b) x_0^N dx_0 = \int f_0(x) \int \chi_0\left(\frac{x}{x_0}\right) x_0^N dx_0 dx\ ,$$

Следовательно,

$$\int Q_f(x_0/a - b) x_0^N dx_0 = \int f_0(x) x^N dx \int \chi_0(x_0)\, x_0^{N+1} dx_0\ .$$

Так как $\int \chi_0(x_0)\, x_0^{N+1} dx_0$ отличен от нуля для всех N (при подходящих a и χ), то моменты f_0 могут быть вычислены однозначно. Так как функции f_0 и f имеют компактные носители, то они могут быть однозначно восстановлены по моментам. Это и завершает доказательство теоремы. □

§6. Инверсия квази-сверток в двумерном случае

6.1 Случай масштабных функций общего вида.

Возьмем двумерную поверхность $\mathcal{S}$ с уравнением

$$Z = z(x, y) \geqslant 0\ , x \in \mathbb{R}^2$$

и рассмотрим обобщенное двумерное выражение для зарегистрированного изображения

$$T_f(x_0,y_0) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}}^{2} f(x,y)\, \mathcal{C}\left(\frac{z(x,y)x_0+Lx}{z(x,y)+L}\,,\ \frac{z(x,y)y_0+Ly}{z(x,y)+L}\right)\, \frac{dxdx}{(z(x,y)+L)^2}\,.$$

Здесь $\mathcal{C}$ - индикаторная функция компактного подмножества K $\mathbb{R}^2$. Мы имеем следующий процесс восстановления (сходный с рассмотренным в одномерном случае).

Теорема 6.1. *Пусть K компактное подмножество $\mathbb{R}^2$, которое может быть записано в виде $K = K_1 \times K_2 = \{[x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1},x_n]\} \times \{[y_1,y_2] \cup \dots \cup [y_{n-1},y_n]\}$, причем $x_{n-1} \neq x_n$ и $y_{n-1} \neq y_n$. Предположим, что $\mathcal{S}$ – выпуклая двумерная поверхность, и пусть даны зарегистрированные данные T_f, то есть обобщенное преобразование кодированного изображения измеримой функции с компактным носителем. Тогда f может быть восстановлена единственным образом.*

Доказательство. Обозначим

$$U(x,y) = \frac{z(x,y)}{z(x,y)+L}x_0 + \frac{L}{z(x,y)+L}x\ ,\ \ v(x,y) =$$

$$= \frac{z(x,y)}{z(x,y)+L}y_0 + \frac{L}{z(x,y)+L}y$$

И предположим, что

$$U(x,y) \in K_1 \iff (x,y) \in \mathcal{K}_1(x_0,y_0)\ ,$$

$$V(x,y) \in K_2 \iff (x,y) \in \mathcal{K}_2(x_0,y_0)\ ,$$

где наборы $\mathcal{K}_1(x_0,y_0)$ и $\mathcal{K}_2(x_0,y_0)$ зависят и от x_0,y_0 и от L. Обозначим $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$. Из предположений теоремы легко видеть, что $\mathcal{K}$ может записано как

$$\mathcal{K}(x_0,y_0) =$$

$$= \mathcal{K}_0(x_0,y_0) \cup \{[\alpha_1(x_0,y_0),\beta_1(x_0,y_0)] \times [\alpha_2(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0)]\};,$$

где

$$\sup_{x \in \mathcal{K}_0(x_0,y_0)} x \le \alpha_1(x_0,y_0)\ ,$$

и

$$\sup_{y\in\mathcal{K}_0(x_0,y_0)} y \le \alpha_2(x_0,y_0)\ .$$

Таким образом,

$$T_f(x_0,y_0)=\int\limits_{\alpha_1(x_0,y_0)}^{\beta_1(x_0,y_0)}\int\limits_{\alpha_2(x_0,y_0)}^{\beta_2(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)\,dxdy}{(z(x,y)+L)^2}+\int\limits_{\mathcal{K}_0(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)\,dxdy}{(z(x,y)+L)^2}\ .$$

Обозначим

$$G(u,v)=\int\limits_{-\infty}^{u}\int\limits_{-\infty}^{v}\frac{f(x,y)}{(z(x,y)+L)^2}\,dxdy\ .$$

