Я. Ю. Никитин, Н. А. Степанова

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ КЕНДАЛЛОВСКОГО ТАУ И АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОСНОВАННОГО НА НЕМ КРИТЕРИЯ НЕЗАВИСИМОСТИ

Ранговый коэффициент корреляции Кендалла является общепризнанной мерой взаимосвязи количественных и качественных признаков. Пусть $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ – выборка из двумерного распределения с абсолютно непрерывной функцией распределения (ф.р.) $F(x, y)$ и маргинальными ф.р. $G(x)$ и $H(y)$. Кендалловским тау называется статистика

$$\tau_n = \frac{4}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} \mathbf{1}\{(X_i - X_j)(Y_i - Y_j) > 0\} - 1, \qquad (1)$$

которая представляет собой меру "согласованности" признаков X и Y в парах (X_i, Y_i), $i = 1, \dots, n$ и нормирована так, чтобы находиться между $+1$ при идеальном согласии ранжировок и -1 при полной их рассогласованности.

Очевидно, что статистика τ_n не изменится, если заменить наблюдения X_i и Y_i на их ранги в вариационных рядах наблюдений X и Y. Это оправдывает термин "ранговый коэффициент корреляции Кендалла", обычно используемый для τ_n.

Широкое использование τ_n как коэффициента ранговой корреляции началось после классической работы Кендалла [1] и его более поздней монографии [2]. В дальнейшем выяснилось, что меры взаимосвязи признаков, основанные на (1), рассматривались уже Эсшером [3], Линдебергом [4, 5] и Жорданом [6]. Поскольку τ_n является невырожденной U-статистикой с ограниченным ядром, свойства его детально изучены и приводятся в большинстве учебников непараметрической статистики.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, гранты 95-01-01260 и 96-01-0852, грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199 и Федеральной целевой программой интеграциия No. 326.53

Рассмотрим проверку гипотезы независимости

$$H_0 : F(x, y) = G(x)\, H(y), \quad x, y \in R^1$$

против альтернативы

$$H_1 : F(x, y) = G(x)H(y) + \theta\Omega(G(x), H(y)) \tag{2}$$

при всех x и y и некотором $\theta > 0$. Параметр θ предполагается настолько малым, чтобы $F(x, y)$ являлась ф.р. Неотрицательную ограниченную функцию Ω, заданную на единичном квадрате I^2, обычно называют функцией зависимости. Альтернатива (2) является важным частным случаем так называемой альтернативы строгой положительной квадрантной зависимости, при которой предполагается, что

$$F(x, y) \geq G(x)H(y)$$

при всех x и y, причем знак строгого неравенства имеет место хотя бы для одной пары (x, y).

Наиболее известным примером функции зависимости несомненно является функция

$$\Omega(x, y) = Cx(1 - x)y(1 - y), \quad 0 \leq x, y \leq 1, \quad C > 0, \tag{3}$$

которую обычно называют функцией Фарли-Гумбеля-Моргенштерна (ФГМ), см. [7–9]. Джонсон и Котц [10–12] ввели и изучили "обобщенные ФГМ-распределения". Эти исследования продолжались далее в [13–15], где подчеркивалась важная роль этих распределений при анализе корреляционных структур и связей.

Уже Фарли [7] обнаружил, что критерий независимости, основанный на τ_n, обладает наибольшей питменовской эффективностью в некотором подклассе альтернатив (2) именно для ФГМ-функции. Поскольку для асимптотически нормальных статистик питменовская и локальная (приближенная) бахадуровская эффективности совпадают [16], этот же вывод справедлив и для бахадуровской эффективности; подробнее см. в [17], гл. V и VI.

Кочар и Гупта [18] предложили интересное обобщение рангового коэффициента корреляции Кендалла (1), приводящее к состоятельному критерию независимости против альтернатив строгой положительной квадрантной зависимости. Пусть $k \geq 1$ – натуральное число. Рассмотрим U-статистику

$$U_n^{k+1} = (C_n^{k+1})^{-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k+1} \leq n} \Phi_{k+1}((X_{i_1}, Y_{i_1}), \ldots, (X_{i_{k+1}}, Y_{i_{k+1}})),$$

где ядро Φ_{k+1} задается следующим образом: $\Phi_{k+1}((X_{i_1}, Y_{i_1}), \dots, (X_{i_{k+1}}, Y_{i_{k+1}}))$ равно 1, если $\max_{1\le l\le k+1} X_l$ и $\max_{1\le l\le k+1} Y_l$ принадлежат одной и той же паре (X, Y) и равно 0 в противном случае.

Ясно, что при $k = 1$ получаем $U_n^2 = \frac{1}{2}(\tau_n + 1)$, поскольку $\Phi_2((X_1, Y_1), (X_2, Y_2)) = 1$ тогда и только тогда, когда $(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0$. Поэтому критерий независимости, основанный на U_n^2, оказывается эквивалентным классическому критерию, основанному на τ_n.

Кочар и Гупта показали в [18], что статистики U_n^{k+1} асимптотически нормальны при гипотезе и альтернативе, причем при H_0 имеет место сходимость по распределению

$$\sqrt{n}\Big(U_n^{k+1} - \frac{1}{k+1}\Big) \ \to \ N\Big(0, \frac{k^2}{(2k+1)^2}\Big).$$

В [18] была также вычислена питменовская эффективность критерия независимости, основанного на U_n^{k+1}, при выборе в качестве альтернативы двумерного экспоненциального распределения Блока–Базу [19]. Последнее является абсолютно непрерывной компонентой двумерного экспоненциального распределения Маршалла–Олкина [20]. Оказалось, что U_n^3, U_n^4 и U_n^5 в этом случае несколько эффективнее, чем τ_n, что, по мнению авторов [18], оправдывает их использование.

В настоящей заметке мы приведем другие примеры вычисления эффективности критериев, основанных на U_n^{k+1}. При этом будет использоваться не питменовская, а локальная (точная) бахадуровская эффективность. Как отмечалось выше, для асимптотически нормальных статистик упорядочение критериев при этом не меняется. Однако бахадуровская эффективность обладает тем достоинством, что для ее основного показателя – точного наклона – имеется универсальная оценка сверху в терминах информации Кульбака–Лейблера (так называемое неравенство Бахадура–Рагавачари). Это позволяет описать условия локальной оптимальности для статистик U_n^{k+1}. Мы доказываем, что при естественных априорных ограничениях на функцию зависимости Ω локальная оптимальность по Бахадуру имеет место тогда и только тогда, когда

$$\Omega_k(x, y) = Cx(1 - x^k)y(1 - y^k), 0 \le x, y \le 1, k \ge 1. \qquad (4)$$

Функция зависимости (4) является еще одним обобщением ФГМ – функции. Впервые она рассматривалась, по-видимому, Вудвортом [21], а затем Ледвиной [22, 23].

Описание условий асимптотической оптимальности по Питмену возможно на основе работы Рао [24]. Результаты при этом аналогичны, но при несколько ином наборе условий, выделяющих класс альтернатив.

Как известно, для вычисления точного наклона последовательности тестовых статистик необходимо знать грубую асимптотику вероятностей больших уклонений при H_0 и предел почти наверное при H_1 (см. [25], теорема 7.2 или [17], теорема 1.2.2).

Вопрос о больших уклонениях U_n^{k+1} при H_0 решается стандартным образом с помощью основного результата [26]; см. также [27], глава 8. Учитывая, что U_n^{k+1} – невырожденная U-статистика степени $k+1$ с асимптотической дисперсией $\sigma_{k+1}^2 = k^2/(2k+1)^2$, мы получаем следующее соотношение: при $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln P\Big(U_n^{k+1} - \frac{1}{k+1} \geq \varepsilon\Big) = -\psi_{k+1}(\varepsilon),$$

где $\psi_{k+1}(\varepsilon)$ – некоторая непрерывная в окрестности нуля функция, такая, что при $\varepsilon \to 0$

$$\psi_{k+1}(\varepsilon) \quad \sim \quad -\varepsilon^2/2\sigma_{k+1}^2. \tag{5}$$

Для вычисления предела почти наверное при альтернативе нам потребуется ввести ограничения на класс рассматриваемых функций зависимости Ω. Будем считать выполненными следующие условия:

(F1) Функция $\Omega(x,y)$ обладает на I^2 суммируемой смешанной производной
$\omega(x,y)$, причем

$$\omega(x,y) = \Omega_{xy}(x,y) = \Omega_{yx}(x,y)$$

(F2) $\Omega(\partial I^2) = 0$, где ∂I^2 – граница квадрата I^2.

В этих предположениях наблюдения имеют совместную плотность $f(x,y,\theta) = g(x)h(y)(1+\theta\omega(G(x),H(y)))$.

По усиленному закону больших чисел для U-статистик (см., например, [27], гл. 3) получаем, что при H_1 и $n \to \infty$ с вероятностью 1

$$E_F U_n^{k+1} - \frac{1}{k+1} \to E_F \Phi_{k+1}((X_{i_1}, Y_{i_1}), \ldots, (X_{i_{k+1}}, Y_{i_{k+1}}))$$

$$= (k+1)P_F\{X_1 > X_2, \dots, X_1 > X_{k+1}; Y_1 > Y_2, \dots, Y_1 > Y_{k+1}\}$$

$$= (k+1)\int\limits_{R^1} F^k(x,y,\theta)dF(x,y,\theta) := b_U^{k+1}(\theta) \qquad (6)$$

Используя вид альтернативной ф.р. и условие $(F1)$, мы можем выделить из $b_U^{k+1}(\theta)$ главную часть при $\theta \to 0$. Легко получить, что

$$b_U^{k+1}(\theta) \sim (k+1)\ \Big[\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (uv)^k \omega(u,v)dudv + k\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v)dudv\ \Big] \qquad (7)$$

При выполнении условия $(F2)$ можно проинтегрировать по частям, что дает

$$b_U^{k+1}(\theta) \sim k(k+1)^2 \int\limits_0^1\int\limits_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v)dudv. \qquad (8)$$

Из (5) и (8) по теореме 7.2 [25] получаем главную часть точного наклона $c_{k+1}(\theta)$ последовательности U_n^{k+1} (так называемый локальный точный наклон) при $\theta \to 0$:

$$c_{k+1}(\theta) \sim (k+1)^4(2k+1)^2\Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v)dudv\Big)^2\ \theta^2. \qquad (9)$$

Формула (9) позволяет сравнивать локальную бахадуровскую эффективность последовательности статистик Кочара–Гупты U_n^{k+1} по отношению к другим статистикам, локальный точный наклон которых известен. Для этого достаточно вычислить предел отношения локальных точных наклонов при $\theta \to 0$.

Возьмем в качестве простейшего примера альтернативу (2), отвечающую функции зависимости (3). Тогда

$$c_{k+1}(\theta) \sim \frac{(2k+1)^2}{(k+2)^4}\ \theta^2, \quad \theta \to 0.$$

Ясно,что коэффициент при θ^2 монотонно убывает при $k \geq 1$. Случай $k = 1$ отвечает локально оптимальному при данной альтернативе тау Кендалла (ср. [17], §5.4), а все статистики U_n^{k+1} ему проигрывают.

Точные наклоны удобно сравнивать с теоретической верхней границей, вытекающей из упоминавшегося выше неравенства Бахадура–Рагавачари:

$$c_{k+1}(\theta) \leq 2K(\theta), \tag{10}$$

где $K(\theta)$ – информационное "расстояние" Кульбака–Лейблера между плотностями $f(x,y,\theta)$ и $f(x,y,0)$, а именно

$$K(\theta) = \int\limits_{R^2} \ln \frac{f(x,y,\theta)}{f(x,y,0)} f(x,y,\theta)dxdy.$$

В типичных случаях $K(\theta)$ ведет себя при $\theta \to 0$ регулярно и выполняется условие

(F3) $$K(\theta) \sim \tfrac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \omega^2(u,v)dudv\, \theta^2.$$

Опираясь на соотношение (10), естественно ввести локальную бахадуровскую эффективность последовательности U_n^{k+1} при альтернативе (2) с функцией зависимости Ω по формуле

$$e_{k+1}(\Omega) = \lim_{\theta \to 0} c_{k+1}(\theta)/2K(\theta).$$

В силу условий (F1)–(F3) и (9) получаем

$$e_{k+1}(\Omega) = \frac{(k+1)^4(2k+1)^2(\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v)dudv)^2}{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \omega^2(u,v)dudv}.$$

Рассмотрим с этой точки зрения эффективность статистик U_n^{k+1} для проверки независимости при альтернативе Блока-Базу [18, 19], т.е. при

$$F(x,y,\theta) = 1 - \frac{2+\theta}{2}\big(e^{-(1+\theta)x}$$

$$+e^{-(1+\theta)y} - e^{-(x+y+\theta\max(x,y))}\big) + \frac{\theta}{2}e^{-(2+\theta)\min(x,y)}.$$

В этом случае

$$\Omega(u,v) = (u-1)\Big[\frac{1}{2} + \ln(1-u)\Big]$$

$$+(v-1)[\frac{1}{2}+\ln(1-v)]+\frac{(1-\min(u,v))^2}{2}+(1-u)(1-v)[\frac{1}{2}+\ln(1-\max(u,v)],$$

$$\Omega_{uv}(u,v) = \frac{3}{2} + \ln(1-\max(u,v)).$$

Условие (F2) выполнено лишь частично, однако мы можем воспользоваться формулой (7). Опуская громоздкие вычисления, в которых ключевую роль играет формула 4.253.1 из [28]:

$$\int\limits_0^1 x^{\mu-1}(1-x^r)^{\nu-1}\ln x dx$$

$$= \frac{1}{r^2}B(\frac{\mu}{r},\nu)\Big[\psi\Big(\frac{\mu}{r}\Big) - \psi\Big(\frac{\mu}{r}+\nu\Big)\Big], \quad \mathrm{Re}\ \ \mu,\nu > 0, \quad r > 0,$$

где $\psi(x) = \frac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$,получаем следующее выражение

$$c_{k+1}(\theta) \sim \Pi(k)\ \theta^2, \quad \theta \to 0,$$

в котором

$$\begin{aligned}\Pi(k) = \frac{(6k^2+7k+2)^2}{4k^4(k+2)^2} &+ \frac{(2k+1)^2 T_{2k+2}^2}{k^4} \\ &+ \frac{4(2k+1)^2(T_{k+1}^2 - T_{2k+2}T_{k+1})}{k^4} \\ &+ \frac{(6k^2+7k+2)(2k+1)(T_{2k+2} - 2T_{k+1})}{k^4(k+2)},\end{aligned}$$

а $T_k = \sum_{j=1}^k j^{-1}$. Прямым подсчетом получаем

$$\begin{aligned}&\Pi(2) \approx 0.0625, \quad \Pi(3) \approx 0.07335, \quad \Pi(4) \approx 0.0736, \\ &\Pi(5) \approx 0.0702,\ \ldots,\ \Pi(11) \approx 0.0455.\end{aligned}$$

Кроме того, ясно, что $\Pi(k) = O(\ln^2 k/k^2)$ при $k \to \infty$ и при больших k качество критерия еще ниже.

С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что условие $(F3)$ выполнено, причем при $\theta \to 0$

$$2K(\theta) \sim \int_0^1 \int_0^1 \omega^2(u,v)dudv\theta^2 = \frac{5}{4}\theta^2. \tag{11}$$

Сравнение (11) со значениями $\Pi(k)$ показывает, что критерии, основанные на U_n^{k+1} , имеют при альтернативе Блока–Базу катастрофически низкую эффективность (0.09 или еще ниже). Вместе с тем подтверждается вывод Кочара и Гупты о том, что U_n^3, U_n^4 и U_n^5 несколько эффективнее τ_n.

Оказывается, что при определенной структуре функции зависимости Ω статистики U_n^{k+1} обладают свойством бахадуровской локальной оптимальности. Пусть ф. р. при альтернативе удовлетворяет условиям (F1)–(F3), класс таких ф. р. обозначим $\mathcal{F}$. Условие локальной оптимальности в этом классе с учетом (9) и (F3) сводится к отысканию такой функции Ω, для которой достигается знак равенства в неравенстве

$$(k+1)^4(2k+1)^2\Big(\int_0^1 \int_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v)dudv\Big)^2$$
$$\le \int_0^1 \int_0^1 \omega^2(u,v)dudv.$$

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{W}$ функций на единичном квадрате, удовлетворяющих нулевым граничным условиям и обладающих суммируемой с квадратом смешанной производной. Норма элемента w этого пространства определяется как

$$||w|| = \int_0^1 \int_0^1 \left(|w|^2 + |w_x|^2 + |w_y|^2 + |w_{xy}|^2\right) dxdy,$$

и мы предполагаем, что пространство пополнено по этой норме.

Будем искать в пространстве $\mathcal{W}$ нижнюю грань функционала $\int_0^1 \int_0^1 \Omega_{uv}^2(u,v)dudv$ при фиксированном значении $\int_0^1 \int_0^1 (uv)^{k-1}\Omega(u,v) \times dudv$. Минимизирумый функционал строго дифференцируем в

$\mathcal{W}$,что позволяет применить правило множителей Лагранжа (см. [29], §3.2). Вычисляя и преобразуя вариацию, приходим к уравнению Эйлера–Лагранжа для экстремали

$$\Omega_{uuvv} = C(uv)^{k-1}, \tag{12}$$
$$\Omega(\partial I^2) = 0.$$

Известно, что краевая задача (12) может быть записана в эквивалентном виде

$$\Omega(u,v) = C\int_0^1\int_0^1 K(u,v;s,t)(st)^{k-1}dsdt, \tag{13}$$

где K – функция Грина, имеющая вид (ср. [17], §5.3)

$$K(u,v;s,t) = (\min(u,s) - us)(\min(v,t) - vt).$$

Вычисляя интеграл в правой части (13), получаем, что экстремаль имеет вид (4), причем решение единственно и лежит в классе $\mathcal{F}$.

Таким образом, критерий независимости, основанный на U_n^{k+1}, локально оптимален по Бахадуру в классе $\mathcal{F}$ лишь для альтернатив (2) с функцией зависимости Вудворта (4).

Вычислим теперь локальную бахадуровскую эффективность критерия, основанного на U_n^{k+1} для альтернатив с функцией зависимости Ω_l, $l \geq 1$ из (4). Легко видеть, что в этом случае при $\theta \to 0$

$$2K(\theta,0) \sim \frac{l^4}{(2l+1)^2}\theta^2, \quad c_{k+1}(\theta) \sim \frac{l^4(2k+1)^2}{(k+l+1)^4}\theta^2.$$

Отсюда

$$e_{k+1}(\Omega_l) = \Big[1 - (\frac{k-l}{k+l+1})^2\Big]^2 =: v(k,l).$$

Ясно, что $v(k,l) = 1$ при $k = l$ (случай асимптотической оптимальности) и $v(k,l) < 1$, когда $k \neq l$. Эффективность критерия Кендалла при альтернативе (2) с функцией зависимости Ω_l равна $e_2(\Omega_l) = [1 - (\frac{l-1}{l+2})^2]^2$. Мы видим, что этот критерий может существенно уступать критерию, основанному на U_n^l (эффективность последнего равна 1), но сохранять сравнительно высокую эффективность, что не выполнено для альтернативы Блока–Базу. Так, например, $e_2(\Omega_2) = 0.8789$, $e_2(\Omega_3) = 0.7056$.

Пусть $F_n(x,y)$ – эмпирическая ф.р., построенная по исходной выборке. Рассматриваемые статистики U_n^{k+1} с точностью до нормировки могут быть записаны в виде $\int\limits_{R^2} F_n^k(x,y)dF_n(x,y)$. Представляют интерес взвешенные варианты этих статистик, а именно $\int\limits_{R^2} F_n^k(x,y)q(F_n(x,y))dF_n(x,y)$ при подходящем выборе весовой функции q. Насколько нам известно, их асимптотическая эффективность никем не изучалась.

Литература

1. M. G. Kendall, *A new measure of rank correlation.* — Biometrika **30** (1938), 81–93.
2. M. G. Kendall, *Rank Correlation Methods.* Griffin: London (1948).
3. F. Esscher, *On a method of determining correlation from the ranks of the variates.* — Scand. Aktuar **7** (1924), 201–219.
4. J. W. Lindeberg, *Ueber die Korrelation.* — Den VI skandinaviske Matematikerkongres i København, 31.08–4.09 1925 (1926), 437–446, København: J. Gjellerup.
5. J. W. Lindeberg, *Some remarks on the mean error of the percentage of correlation.* — Nordic Statistical Journal **1** (1929), 137–141.
6. Ch. Jordan, *Statistique mathematique.* Paris: Gauthier-Villars, 1927.
7. D. J. G. Farlie, *The performance of some correlation coefficients for a general bivariate distribution.* — Biometrika **47** (1960), 307–323.
8. E. J. Gumbel, *Distributions à plusieurs variables dont les marges sont données.* — C. R. Acad. Sci. **246** (1958), 2717–2719.
9. D. Morgenstern, *Einfache Beispiele zweidimensionaler Verteilungen.* — Mitt. Math. Statist. **8** (1956), 234–235.
10. N. L. Johnson, S. Kotz, *On some generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions.* — Commun. in Statistics **4** (1975), 415–427.
11. N. L. Johnson, S. Kotz, *On some generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions II.* — Commun. Statistics Theor. Meth. **A6** (1977), 485–496.
12. S. Kotz, N. L. Johnson, *Propriétés de dépendence des distributions itérés, genéralisées à deux variables Farlie–Gumbel–Morgenstern.* — C. R. Acad. Sci. **A285** (1977), 277–280.
13. W. Schucany, W. C. Parr, J. E. Boyer, *Correlation structure in Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions.* — Biometrika **65**, 650–653.
14. J. S. Huang, S. Kotz, *Correlation structure in iterated Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions.* — Biometrika **71** (1984), 633–636.
15. D. Conway, *Farlie–Gumbel–Morgenstern distributions.* — Encyclopedia of Statistical Science **3** (1983), 28–31, New York: Wiley.
16. R. R. Bahadur, *Stochastic comparison of tests.* — Ann. Math. Stat. **31** (1960), 231–260.

17. Ya. Yu. Nikitin, *Asymptotic efficiency of nonparametric tests.* Cambridge University Press (1995).
18. S. C. Kochar, R. P. Gupta, *Competitors of the Kendall's tau test for testing independence against positive quadratic dependence.* — Biometrika **74** (1987), 664–666.
19. H .W. Block, A. P. Basu, *A continuous bivariate exponential distribution.* — Jour. Amer. Stat. Ass. **69** (1974), 1031–1037.
20. A. W. Marshall, I. Olkin, *A generalized bivariate exponential distribution.* — J. Appl. Probab. **4** (1967), 291–302.
21. G. G. Woodworth, *On the asymptotic theory of tests of independence based on bivariate layer ranks.* Tecnical Report No. 75, Dept. of Statistics, Univ. of Minnesota (1966).
22. T. Ledwina, *On the limiting Pitman efficiency of some rank tests of independence.* — J. Multiv. Anal. **20** (1986), 265–271.
23. T. Ledwina, *Large deviation and Bahadur slopes of some rank tests of independence.* — Sankhyā **A48** (1986), 188–207.
24. C. R. Rao, *Criteria of estimation in large samples.* — Sankhyā **A25** (1963), 189–206.
25. R. R. Bahadur, *Some limit theorems in statistics.* SIAM: Philadelphia (1971).
26. R. Dasgupta, *On large deviation probabilities of U-statistics in non-i.i.d. case.* — Sankhyā **A46** (1984), 110–116.
27. V. S. Korolyuk, Yu. V. Borovskikh, *Theory of U-statistics.* Dordrecht: Kluwer (1993).
28. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Наука, М. (1971).
29. В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление.* Наука, М. (1979).

Nikitin Ya. Yu, Stepanova N. A. A generalization of Kendall's tau and asymptotic efficiency of the corresponding test of independence.

We calculate Bahadur local efficiency if the test of independence based on a generalization of the Kendall's rank correlation coefficient proposed by Kochar and Gupta in 1987. It is shown that this test is locally efficient for those alternatives to the independence hypothesis which are described by the Woodworth dependence function.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 1 декабря 1996 г.