А. В. Либер, В. А. Смирнова

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ БРАУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМ СНОСОМ

1. В работе продолжены исследования, начатые в [1].

Пусть $w_c(s) = cs + w(s)$, где $w(s)$ – процесс броуновского движения. В отличие от винеровского процесса, процесс $w_c(s)$ невозратен, и момент $\nu(0,t) = \min\{s; \int\limits_0^s g(w_c(v))dv \geqslant t\}$, названный в [1] обратным ко времени пребывания, может быть как конечным, так и бесконечным. В случае $\nu(0,t) < \infty$ результаты для винеровского процесса со сносом могут быть получены из соответствующих результатов для винеровского процесса без сноса с помощью преобразования Гирсанова [5, глава 6, §3].

В случае, когда $\nu(0,t) = \infty$, применить преобразование Гирсанова невозможно. Результаты имеют смысл лишь при естественных условиях накладываемых на функции f и g и доказательство существенно отличается от доказательства для случая $\nu(0,t) < \infty$.

В работе также рассматривается достаточно общий момент остановки, включающий моменты, рассмотренные в [1]. Предложенный метод позволяет вычислять явные выражения для распределений функционалов.

2. При вычислении распределений функционалов на первом этапе задача о вычислении распределения для фиксированного момента t заменяется аналогичной задачей для случайного момента τ, (τ не зависит от броуновского движения и имеет экспоненциальное распределение). Подробнее об этом см. в [1].

Пусть $f(x)$ – неотрицательная кусочно-непрерывная функция.

Введем обозначения:

$l_c(s,y) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^s \mathbb{I}_{(y,y+s)}(w_c(v))dv$ – локальное время процесса $w_c(s)$;

$A_0(s) = \int\limits_0^s f(w_c(v))dv$ – интегральный функционал от $w_c(s)$;

$A_\gamma(s) = \int\limits_0^s f(w(v))dv + \sum\limits_{i=1}^p \gamma_i l_c(s, a_i)$, $\gamma_i \geqslant 0$, $a_i \in R^1$, $p < \infty$ – аддитивный функционал, включающий линейную комбинацию локальных времен;

$\nu(\beta, t) = \inf\{s; \int\limits_0^s g(w_c(v))dv + \sum\limits_{k=1}^q \beta_k l(s, z_k) \geqslant t\}$, $\beta_k \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, q$ – момент, обратный к аддитивному функционалу;

$\nu_l(\beta_l, t) = \inf\{s; \int\limits_0^s g_r(w(v))dv + \sum\limits_{k=1}^q \beta_{r,k} l(s, z_{r,k}) \geqslant t\}$, $\beta_{r,k} \geqslant 0$, $k = 1, \ldots, q$, $r = 1, \ldots, n+1$ – семейство моментов, обратных к аддитивным функционалам;

$\nu^{\wedge n}(\beta, \vec{t}) = \nu_1(\beta, t_1) \wedge \nu_2(\beta, t_2) \wedge \ldots \wedge \nu_{n+1}(\beta, t_{n+1})$ – минимум нескольких моментов.

Доказательство теорем о вычислении распределений функционалов в случае, когда $\nu(0, t) = \infty$ опирается на следующий результат.

Теорема 2A. *Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ – неотрицательная кусовно-непрерывная функция такая, что при некоторых h_1 и h_2 выполнено равенство $f(x) = 0$, когда $c < 0$ и $x \in (-\infty, h_1)$, или, когда $c > 0$ и $x \in (h_2, \infty)$.*

Тогда для $c < 0$ функция

$$U_-(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x[\exp(-A_\gamma(\infty), \sup_{0 \leqslant s \leqslant \infty} w_c(s) < b], \ \ x \in (-\infty, b),$$

а для $c > 0$ функция

$$U_+(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x[\exp(-A_\gamma(\infty), a < \inf_{0 \leqslant s \leqslant \infty} w_c(s)], \ \ x \in (a, \infty)$$