Легко видеть, как и в одномерном учае, что, f может быть восстановлена единственным способом на основе g: процесс реконструкции подобен ранее использованному. Действительно, мы получаем

$$\begin{aligned}T_f(x_0,y_0)=&\,[g(\beta_1(x_0,y_0),\alpha_2(x_0,y_0))-g(\alpha_1(x_0,y_0),\alpha_2(x_0,y_0))]\\&+[g(\beta_1(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0))-g(\alpha_1(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0))]\\&+\int\limits_{\mathcal{K}_0(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)\,dxdy}{(z(x,y)+L)^2}.\end{aligned}$$

Так как $\alpha_1(x_0,y_0)<\beta_1(x_0,y_0)$ и $\alpha_2(x_0,y_0)<\beta_2(x_0,y_0)$ для всех $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$, и так как α_1, β_1, α_2, β_2 убывающие функции, и поскольку β_1 и β_2 – дифференцируемые по x_0 и y_0, то мы имеем следующий алгоритм: Существует пара (x_1,y_1) такая, что $g(\alpha_1(x_0,y_0),\alpha_2(x_0,y_0))=0$, но $g(\beta_1(x_0,y_0),\alpha_2(x_0,y_0))=0$ и $g(\alpha_1(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0))=0$ для всех $x_0\ge x_1$ и $y_0\ge y_1$. Таким образом $g(\beta_1(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0)$ может быть восстановлена единственным образом для $x_0\ge x_1$ и $y_0\ge y_1$. То есть мы восстанавливаем значения $g(\beta_1(x_0,y_0),\beta_2(x_0,y_0)$ для всех $x_0\ge x_2$ и $y_0\ge y_2$, где $x_2<x_1$ и $y_2<y_1$, посредством соответствующих значений f и $\int_{\mathcal{K}_0(x_0,y_0)}f(x,y)/(z(x,y)+L)^2\,dxdy$. После этого процесса, мы можем восстановить значения g на соседнем квадрате по ее значениям на предыдущем квадрате. Так как f имеет компактный носитель, то мы можем восстановить, после конечного числа шагов, функцию g для всех значений x_0,y_0 и, следовательно, функцию f. Это завершает доказательство теоремы. □

Литература

1. A. V. Kakosyan, L. B. Klebanov, and S. T. Rachev, *Количественные критерии сходимости вероятностных мер.* Айастан, Ереван, 1988.
2. J. Brunol, J. Fonroget, *Bruit multiplex en gammagraphie par codage.* Optics Communications **22**, No. 3 (1977), 301–306, (in French).
3. N. de Beaucoudrey, L. Garnero, *Off-axis multi-slit coding for tomographic X-Ray imaging of microplasma.* Optics Communications **49**, No 2 (1984), 103–107.
4. J. Brunol, R. Sauneuf, and J. P. Gex, *Micro coded aperture imaging applied to laser plasma diagnosis.* Optics Communications **31**, No. 2 (1979), 129–134.
5. J. F. Crouzet, *La Gammagraphie par ouverture de codage.* Ph. D. Thesis (1996) Université Bordeaux-I, F-33400 Talence, (in French).
6. N. Ohyama, T. Honda, and J. Tsujiuchi, *Tomogram reconstruction using advanced coded aperture imaging.* Optics Communications **36**, No. 6 (1981), 434–438.
7. E. Todd Quinto, *Singular value decompositions and inversion methods for the exterior adon transform and a spherical transform.* Journal of Mathematical Analysis and Applications **95**, No. 2 (1983).

Klebanov L. B., Crouzed J. F. The quasi-convolutions and the applications to the coded images.

In this paper we introduce a new integral operator, which we call as a quasi-convoluation. The kernel of this operator is analogical to the kernel of the operator of usual convolution, but has a variable scale. Classical inversion by usual Fourier transformation is not possible in this case, but we give the examples of the inversion for the special cases in one and two dimensions. We give also the applications for a recognition of the images in modicine, where the quasi-convolutions are connected with a transformation of the coded images.

С.-Петербургский государственный университет архитектуры и строительства

Поступило 5 сентября 1997 г.

Department of Applied Mathematics
University Bourdeax-I