Л. Б. Клебанов, Л. А. Халфин

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ПО КОНЕЧНОМУ МНОЖЕСТВУ ЗНАЧЕНИЙ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Введение

В работах [1, 2] были получены оценки приближенного (в равномерной метрике) восстановления плотности на основе конечного множества значений преобразования Радона. Результаты этих работ позволили, в частности, дать решение известного парадокса компьютерной томографии (см. [3]). При этом в указанных работах использовались только два типа сглаживающих ядер – гауссовские и Валле–Пуссена. Остается неясным можно ли выбирать ядра других типов и, если да, то как выбор сглаживающего ядра влияет на точность восстановления плотности распределения.

В этой статье мы как раз и исследуем влияние сглаживающего ядра на точность восстановления плотности.

Основные результаты

Пусть $\mathcal{F}$ – множество всех вероятностных плотностей с носителями, лежащими в единичном квадрате

$$D\{x=(x_1,x_2):\ |x_1|\le 1,\ |x_2|\le 1\}.$$

Допустим, что $\{k_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$ – некоторое семейство функций, удовлетворяющих при всех ε условиям:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} k_\varepsilon(x)dx=1,\ K(\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}|k_\varepsilon(x)|dx<\infty$;

2. $\int_{-\infty}^{\infty}|\widehat{k}_\varepsilon(x)|dx<\infty$, где $\widehat{k}_\varepsilon(x)$ – преобразование Фурье функции k_ε.

Пусть $n\ge 2$ натуральное число. Построим $N=2n$ направлений $\theta_1,\dots,\theta_N$, определив их равенствами

$$\theta_j=\frac{1}{\sqrt{v_j^2+1}}(v_j,-1),\ j=1,\dots,n;$$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96-01-00852.

$$\theta_j = \frac{1}{\sqrt{v_j^2+1}}(1, v_{j-n}), \ \ j = n+1, \dots, 2n,$$

где

$$v_k = \cos\left(\pi(2k-1)/(2n)\right), \ \ k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что v_k соответствуют чебышевским узлам интерполяции. Допустим, что две плотности f и g из $\mathcal{F}$ имеют совпадающие маргинальные распределения в направлениях $\theta_1, \dots, \theta_N$. В нашей работе [1] для этого случая была доказана следующая лемма.

Лемма 2.1. *При сделанных выше предположениях для характеристических функций $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ при всех $A > 0$ справедливо неравенство*

$$\sup_{\|\tau\|_\infty \le A} |\widehat{f}(\tau) - \widehat{g}(\tau)| \le \frac{A^n}{2^{n-2}n!}, \tag{2.1}$$

где, как обычно, $\|\tau\|_\infty = \max(\tau_1, \tau_2)$, $\tau = (\tau_1, \tau_2)$.

Из этого ясно, что

$$|\widehat{f}(\tau)\widehat{k}_\varepsilon(\tau) - \widehat{g}(\tau)\widehat{k}_\varepsilon(\tau)| \le$$

$$\le \frac{A^n}{2^{n-2}n!}|\widehat{k}_\varepsilon(\tau)|I(\tau) + 2(1 - I(\tau))|\widehat{k}_\varepsilon(\tau)| \tag{2.2}$$

при всех τ. Здесь $I(\tau)$ – индикаторная функция квадрата $\{\tau = (\tau_1, \tau_2) : |\tau_1| < A, |\tau_2| < A\}$. В силу предположения 2. из соотношения (2.2) вытекает, что

$$\sup_x |f * k_\varepsilon(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le$$

$$\le \frac{A^n}{2^{n-2}n!}\int\limits_{\mathbf{R}^2} |\widehat{k}_\varepsilon(\tau)|I(\tau)d\tau + 2\int\limits_{\mathbf{R}^2} |\widehat{k}_\varepsilon(\tau)|(1 - I(\tau))d\tau. \tag{2.3}$$

Отсюда видно, что

$$\sup_x |f * k_\varepsilon(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le K(\varepsilon)\frac{A^{n+2}}{2^{n-2}n!} + W_\varepsilon(A),$$

где $W_\varepsilon(A) = 2\int_{\mathbf{R}^2} |\widehat{k}_\varepsilon(\tau)|(1-I(\tau))d\tau$, причем $W_\varepsilon(A) \to 0$ при $A \to \infty$. В силу произвольности $A > 0$ имеем

$$\sup_x |f * k_\varepsilon(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le \inf_{A>0}\left[K(\varepsilon)\frac{A^{n+2}}{2^{n-2}n!} + W_\varepsilon(A)\right]. \tag{2.4}$$

Разумеется, правая часть (2.4) стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому мы имеем обобщение результатов [1, 2] на произвольные сглаживающие ядра. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Допустим, что плотности f и g из $\mathcal{F}$ имеют совпадающие маргинальные распределения в направлениях $\theta_1, \dots, \theta_N$, а ядра k_ε удовлетворяют условиям* 1. *и* 2. *Тогда справедливо неравенство* (2.4)*:*

$$\sup_x |f * k_\varepsilon(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le \inf_{A>0} \left[K(\varepsilon) \frac{A^{n+2}}{2^{n-2} n!} + W_\varepsilon(A) \right].$$

Если же сглаживающее ядро k_ε дополнительно удовлетворяет условию

3. Для каждой функции $f \in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ существует такая функция $\omega_f(\varepsilon) > 0$ (не зависящая от x), монотонно стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$, что

$$|f * k_\varepsilon(x) - f(x)| \le \omega_f(\varepsilon) \quad \text{при всех} \quad f \in \mathcal{F}_0 \quad \text{и всех} \quad \varepsilon > 0,$$

то мы можем оценить также качество восстановления самой функции f.