является единственным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (c^2/2 + f(x))U(x) = 0, \quad x \in (-\infty, \infty)/\{a_r, \ldots, a_r\} \tag{2.1}$$

$$U'(a_{k+0}) - U'(a_{k-0}) = 2\gamma_k U(a_k), \quad b = r \ldots r \tag{2.2}$$

с соответствующими граничными условиями:

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-cx} U_-(x) = 1, \quad U_-(b-0) = 0, \tag{2.3}$$

$$U_+(a+0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} e^{cx} U_+(x) = 1. \tag{2.4}$$

Замечание 2.1. Если $b = \infty$, то условие справа в (2.3) должно быть заменено условием, что функция $e^{-cx}U_-(x)$ ограничена при $x \to \infty$.

Если $a = -\infty$, то условие слева в (2.4) должно быть заменено условием, что функция $e^{-cx}U_+(x)$ ограничено при $x \to -\infty$.

Доказательство. Положим

$$U^c(x) = \mathbf{E}^x \exp\left(-\int\limits_0^\infty f(w_c(s))ds\right). \tag{2.5}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_t$ – σ-алгебру событий, порожденных процессом $w_c(s)$ при $s \leqslant t$. Функцию $u^c(x)$, используя марковское свойство винеровского процесса, можно представить в следующем виде:

$$u^c(x) = \mathbf{E}^x\left\{\mathbf{E}^x\left\{\exp\left(-\int\limits_0^\infty f(w_c(s))ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right\}\right\} =$$

$$= \mathbf{E}^x\left\{e^{-\int_0^t f(w_c(s))ds}\mathbf{E}^x\left\{\exp\left(-\int\limits_t^\infty f(w_c(s))ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right\}\right\} = u(t,x).$$

Из формулы Фейнмана–Каца следует, что $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,u(t,x) + c\frac{\partial}{\partial x}\,u(t,x) - f(x)u(t,x).$$

Так как функция $u(t,x)$ не зависит от t, то $u_c(x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{2}U_c''(x) + cU_c'(x) - f(x)U_c(x) = 0. \tag{2.6}$$

Очевидно, что функция $e^{cx}U_c(x)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{2}\,U''(x) - \left(\frac{c^2}{2} + f(x)\right)U(x) = 0.$$

Таким образом, при $b = \infty$ и $a = -\infty$ и $\gamma_i = 0$, $i = 1,2,\ldots,p$ функции $U_\pm(x)$ удовлетворяют уравнению (2.1).

Выполнение граничных условий (2.3), (2.4) следует из того, что при $c < 0$ $\mathbf{P}^x(\sup w_c(s) \leqslant h) \to 1$ при $x \to -\infty$ и при $c > 0$ $\mathbf{P}^x(\sup w_c(s) \geqslant h) \to 1$ при $x \to \infty$. Теорема 2А для указанных значений параметров доказана.

Для случая, когда $b \neq \infty$, $a \neq -\infty$, $\gamma_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, p$, теорема может быть выведена с помощью предельного перехода при $\varepsilon \to 0$ из доказанного утверждения, в котором специальным образом наблюдаются функции $f_\varepsilon(x)$. Подробнее о предельном переходе такого типа см. [4].

Следующий результат является основным в решении задачи о вычислении распределений функционалов от броуновского движения со сносом в случае, когда $\nu(0, t) = \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть $f(x)$, $x \in (-\infty, \infty)$ – неотрицательная кусочно-непрерывная функция. Пусть при некоторых h_1, h_2 выполняются равенства $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, когда $c < 0$ и $x \in (-\infty, h_1)$ или когда $c > 0$ и $x \in (h_2, \infty)$. Обозначим для краткости $\nu = \nu(0, \tau)$. Тогда для $c < 0$ функция*

$$U_-(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x\{\exp(-A_0(\nu)); \nu = \infty, \sup_{0 \leqslant s \neq \nu} w_c(s) < b\},$$

а для $c > 0$ функция

$$U_+(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x\{\exp(-A_0(\nu)); \nu = \infty, \inf_{0 \leqslant s \leqslant \nu} w_c(s) > a\}$$

является единственным непрерывным решением задачи:

$$\frac{1}{2}U''(x) - (\lambda g(x) + \frac{c^2}{2} + f(x))U(x) = 0 \tag{2.7}$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to -\infty} e^{-cx}U_-(x) = 1, \quad U_-(b-) = 0, \\ &\lim_{x \to \infty} e^{-cx}U_+(x) = 1; \quad U_+(a+) = 0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $b = \infty$. Рассмотрим случай $c < 0$. Так как $g(x)$ – неотрицательная функция, то условие $\nu(0, t) = \infty$ эквивалентно условию $\int\limits_0^\infty g(w_c(s))ds < t$. Используя это получим

$$\mathbf{E}^x\bigg\{\exp\bigg(-\int\limits_0^{\nu(0,t)} f(w_c(s))ds\bigg); \nu(0, t) = \infty\bigg\} =$$

$$= \mathbf{E}^x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\nu(0,t)} f(w_c(s))ds\Big) \mathbb{I}_{(-\infty,t)}\Big(\int\limits_0^{\infty} g(w_c(v))dv\Big)\Big\}$$

$$U(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{E}^x\Big\{ \exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(w_c(s))ds\Big)\times$$

$$\times \mathbb{I}_{(-\infty,t)}\Big(\int\limits_0^{\infty} g(w_c(v))dv\Big)\Big\}dt =$$

$$\mathbf{E}^x\Big\{\frac{1}{\lambda}\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(w_c(s))ds - \lambda\int\limits_0^{\infty} g(w_c(s))ds\Big)\Big\} =$$

$$= \mathbf{E}^x\Big\{\frac{1}{\lambda}\exp\Big(-\int\limits_0^{\infty} f(w_c(s)) + \lambda g(w_c(s))ds\Big)\Big\}.$$

Применяя теорему 2.A к функции $f_1(x) = f(x) + \lambda g(x)$, получаем утверждение теоремы 2.1.

При $b < \infty$ утверждение теоремы получается аналогично тому, как это сделано в [2, гл. 2, §2, теорема 2.2]. Случай $c > 0$ рассматривается точно также.

Для более общего момента остановки $\nu^{\wedge n}(\beta, \vec{t})$ справедлив следующий результат.

Пусть τ_l, $l = 1, \dots, n+1$ – независимые экспоненциально распределенные с параметрами λ_l случайные моменты времени, не зависящие от w_c, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$, $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n+1})$. Определим момент остановки

$$\nu^{\wedge n}(0, \vec{\tau}) = \nu_1(0, \tau_1) \wedge \ldots \wedge \nu_{n+1}(0, \tau_{n+1}).$$

Для $\beta = 0$ обозначим $\nu = \nu^{\wedge n}(0, \vec{\tau})$.

Теорема 2.2. *Пусть $f(x)$, $g_l(x)$ – неотрицательные кусочно-непрерывные функции и такие, что при некоторых h_1, h_2 $f(x) = 0, g_l(x) = 0$, когда $c < 0$ и $x \in (-\infty, h_1)$, или когда $c > 0$ и $x \in (h_2, \infty)$.*

Тогда для $c < 0$ функция

$$U_-^{\wedge n}(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x\Big\{ \exp(-A_0(\nu)),\ \nu = \infty,\ \sup_{0\leqslant s\leqslant \nu} w_c(s) < b\Big\},$$

а для $c > 0$ функция

$$U_+^{\wedge n}(x) = e^{cx}\mathbf{E}^x\left\{\exp(-A_0(\nu)),\ \nu = \infty,\ \inf_{0\leqslant s\leqslant \nu} w_c(s) > a\right\}$$

является единственным непрерывным решением задачи.

$$\frac{1}{2}U''(x) - \left(\sum_{l=1}^{n+1}\lambda_l g_l(x) + f(x) + \frac{c^2}{2}\right)U(x) = 0, \quad x \in (a,b),$$

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} e^{-cx}U_-(x) = 1, \quad U_-(b-0) = 0,\\ &\lim_{x\to\infty} e^{cx}U_+(x) = 1; \quad U_+(a+0) = 0.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству теоремы 2.1, так как

$$U_-^{\wedge n}(x) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(\vec{\lambda},\vec{t})}\mathbf{E}^x\left\{\exp\left(-\int_0^\nu f(w_c(s))ds\right), \nu = \infty\right\}$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(\vec{\lambda},\vec{t})}\mathbf{E}^x\left\{\exp\left(-f(w_c(s))ds\right)\prod_{i=1}^n \mathbb{I}_{(-\infty,t_i)}\left(\int_0^\infty g_i(w_c(v))dv\right)\right\}$$

$$= \mathbf{E}^x\left\{\frac{1}{\lambda_1\dots\lambda_{n+1}}\exp\left(-\int_0^\infty f(w_c(s))ds - \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_i\int_0^\infty g_i(w_c(s))ds\right)\right\}.$$

Замечание 2.2. В случае, когда вместо $\nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau})$ рассматривается момент $\nu^{\wedge n}(\beta,\vec{\tau})$ результаты обобщаются аналогично тому, как это сделано в [1, теорема 2.4]).

3. Рассмотрим случай, когда момент $\nu(\beta, t)$ конечен. Мы докажем теорему для более общего, чем в [1], момента остановки, не используя преобразование Гирсанова.

Сформулируем теорему о выходе из области (теорема 4.А в [1]) для броуновского процесса со сносом, которая будет нужна в качестве вспомогательного результата.

Теорема 3.1. *Пусть $F(x,\vec{y})$, $f(x,\vec{y})$, $x \in R$, $y \in R^k$ – неотрицательные кусочно-непрерывные функции по каждой из переменных, ограниченные на любом компакте из R^{k+1}. Пусть $\xi(s) = (x + w_c(s),$*

$y_1 - \int\limits_0^s g_1(x+w_c(x))du, \ldots, y_k - \int_0^s g_k(x+w_c(u))du)$, *где* g_i, $i = 1, \ldots, k$ – *неотрицательные кусочно-непрерывные функции,* $\mu = \min\{s : \xi(s) \notin \Delta\}$ – *момент первого выхода процесса* $\xi(s)$ *из области* Δ. *Тогда функция*

$$u(x, \vec{y}) = \mathbf{E}^x \left\{ F(\xi(\mu)) \exp\left(- \int\limits_0^{\mu} f(\xi(s)) \right) ds; \quad \mu < \infty \right\}$$

удовлетворяет в области Δ *уравнению:*

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x, \vec{y}) + c\frac{\partial}{\partial x}\, u(x, \vec{y}) - \sum_{l=1}^{k} g_l(x) \frac{\partial}{\partial y_l} u(x, \vec{y}) -$$
$$- f(x, \vec{y}) u(x, \vec{y}) = 0 \qquad (3.1)$$

и граничному условию

$$u(x, \vec{y}) = F(x, \vec{y}) \quad \text{при} \quad (x, \vec{y}) \in \partial\Delta.$$

Следствие. *Пусть* $F(x, \vec{y})$, $f(x, \vec{y})$, $\xi(s)$ – *определены как в предыдущей теореме*

$$\mu_1 = \min\{s; \xi(s) \notin \Delta_1\};\ \mu_2 = \min\{s; \xi(s) \notin \Delta_2\}$$

– *моменты первого выхода процесса* $\xi(s)$ *из областей* Δ_1 *и* Δ_2 *соответственно. Пусть* $\Delta = \Delta \cap \Delta_2$. *Тогда, очевидно,* $\mu = \mu_1 \wedge \mu_2 = \min\{s : \xi(s) \notin \Delta\}$. *Тогда функция*

$$u(x, \vec{y}) = \mathbf{E}^x \{ F(\xi(\mu)) \exp\left(- \int\limits_0^{\mu} f(\xi(s)) \right) ds;\ \mu = \mu_1,\ \mu < \infty \} \qquad (3.2)$$

удовлетворяет в области Δ *уравнению* (3.1) *и граничным условиям:*

$$u(x, \vec{y}) = F(x, \vec{y}),\ \text{при}\ (x, \vec{y}) \in \partial\Delta \cap \partial\Delta_1 \qquad (3.3)$$

$$u(x, \vec{y}) = 0,\ \text{при}\ (x, \vec{y}) \in \partial\Delta / \partial\Delta_1. \qquad (3.4)$$

Данный результат непосредственно следует из предыдущей теоремы, так как

$$u(x, \vec{y}) = \mathbf{E}^x \left\{ F(\xi(\mu)) \mathbb{I}_{\partial\Delta_1}((\xi(\mu)) \exp\left(- \int\limits_0^{\mu} f(\xi(s)) \right) ds,\ \mu < \infty \right\}$$

и, согласно теореме 3.1, $u(x,\vec{y})$ удовлетворяет уравнению (3.1) в области Δ и эквивалентному (3.3) и (3.4) граничному условию

$$u(x,\vec{y}) = F(x,\vec{y})\mathbb{1}_{\partial\Delta_1}(x,\vec{y}) \text{ при } (x,\vec{y}) \in \partial\Delta.$$

Для момента остановки $\nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau})$ справедлив следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть $F(x)$, $f(x)$ – неотрицательные кусочно-непрерывные функции, $m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_{m+1} < i_{n+1}$, $\nu^{\wedge m} = \nu_{i_1}(0,\tau_{i_1}) \wedge \ldots \wedge \nu_{i_{m+1}}(0,\tau_{i_{m+1}})$. Тогда функция*

$$S^{\wedge n}(x) = \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\wedge n}))\exp(-A_0(\nu^{\wedge n})), \nu^{\wedge n} = \nu^{\wedge m},\ \nu^{\wedge n} < \infty\}$$

является единственным непрерывным ограниченным решением уравнения:

$$\frac{1}{2}S''(x) + cS'(x) - \left(f(x) + \sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j g_j(x)\right)S(x) = -\sum_{l=1}^{m+1}\lambda_{i_l} g_{i_l}(x)F(x).$$

Доказательство. Применим следствие из теоремы 3.1 к процессу

$$\xi(s) = \left(x + w_c(s), t_1 - \int_0^s g_1(x + w_c(v))dv, \ldots, t_{n+1} - \int_0^s g_{n+1}(x + w_c(v))dv\right)$$

и областям $\Delta_1 = R^1 \times A_1 \times \ldots \times A_{n+1}$, $\Delta_2 = R^1 \times B_1 \times \ldots \times B_{n+1}$, $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2 = R^1 \times [(0,\infty)]^{n+1}$, где

$$\begin{cases} A_j = R^1, & j \neq i_l, \\ A_j = (0,\infty), & j = i_l, \end{cases} \quad \begin{cases} B_j = (0,\infty), & j \neq i_l, \\ B_j = R^1, & j = i_l. \end{cases}.$$

Тогда функция H

$$H(x,\vec{t}) = \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau})))\exp(-A_0(\nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau}))), \nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau}) = \\ = \nu^{\wedge m}(0,\vec{\tau}),\ \nu^{\wedge n}(0,\vec{\tau}) < \infty\}$$

удовлетворяет уравнению при $x \in \Delta$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}H(x,\vec{t}) + c\frac{\partial}{\partial x}H(x,\vec{t}) - \sum_{j=1}^{n+1} g_j(x)\frac{\partial}{\partial t_j}H(x,\vec{t}) - f(x,\vec{t})H(x,\vec{t}) = 0$$

и $n+1$ граничным условиям:

$$H(x,t_1,\dots,t_{k-1},0,t_{k+1},\dots,t_{n+1})=0, \quad k\neq i_l,$$
$$H(x,t_1,\dots,t_{k-1},0,t_{k+1},\dots,t_{n+1})=F(x), \quad k=i_l.$$

Функция $S^{\wedge n}(x)$ – это $n+1$-кратное преобразование Лапласа функции $H(x,\vec{t})$:

$$S^{\wedge n}(x)=\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty \exp\left(-\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j t_j\right)H(x,\vec{t})dt_1,\dots,dt_{n+1}.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty \exp\left(-\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j t_j\right)\frac{\partial}{\partial t_k}H(x,\vec{t})dt_1,\dots,dt_{n+1}=$$
$$\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty \exp\left(-\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j t_j\right)H(x,\vec{t})\Big|_{t_k=0}^{t_k=\infty}dt_1,\dots,dt_{k-1},dt_{k+1}\dots dt_{n+1}+$$
$$+\lambda_k\int\limits_0^\infty\dots\int\limits_0^\infty \exp\left(-\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j t_j\right)H(x,\vec{t})dt_1,\dots,dt_n=$$
$$=\begin{cases}-\lambda_k F(x)+\lambda_k S^{\wedge n}(x), & k=i_l,\\ \lambda_k S^{\wedge n}(x), & k\neq i_l.\end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2}S''(x)+cS'(x)-\left(f(x)+\sum_{j=1}^{n+1}\lambda_j g_j(x)\right)S(x)=-\sum_{k=1}^{m+1}\lambda_{i_k}g_{i_k}(x)F(x).$$

В заключение отметим 2 частных случая этой теоремы:

а) $m=0$. В этом случае теорема описывает распределение функционала при условии, что $\nu_{i_1}(0,\tau_{i_1})$ является наименьшим из всех моментов, входящих в определение $\nu^{\wedge n}$;

б) $m=n$. В этом случае условие $\nu^{\wedge n}=\nu^{\wedge m}$ – можно обрать, то есть получается распределение функционала с единственным наложенным условием $\nu^{\wedge n}<\infty$.

В случае, когда $m=n=0$, мы получаем распределение момента, в котором не фигурируют минимумы. Примедем аналог теоремы 3.2 для моментов, включающих локальные времена.

Теорема 3.3. *Пусть* $F(x)$, $f(x)$ *неотрицательные кусочно-непрерывные функции,* $\nu^{\wedge n} = \nu_1(\beta_1,\tau_1)\wedge\ldots\wedge\nu_{n+1}(\beta_{n+1},\tau_{n+1})$, $m\leqslant n$, $1\leqslant i_1<\ldots<i_{m+1}\leqslant i_{n+1}$, $\nu^{\wedge m} = \nu_{i_1}(\beta_{i_1}\tau_{i_1})\wedge\ldots\wedge\nu_{m+1}(\beta_{m+1},\tau_{i_{m+1}})$.

Тогда функция

$$S^{\wedge n}(x) = \mathbf{E}^x\biggl\{F(w_c(\nu^{\wedge n}))\exp(-A_\gamma(\nu^{\wedge n})), \nu^{\wedge n} = \nu^{\wedge m}, \sup_{0\leqslant s\leqslant\nu} w_c(s) < b,$$
$$\inf_{0\leqslant s\leqslant\nu} w_c(s) > a, \quad \nu^{\wedge n} < \infty\biggr\},$$

является единственным непрерывным ограниченным решением задачи для $x\in(a,b)\setminus\{z_{1,1},\ldots,z_{1,q},z_{2,1},\ldots,z_{n+1,q},a_1\ldots,a_p\}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}S''(x) + cS'(x) - \Bigl(f(x) + \sum\limits_{j=1}^{n+1}\lambda_j g_j(x)\Bigr)S(x) = \\ \qquad\qquad = -\sum\limits_{l=1}^{m+1}\lambda_{i_l} g_{i_l}(x)F(x) & (3.5)\\ S'(z_{r,k}+) - S'(z_{r,k}-) = 2\lambda_r\beta_{r,k}S(z_{r,k}) - 2\lambda_r\beta_{r,k}F(z_{r,k}), \\ \qquad r = 1,\ldots,n+1, \quad k=1,\ldots,q, \quad r = i_l & (3.6)\\ S'(z_{r,k}+) - S'(z_{r,k}-) = 2\lambda_r\beta_{r,k}S(z_{r,k}),\ k=1,\ldots,q,\ r\neq i_l & (3.7)\\ S'(a_i+) - S'(a_i-) = 2\gamma_i S(a_i), \quad i=1,\ldots,p & (3.8)\\ S(a+) = 0, \quad S(b-) = 0. & (3.9)\end{cases}$$

Условия (3.6)–(3.8) могут быть получены путем предельного перехода в теореме 3.2, примененной к специальным функциям

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{q}\beta_{r,k}\,\mathbb{I}_{[z_{r,k},z_{r,k}+\varepsilon)}(x),$$

$$f_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{i=1}^{p}\gamma_i\,\mathbb{I}_{[a_i,a_i+\varepsilon)}(x).$$

Уравнение (3.5) и граничные условия (3.9) получаются заменой области Δ в доказательстве теоремы 3.2 на область $(a,b)\times[(0,\infty)]^{n+1}$.

Перейдем к рассмотрению результатов о вычислении распределений функционалов от броуновского движения со сносом для моментов, содержащих операции максимума.

Начнем с наиболее простого момента $\nu^{\wedge} = \nu^{\vee}(\beta, \vec{t}) = \nu_1(\beta, t_1) \vee \nu_2(\beta_2, t_2)$. Положим $\nu^{\wedge} = \nu^{\wedge}(\beta, \vec{t}) = \nu_1(\beta_1, t_1) \wedge \nu_2(\beta_2, t_2)$. Следующее соотношение позволяет сводить задачу о распределении функционалов от броуновского движения со сносом, остановленного в максимальный из двух моментов ν_l, $l = 1, 2$, к аналогичным задачам для самих моментов ν_l, и моменту минимума $\nu_1 \wedge \nu_2$. Имеем

$$\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\vee}))\exp(-A_0(\nu^{\vee})), \nu^{\vee} < \infty\} =$$

$$\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_1))\exp(-A_0(\nu_1)), \nu_2 < \nu_1 < \infty\} +$$

$$+\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_2))\exp(-A_0(\nu_2)), \quad \nu_1 < \nu_2 < \infty\} =$$

$$= \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_1))\exp(-A_0(\nu_1)), \nu_1 < \infty\} -$$

$$-\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_1))\exp(-A_0(\nu_1)), \nu_1 < \nu_2, \nu_1 < \infty\} +$$

$$+\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_2)\exp(-A_0(\nu_2)), \nu_2 < \infty\} -$$

$$-\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_2))\exp(-A_0(\nu_2), \nu_2 < \nu_1, \nu_2 < \infty\} =$$

$$= \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_1))\exp(-A_0(\nu_1)), \nu_1 < \infty\} + \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_2))\exp(-A_0(\nu_2)),$$

$$\nu_2 < \infty\} - \mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\wedge}))\exp(-A_0(\nu^{\wedge})), \nu^{\wedge} < \infty\}. \tag{3.10}$$

Таким образом, можно получить, что для математических ожиданий от функционалов, остановленных в момент максимальный из данных моментов остановки, справедлив аналог известной формулы для вероятностей

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) + \ldots +$$

$$+(-1)^n P(A_1 \ldots A_n),$$

где вместо объединения множеств будут фигурировать максимумы моментов, а вместо пересечений – минимумы моментов. Это следует из того, что момент выхода из пересечения областей есть минимум моментов выхода из области, а из объединения – максимум.

В результате, любой момент, содержащий операции максимума и минимума может быть выражен через моменты, содержащие только операцию минимума. Например, для момента

$$\tilde{\nu} = \nu_1(0, \tau_1) \vee [\nu_2(0, \tau_2) \vee \{\nu_3(0, \tau_3) \vee \nu_4(0, \tau_4)\}]$$

верно следующее тождество: (для краткости
$\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu))\,\exp(-A_0(\nu)),\ \nu<\infty\}$ будем обозначать $E(\nu)$)

$$E(\tilde{\nu}) = E(\nu_1)+E(\nu_2\wedge\nu_3)+E(\nu_2\wedge\nu_4)-E(\nu_2\wedge\nu_3\wedge\nu_4)-E(\nu_1\wedge\nu_2\wedge\nu_4)-$$
$$-E(\nu_1\wedge\nu_2\wedge\nu_3)+E(\nu_1\wedge\nu_2\wedge\nu_3\wedge\nu_4).$$

Для случая $\nu^{\vee}=\infty$ имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\vee}))\exp(-A_0(\nu^{\vee})),\nu^{\vee}=\infty\}=\\&=\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_1))\exp(-A_0(\nu_1)),\nu_1=\infty\}+\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu_2))\times\\&\times\exp(-A_0(\nu_2)),\nu_2=\infty\}-\mathbf{E}^x\{F(w_c(\nu^{\wedge}))\exp(-A_0(\nu^{\wedge})),\nu^{\wedge}=\infty\}.\end{aligned}$$

Приведем простые примеры вычисления распределений.

Пример 1. Рассмотрим случайный момент

$$\nu(0,\tau)=\min\left\{s:\int_0^s \mathbb{I}_{[r,\infty)}(w_c(v))dv\geqslant\tau\right\}.$$

Вычислим $\mathbf{P}^x(\nu(0,\tau)=\infty)$ при $c<0$. Согласно теореме 2.1 данная вероятность есть единственное ограниченное решение задачи:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}S''(x)+cS'(x)-\lambda\mathbb{I}_{[r,\infty)}(x)S(x)=0\\ S(-\infty)=1\end{cases}.$$

Отсюда следует, что при $c<0$

$$\mathbf{P}^x(\nu(0,\tau)=\infty)=\begin{cases}1+\dfrac{c+\sqrt{c^2+2\lambda}}{c-\sqrt{c^2+2\lambda}}\,e^{(r-x)2c}, & x\leqslant r,\\ \dfrac{2c}{c-\sqrt{c^2+2\lambda}}\,e^{(r-x)(\sqrt{c^2+2\lambda}+c)}, & x\geqslant r.\end{cases}$$

Пример 2. Рассмотрим момент, обратный к локальному времени:

$$\rho(t,r)=\min\{s:l_c(s,r)\geqslant t\}.$$

Вычислим $\mathbf{P}^x(\rho(t,r)=\infty)$ при $c<0$.

Учитывая замечание 2.2, можно показать, что вероятность $\mathbf{P}^x(\rho(\tau,r)=\infty)$ при $c<0$ есть единственное непрерывное ограниченное решение задачи:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}S''(x)+c\,S'(x)=0,\\ S'(r+)-S'(r-)=2\lambda S(r),\\ S(-\infty)=1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}^x(\rho(\tau,r)=\infty)=\begin{cases} 1+\dfrac{\lambda}{c-\lambda}\,e^{2c(r-x)}, & x\leqslant r,\\ \dfrac{c}{c-\lambda}, & x\geqslant r.\end{cases}$$

Обращая преобразование Лапласа, получим, чо при $c<0$

$$\mathbf{P}^x(\rho(t,r)=\infty)=\begin{cases} 1-e^{2c(r-x)}-ce^{ct+2c(r-x)}, & x\leqslant r,\\ -ce^{ct}, & x\geqslant r.\end{cases}$$

Литература

1. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения, остановленного в момент, обратный ко времени пребывания.* Зап. научн. семин. ПОМИ **228** (1996), 39–56.
2. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий.* Наука, С.-Петербург, 1994.
3. А. Н. Бородин, *О распределении функционалов от броуновского движения остановленного в момент обратной к локальному времени.* Зап. научн. семин. ЛОМИ **184** (1990), 37–61.
4. А. Н. Бородин, *Распределения функционалов от броуновского локального времени.* Теория вероятн. и ее примен. **34**, No. 3 (1989), 433–450.
5. Р. Ф. Линцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов.* М., Наука, 1970.

Liber A. V., Smirnova V. A. On distribution of functionals of Brownian motion with linear drift.

The paper deals with the methods of calculation of the distributions of functionals of Brownian motion with linear drift. The different stopping time moments are considered. The cases when the moments are equal to infinity is of special interest.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

Поступило 8 октября 1997 г.