Именно, из (2.4) с учетом 3., при условии, что $f \in \mathcal{F}_0$, $g \in \mathcal{F}_0$ получаем

$$\sup_x |f(x) - g(x)| \le$$

$$\le \inf_{A>0, \varepsilon>0} \left[K(\varepsilon) \frac{A^{n+2}}{2^{n-2} n!} + W_\varepsilon(A) + \omega_f(\varepsilon) + \omega_g(\varepsilon) \right]. \tag{2.5}$$

В этом случае мы также имеем обобщение соответствующих результатов из [1, 2]. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 2.2. *Допустим, что плотности f и g из $\mathcal{F}$ имеют совпадающие маргинальные распределения в направлениях $\theta_1, \dots, \theta_N$, а ядра k_ε удовлетворяют условиям* 1., 2. *и* 3. *Тогда справедливо неравенство* (2.5)*:*

$$\sup_x |f(x) - g(x)| \le$$

$$\le \inf_{A>0, \varepsilon>0} \left[K(\varepsilon) \frac{A^{n+2}}{2^{n-2} n!} + W_\varepsilon(A) + \omega_f(\varepsilon) + \omega_g(\varepsilon) \right].$$

Разумеется, точность оценки (2.5) зависит от величин $K(\varepsilon)$, $\omega_f(\varepsilon)$ и $\omega_g(\varepsilon)$, которые связаны с конкретным видом сглаживающего ядра k_ε. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим ядро

$$k_\varepsilon(x) = \frac{2\varepsilon}{x_1}\left[\cos\left(\frac{x_1}{2\varepsilon}\right) - \cos\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right]\frac{2\varepsilon}{x_2}\left[\cos\left(\frac{x_2}{2\varepsilon}\right) - \cos\left(\frac{x_2}{\varepsilon}\right)\right].$$

Здесь $x = (x_1, x_2)$. Это известное ядро Валле–Пуссена. Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{x_1}\left[\cos\left(\frac{x_1}{2\varepsilon}\right) - \cos\left(\frac{x_1}{\varepsilon}\right)\right] dx_1 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\infty} |\sin z \sin 3z|\frac{dz}{z^2} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right),$$

то $K(\varepsilon)$ не зависит от ε и

$$K(\varepsilon) = 4\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^2.$$

При $A > 2/\varepsilon$ преобразование Фурье функции k_ε зануляется, так что $W_\varepsilon(A) = 0$ при $A > 2/\varepsilon$. Таким образом, оценка (2.4) примет вид

$$\sup_x |f * k_\varepsilon(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le 64\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^{n+2} n!}.$$

Если же функция f имеет градиент, ограниченный постоянной C, то

$$\sup_x |f(x) - g * k_\varepsilon(x)| \le 64\left(\frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\right)^2 \frac{1}{\varepsilon^{n+2} n!} + 2C\varepsilon.$$

Пример 2. Рассмотрим ядро

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(1 - \dfrac{|x_1|}{\varepsilon}\right)\left(1 - \dfrac{|x_2|}{\varepsilon}\right), & \|x\|_\infty \le \varepsilon, \\ 0, & \|x\|_\infty \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Для него

$$\widehat{k}_\varepsilon(t) = \frac{2(1-\cos\varepsilon t_1)}{\varepsilon^2 t_1^2}\,\frac{2(1-\cos\varepsilon t_2)}{\varepsilon^2 t_2^2}.$$

Здесь снова $K(\varepsilon)$ не зависит от ε и $K(\varepsilon)=1$. Посчитать здесь точный вид $W_\varepsilon(A)$ в явном виде уже не удается. Однако ясно, что эта функция зависит от произведения $A\varepsilon$. Легко понять, что $W_\varepsilon(A) \le C_1/(A\varepsilon)$, где C_1 – некоторая абсолютная постоянная, причем это неравенство точно при $A\to\infty$. Таким образом, неравенство (2.4) принимает вид

$$\sup_x |f*k_\varepsilon(x) - g*k_\varepsilon(x)| \le \inf_{A>0}\left[\frac{A^{n+2}}{2^{n-2}n!} + C_1/(A\varepsilon)\right],$$

что несколько хуже, чем в предыдущем примере.

Литература

1. L. A. Khalfin, L. B.Klebanov, *A solution of the computer tomography paradox and estimating the distances between the densities of measures with the same marginals.* — The Annals of Probability **22, No 4** (1994), 2235–2241.
2. L. A. Khalfin, L. B.Klebanov, *On some problems of computerized tomography.* In: Probability Theory and Mathematical Statistics. Editors: I. A. Ibragimov and A. Yu. Zaitsev. (Proceedings of the A. N. Kolmogorov Simposium), Gordon and Breach Publishers, 1996, 201–208.
3. S. Gutman, J. H. B. Kemperman, J. A. Reeds, L. A. Shepp, *Existence of Probability measures with Given Marginals.* — The Annals of Probability **No. 4** (1991), 1781–1797.

Klebanov L. B., Khalfin L. A. On reconstruction of the density based on the finite set of Radon's transformation.

In this paper we give the estimates of the approximate (in the different metrixes) reconstruction of the smoothed density based on the finite set of Radon's transformation for the different smoothing kernels.

С.-Петербургский
государственный университет
архитектуры и строительства

Поступило 5 сентября 1997 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН