О. А. Подкорытова

ГРУБАЯ АСИМПТОТИКА ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ ТИПА НОРМЫ

Введение

В работе получены результаты, описывающие грубую асимптотику вероятностей больших уклонений для функционалов типа нормы от эмпирических процессов некоторого общего вида. Это дает возможность находить так называемые точные наклоны по Бахадуру, позволяющие сравнивать различные непараметрические критерии на основе понятия асимптотической относительной эффективности (см. [1, 2, 9]).

В §1 собраны вспомогательные утверждения. Основной результат составляет теорема 4 из §2. Эта теорема позволяет исследовать статистики, основанные на различных преобразованиях эмпирических процессов (см., например, [3, 4, 6, 7, 10]).

Нас интересует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln P(\|\rho_n\|_X>\varepsilon)$$

и его асимптотика при $\varepsilon\to 0$, где $\rho_n(t)$ – процесс, представимый в виде

$$\rho_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i(t),$$

а Y_i – некоторые независимые одинаково распределенные процессы со значениями в пространстве X. При этом в качестве пространства X мы рассматриваем либо $L^\infty[0,1]$, либо банахово пространства функций на $[0,1]$ (некоторое обобщение L^p, $1\leqslant p<\infty$), удовлетворяющее условиям

1^0. Множество непрерывных функций плотно в X.

2^0. Существует такая функция $\alpha:[0,1]\to[0,\infty)$, что $\lim\limits_{t\to 0}\alpha(t)=0$

Работа частично поддержана грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

и для любой $f \in X$ из неравенства $\operatorname{mes}\operatorname{supp} f \leqslant 1$ следует, что

$$\frac{\| f \|_X}{\| f \|_\infty} \leqslant \alpha(t).$$

В частности, норма $\| \cdot \|_X$ мажорируется стандартной нормой $\| \cdot \|_\infty$, то есть существует такой коэффициент $\varkappa \geqslant 0$ (например, $\varkappa = \alpha(1)$), что для любой функции $f \in X$ справедливо неравенство $\| f \|_X \leqslant \varkappa \| f \|_\infty$. Кроме того, отсюда следует, что X содержит все кусочно непрерывные функции.

Ограничения на процессы $Y_i(t)$ для пространств L^∞ и X несколько различаются (см. теоремы 2 и 3).

§1 Предельная функция

Пусть ξ такая случайная величина, что

$$\mathbf{E}\xi = 0, \quad \mathbf{D}\xi > 0 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}e^{s_0|\xi|} = M < \infty \text{ для некоторого } \; s_0 > 0. \tag{1}$$

Для вещественного s и неотрицательного ε положим

$$\begin{aligned} \chi(s) &= \mathbf{E}e^{s\xi}, \\ \varphi_\varepsilon(s) &= \mathbf{E}e^{s(\xi-\varepsilon)} = e^{-s\varepsilon}\chi(s), \\ \psi(\varepsilon) &= \inf_{s \geqslant 0} \ln \varphi_\varepsilon(s). \end{aligned}$$

Ясно, что существует промежуток $[a, b]$ (возможно, бесконечный), внутри которого χ и φ_ε бесконечно дифференцируемы, а вне его равны ∞. Из (1) следует, что $(a, b) \supset [-s_0, s_0]$. Легко видеть, что функции χ и φ_ε выпуклы и $\chi'(0) = \mathbf{E}\xi = 0$. Поэтому $\min \chi = \chi(0) = 1$ и, следовательно, $\psi(0) = \inf_{s \geqslant 0} \ln \chi(s) = 0$. Очевидно, что функция ψ убывает. Если в некоторой точке $s = s(\varepsilon) \geqslant 0$

$$\frac{d}{ds}\varphi_\varepsilon(s) = 0, \tag{2}$$

то в силу выпуклости φ_ε инфимум в определении ψ достигается в точке $s(\varepsilon) : \psi(\varepsilon) = \ln \varphi_\varepsilon(s(\varepsilon)) = -\varepsilon s(\varepsilon) + \ln \chi(s(\varepsilon))$.

Лемма 1. *Если случайная величина ξ, удовлетворяет условиям (1), то*

1. $\psi(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2\mathbf{D}\xi} + O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$*;*
2. $\psi(\varepsilon) \leqslant -\frac{1}{A}\varepsilon^2 + \frac{\mathbf{D}\xi}{2A^2}\varepsilon^2 + \frac{C}{A^2}\varepsilon^3$ *для любого* $A \geqslant \frac{2\varepsilon}{s_0}$,

причем константа C зависит только от s_0 и M из (1).

Доказательство. Сначала рассмотрим второе утверждение. Для этого покажем, что χ''' ограничена на промежутке $[0, s_0/2]$. Действительно, так как $e^x > \frac{x^3}{3!}$ для всех $x \geqslant 0$, то $|\xi^3| \leqslant \frac{48}{s_0^3} e^{s_0|\xi|/2}$ и поэтому

$$| \chi'''(s) |=| \mathbf{E}(\xi^3 \, e^{s\xi} \, |\leqslant \mathbf{E}\big(|\xi|^3 \, e^{s\xi}\big) \leqslant \frac{48}{s_0^3} \, \mathbf{E} e^{(s+\frac{s_0}{2})|\xi|} \leqslant 48 \frac{M}{s_0^3}$$

$$\text{при} \quad s \leqslant \frac{s_0}{2}.$$

Далее, так как $\chi(0) = 1$, $\chi'(0) = \mathbf{E}\xi = 0$ и $\chi''(0) = \mathbf{D}\xi$, то

$$\chi(s) = \chi(0) + \chi'(0)s + \frac{s^2}{2}\chi''(0) + \frac{s^3}{6}\chi'''(\theta s) = 1 + \frac{\mathbf{D}\xi}{2} s^2 + \frac{\chi'''(\theta s)}{6} \, s^3$$

для некоторого $\theta \in (0, 1)$. Учитывая оценку χ''', получаем, что для $s \in [0, \frac{s_0}{2}]$

$$\left|\chi(s) - \left(1 + \frac{s^2}{2}\mathbf{D}\xi\right)\right| \leqslant Cs^3 \quad \text{при} \quad C = 8\frac{M}{s_0^3}.$$

Отсюда при $s = \frac{\varepsilon}{A}$ имеем

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{A}\right) = e^{-\varepsilon^2/A} \, \chi\left(\frac{\varepsilon}{A}\right) = e^{-\varepsilon^2/A} \left(1 + \frac{\mathbf{D}\xi}{2} \frac{\varepsilon^2}{A^2} + C\frac{\varepsilon^3}{A^3}\right),$$

а так как $\ln(1 + x) \leqslant x$, то

$$\psi(\varepsilon) = \inf_{s \geqslant 0} \ln \varphi_\varepsilon(s) \leqslant \ln \varphi_\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{A}\right) \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{A} + \frac{\mathbf{D}\xi}{2} \frac{\varepsilon^2}{A^2} + C\frac{\varepsilon^3}{A^3}.$$

Первое утверждение содержится, например, в работе [2], но нам для дальнейшего использования удобно привести его доказательство здесь.

Рассмотрим уравнение (2). Положив

$$G(s, \varepsilon) = \frac{d}{ds}\varphi_\varepsilon(s) = \mathbf{E}\left((\xi - \varepsilon) \, e^{s(\xi-\varepsilon)}\right),$$

запишем это уравнение в виде $G(s, \varepsilon) = 0$. Ясно, что $G(0, 0) = 0$ и

$$G'_\varepsilon(s, \varepsilon) = -\mathbf{E}\left(e^{s(\xi-\varepsilon} + s(\xi - \varepsilon) \, e^{s(\xi-\varepsilon)}\right), \quad G'(0, 0) = -1,$$

$$G'_s(s, \varepsilon) = \mathbf{E}\left((\xi - \varepsilon)^2 \, e^{s(\xi-\varepsilon)}\right), \qquad G'_s(0, 0) = \mathbf{D}\xi.$$

По теореме о неявной функции при малых ε вблизи 0 существует единственное решение $s(\varepsilon)$ уравнения (2), при этом

$$s'(\varepsilon) = -\frac{G'(s(\varepsilon),\varepsilon)}{G'_s(s(\varepsilon),\varepsilon)}, \quad s'(0) = \frac{1}{\mathbf{D}\xi}.$$

Поэтому $s(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\mathbf{D}\xi} + O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$ и, следовательно,

$$\psi(\varepsilon) = -\varepsilon s(\varepsilon) + \ln \chi(s(\varepsilon))$$
$$= -\varepsilon x(\varepsilon) + \ln\left(1 + \frac{s^2(\varepsilon)}{2}\,\mathbf{D}\xi + O(s^3(\varepsilon))\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2\mathbf{D}\xi} + O(\varepsilon^3).$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь к более общей ситуации, когда вместо одной случайной величины рассматривается семейство $\{\xi_\beta\}_{\beta\in B}$ случайных величин, удовлетворяющее условиям

I. $\mathbf{E}\xi_\beta = 0$ для любого $\beta \in B$, и $J_B \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\beta\in B} > 0$.

II. Существуют такие числа M, $s_0 > 0$, что $\mathbf{E}e^{s_0|\xi_\beta|} \leqslant M$ для любого $\beta \in B$.

Следующие обозначения аналогичны использованным ранее. Для вещественного s и неотрицательного ε положим

$$\chi_\beta(s) = \mathbf{E}e^{s\xi_\beta},$$
$$\varphi_{\varepsilon,\beta}(s) = \mathbf{E}e^{s(\xi-\varepsilon)} = e^{-s\varepsilon}\,\chi_\beta(s),$$
$$\psi_\beta(\varepsilon) = \inf_{s\geqslant 0} \ln \varphi_{\varepsilon,\beta}(s).$$

Наша ближайшая цель – доказать непрерывность “предельной” функции

$$\Phi_B(\varepsilon) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\beta\in B} \psi_\beta(\varepsilon).$$

Ясно, что Φ_B убывает и $\Phi_B(0) = 0$.

Лемма 2. *Если семейство случайных величин $\{\xi_\beta\}_{\beta\in B}$ удовлетворяет условиям* I *и* II, *то*

1. $\Phi_B(\varepsilon) \to -\infty$ *при* $\varepsilon \to +\infty$.
2. *Если* $J_B = \mathbf{D}\xi_{\beta_0}$ *при некотором* $\beta_0 \in B$, *то* $\Phi_B(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2J_B} + O(\varepsilon^3)$, $\varepsilon \to 0$.
3. *Для достаточно малых* ε *в определении* $\Phi_B(\varepsilon)$ *можно сузить множество* B, *по которому берется супремум: существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$

$$\Phi_B(\varepsilon) = \sum_{\beta\in B} \psi_B(\varepsilon), \quad где \quad \widetilde{B} = \left\{\beta \in B : \mathbf{D}\xi_\beta \geqslant \frac{J_B}{4}\right\}.$$

Доказательство. Первое утверждение немедленно следует из условия II, так как $\psi_\beta(\varepsilon) \leqslant \ln(e^{-s_0\varepsilon}\mathbf{F}e^{s_x i_\varepsilon}) \leqslant -s_0\varepsilon + \ln M$ для всех $\beta \in B$.

Докажем теперь второе утверждение. Из первого утверждения леммы 1 следует оценка снизу

$$\Phi_B(\varepsilon) \geqslant \psi_{\beta_0}(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2J_B} + O(\varepsilon^3).$$

Используя второе утверждение той же леммы при $A = J_B$, получаем, что при $\varepsilon \leqslant \frac{s_0}{2} J_B$

$$\psi_\beta(\varepsilon) \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{J_B} + \frac{\varepsilon^2}{2}\,\frac{\mathbf{D}\xi_\beta}{J_B^2} + \varepsilon^3\frac{C}{J_B^3} \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{J_B} + \frac{\varepsilon^2}{2J_B} + \varepsilon^3\frac{C}{J_B^3}.$$

Отсюда вытекает оценка сверху

$$\Phi_B(\varepsilon) = \sup_{\beta\in B} \psi_\beta(\varepsilon) \leqslant -\frac{\varepsilon^2}{2J_B} + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0.$$

Для доказательства третьего утверждения подберем такое $\overline{\beta} \in B$, что $\mathbf{D}\sigma_\beta > \frac{J_B}{2} > 0$. Применив к $\xi_{\overline{\beta}}$ первое утверждение леммы 1, получим, что существует такое $\varepsilon_1 > 0$, зависящее только от s_0 и M из условия II, что

$$\psi_{\overline{\beta}}(\varepsilon) \geqslant -\frac{\varepsilon^2}{J_B} + O(\varepsilon^3) \geqslant -\frac{5\varepsilon^2}{4J_B} \quad \text{при} \quad \varepsilon \in [0, \varepsilon_1].$$

Воспользовавшись вторым утверждением той же леммы при $A = \frac{J_B}{2}$ и $\varepsilon \leqslant \frac{s_0}{4} J_B$, получим, что для всех $\beta \in B$ справедливо неравенство

$$\psi_\beta(\varepsilon) \leqslant -\frac{2\varepsilon^2}{J_B} + \frac{2\varepsilon^2}{J_B^2}\,\mathbf{D}\xi_\beta + \frac{8C\varepsilon^3}{J_B^3}.$$

Поэтому, если ε достаточно мало (точнее $\varepsilon \leqslant \frac{J_B^2}{32C}$), то для всех $\beta \notin \widetilde{B}$

$$\psi_\beta(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon^2}{J_B}\left(-2 + \frac{2}{J_B}\,\frac{J_B}{4} + \frac{8C}{J_B^2}\,\frac{J_B^2}{32C}\right) = -\frac{5\varepsilon^2}{4J_B} \leqslant \psi_{\overline{\beta}}(\varepsilon).$$

Следовательно, супремумы по B и $\widetilde{B}$ совпадают, если

$$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0 = \min\left\{\varepsilon_1, \frac{s_0}{4}\, J_B, \frac{J_B^2}{32C}\right\}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если семейство случайных величин* $\{\xi_\beta\}_{\beta\in B}$ *удовлетворяет условиям* I *и* II, *то функция* Φ_B *удовлетворяет условию Липшица на промежутке* $[0,\delta]$ *для некоторого* $\delta > 0$.

Доказательство. Можно считать, что $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, а тогда в силу третьего утверждения леммы $2\Phi_B(\varepsilon) = \sup_{\beta\in\widetilde{B}} \psi_\beta(\varepsilon)$. Так как $\Phi_B(0) = 0$ и для любых $\varepsilon'' \geqslant \varepsilon' \geqslant 0$

$$| \Phi_B(\varepsilon'') - \Phi_B(\varepsilon') | = \left| \sup_{\beta\in B_0} \psi_\beta(\varepsilon'') - \sup_{\beta\in B_0} \psi_\beta(\varepsilon') \right|$$

$$\leqslant \sup_{\beta\in B_0} | \psi_\beta(\varepsilon'') - \psi_\beta(\varepsilon') | \leqslant (\varepsilon'' - \varepsilon') \sup_{\beta\in B_0} \sup_{\varepsilon'<\varepsilon<\varepsilon''} \left| \frac{d\psi_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon) \right|,$$

то достаточно доказать, что в некоторой окрестности нуля равномерно ограничены производные $\left\{\frac{d\psi_\beta}{d\varepsilon}\right\}_{\beta\in B_0}$. Как и при доказательстве леммы 1, имеем $\psi_\beta(\varepsilon) = -\varepsilon s_\beta(\varepsilon) + \ln\chi_\beta(s_\beta(\varepsilon))$. Поскольку

$$\left|\frac{d\chi_\beta}{ds}(s)\right| = | \mathbf{E}\big(\xi_\beta\, e^{s\xi_\beta}\big) | \leqslant C(s_0, M) \quad \text{при} \quad s \leqslant \frac{s_0}{2},$$

и $\chi_\beta(s) = \mathbf{E}e^{s\xi_\beta} \geqslant e^{s\mathbf{E}\xi_\beta} = 1$, то

$$\left|\frac{d\psi_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon)\right| = \left| - s_\beta(\varepsilon) - \varepsilon \frac{d_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon) + \frac{1}{\chi_\beta(s_\beta(\varepsilon))}\, \frac{d\chi_\beta}{ds}(s_\beta(\varepsilon)) \frac{ds_\beta}{d\varepsilon} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \big(2\varepsilon + C(s_0, M)\big) \max_{o\leqslant x\leqslant\varepsilon} \left|\frac{d\psi_\beta}{dx}(x)\right|.$$

Поэтому достаточно установить равномерную ограниченность в некоторой окрестности нуля производных $\left\{\frac{ds_\beta}{ds}\right\}_{\beta\in\widetilde{B}}$. Для этого сначала, пользуясь равенствами

$$\varepsilon_\beta(0) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{ds_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{\mathbf{E}\big[(1 + s_\beta(\varepsilon)(\xi_\beta - \varepsilon))e^{s_\beta(\varepsilon)(\xi_\beta-\varepsilon)}\big]}{\mathbf{E}\big[(\xi_\beta - \varepsilon)^2 e^{s_\beta(\varepsilon)(\xi_\beta-\varepsilon)}\big]}, \qquad (3)$$

докажем "условную" ограниченность: если для некоторого $\Delta \leqslant \varepsilon_0$ на промежутке $[0,\Delta]$ все функции s_β не превосходят $\frac{s_0}{2}$, то на этом же промежутке их производные их производные $\frac{ds_\beta}{d\varepsilon}$ ограничены по абсолютной величине числом, зависящим только от s_0 и M из условия II и ε_0. Действительно, если $s_\beta(\varepsilon) \leqslant \frac{s_0}{2}$ на $[0, \Delta]$, то абсолютная величина числителя в (3) не превосходит

$$e^{-s_\beta(\varepsilon)\varepsilon}\left(\left(1 + s_\beta(\varepsilon)\varepsilon\right)M + s_\beta(\varepsilon)\left|\mathbf{E}\left(\xi_\beta\, e^{s_\beta(\varepsilon)\xi_\varepsilon}\right)\right|\right)$$
$$\leqslant M + s_0\, C(s_0, M) = K.$$

Оценим снизу знаменатель. Положим $\eta = \xi_\beta - \varepsilon$, $\nu = s_\beta(\varepsilon)$. Тогда для любого $a > 0$

$$\mathbf{E}\left(\left(\xi_\beta - \varepsilon\right)^2 e^{s_\beta(\varepsilon)(\xi_\beta-\varepsilon)}\right) = \mathbf{E}(\eta^2\, e^{\nu\eta}) \geqslant e^{-\nu a}\,\mathbf{E}\big(\eta^2 \mathbf{1}_{\{\eta > -a\}}\big).$$

Так как в силу условия II

$$\mathbf{P}(\eta \leqslant -x) \leqslant \frac{M}{e^{s_0(x-\varepsilon)}} \leqslant \frac{M}{e^{s_0(x-\varepsilon_0)}} \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R},$$

то

$$\mathbf{E}\left(\eta^2 \mathbf{1}_{\{\eta \leqslant -a\}}\right) = -\int_a^\infty x^2\, d\mathbf{P}(\eta \leqslant -x) =$$

$$= 2\int_a^\infty x\, d\mathbf{P}(\eta \leqslant -x)\, dx + a^2 \mathbf{P}(\eta \leqslant -a) \leqslant$$

$$\leqslant 2M\int_a^\infty x e^{-(x-\varepsilon_0)s_0}\, dx + Ma^2 e^{-(a-\varepsilon_0)s_0} \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому $\mathbf{E}\left(\eta^2 \mathbf{1}_{\{\eta \leqslant -a\}}\right) \leqslant \frac{J_B}{8}$ для некоторого a, не зависящего от β. Следовательно, для всех $\beta \in \widetilde{B}$ знаменатель в (3) не меньше, чем

$$e^{-\nu a}\mathbf{E}\left(\eta^2 \mathbf{1}_{\{\eta > -a\}}\right) \geqslant e^{-\nu a}\left(\mathbf{E}\eta^2 - \frac{J_B}{8}\right)$$

$$= e^{-s_\beta(\varepsilon)a}\left(\mathbf{E}\chi_\beta^2 + \varepsilon^2 - \frac{J_B}{8}\right) \geqslant \frac{J_B}{8}\, e^{-s_0\, a/2}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{ds_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon)\right| \leqslant L \overset{\text{def}}{=} 8\frac{K}{J_B}\, e^{s_0\, a/2}, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant s_\beta(\varepsilon) \leqslant s_0/2 \quad \text{на} \quad [0, \Delta],$$

то есть "условная" ограниченность производных установлена. Отсюда следует и "безусловная" ограниченность: $\left|\frac{ds_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon)\right| \leqslant L$ на промежутке $[0,\delta]$, $\delta = \min\left\{\varepsilon_0, \frac{s_0}{3L}\right\}$, для всех $\beta \in \widetilde{B}$. Действительно, в противном случае для некоторого $\beta \in \widetilde{B}$ функция s_β принимает на $[0,\delta]$ значение не меньшее, чем $s_0/2$, а так как $s_\beta(0) = 0$, то $\max_{[0,\Delta]} s_\beta(\Delta) = s_0/2$ при некотором $\Delta \leqslant \delta \leqslant \frac{s_0}{3L}$. По доказанной "условной" ограниченности это вречет неравенство $\left|\frac{ds_\beta}{d\varepsilon}(\varepsilon)\right| \leqslant L$ на $[0,\Delta]$, а тогда по теореме Лагранжа о среднем $\frac{s_0}{2} = s_\beta(\Delta) - s_\beta(0) \leqslant L\Delta \leqslant L\frac{s_0}{3L} = \frac{s_0}{3}$, что невозможно.

Теорема доказана.

§2 Большие уклонения

Работать с пространством $X = L^\infty[0,1]$ неудобно, так как сопряженное к нему пространство слишком велико и не имеет простых конструктивных описаний, но нам не хотелось бы ограничиваться пространством $C[0,1]$, так как желательно, чтобы в рассматриваемое пространство входили кусочно непрерывные траектории некоторых эмпирических процессов. Поэтому при $X = L^\infty[0,1]$ введем новое пространство

$$\widetilde{X} = \Big\{ f \in L^\infty[0,1] : \text{ в каждой точке } x \text{ существуют односторнние пределы } f(x\pm 0) \in \mathbb{R}, \text{ причем } f(x-0) = f(x),\ f(0) = f(+0) \Big\},\quad \|\cdot\|_{\widetilde{X}} = \|\cdot\|_\infty. \tag{4}$$

Для всякой функции $f \in \widetilde{X}$ и меры $\mu \in \mathcal{M} = C^*[0,1]$ имеет смысл $\int_0^1 f\,d\mu$, то есть μ определяет линейный непрерывный функционал на $\widetilde{X}$. Хотя $\mathcal{M} \subsetneq \widetilde{X}^*$, для любой $f \in \widetilde{X}$ верно равенство

$$\|f\|_\infty = \sup_{\|\mu\|_{\mathcal{M}} \leqslant 1} \int_0^1 f\,d\mu.$$

Поэтому все дальнейшие результаты остаются верными и для нормы $\|\cdot\|_\infty$, если вместо $\widetilde{X}^*$ подставить $\mathcal{M}$. Таким образом, всюду далее под X будем понимать либо пространство X, удовлетворяющее условиям 1^0 и 2^0 Введения, либо $\widetilde{X}$ (в этом случае $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$).

Перейдем к формулировке основных теорем. Пусть $\{Y_i(t)\}_{i\geqslant 1}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных процессов на $[0,1]$ со значениями в пространстве X, траектории которых п.н. кусочно непрерывны, $\mathbf{E}Y_i(t) = 0$ при $t \in [0,1]$, и корреляционная фунция $K(t,s) = \mathbf{E}(Y_i(t)\,Y_i(s))$ ограничена на $[0,1]\times[0,1]$. Пусть процесс $\rho_n(t)$ представим в виде

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i(t).$$

Для $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant 1$ введем "характеристику немонотонности" функции $|\rho_n|$

$$\omega_n(\tau_1,\tau_2) = \sup_{\tau_1\leqslant t\leqslant\tau_2} |\,\rho_n(t)\,| - \max\{|\,\rho_n(\tau_1)\,|, |\,\rho_n(\tau_2)\,|\}.$$

Ясно, что $\omega_n(\tau_1,\tau_2) \geqslant 0$, а если функция $|\rho|$ монотонна на промежутке $[\tau_1,\tau_2]$, то $\omega_n(\tau_1,\tau_2) = 0$.

Предположим, что процессы $\{Y_i(t)\}$ удовлетворяют условиям

(A) существует такое, что $s_0 > 0$, что $\sup_{t\in[0,1]} \mathbf{E}e^{s_0|Y_i(t)|} < \infty$;

(B) для любых положительных чисел γ и σ существует такой конечный набор точек $0 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = 1$, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \ln \mathbf{P}\big(\omega_n(\tau_1,\tau_2) > \sigma\big) < -\gamma \quad \text{при} \quad t_i \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant t_{i+1},$$
$$i = 1,2,\ldots,k-1.$$

Пусть B_{X^*} – единичный шар в X^*. Для $\beta \in B_{X^*}$ положим $\xi_\beta = (Y_1,\beta)$ – действие функционала β на Y_1. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию

$$\Phi_X(\varepsilon) = \sup_{\beta\in B_{X^*}} \inf_{s\geqslant 0} \ln \mathbf{E}e^{s(\xi_\beta-\varepsilon)}. \tag{5}$$

(в случае L^∞ мы берем $X = \widetilde{X}$, $X^* = \mathcal{M}$).

Теорема 2. *Пусть $X = L^\infty[0,1]$, а процессы $\{Y_i\}_{i\geqslant 1}$ – удовлетворяют сделанным выше предположениям. Тогда в точках непрерывности функции Φ_X*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,(\|\,\rho_n\,\|_\infty > \varepsilon) = \Phi_X(\varepsilon).$$

Теорема 2. *Пусть пространство X удовлетворяет условиям 1^0 и 2^0 из Введения, а на процессы $\{Y_i\}$, кроме описанных выше условий, наложено ограничение*

(C) *существует такое конечное (возможно, пустое) множество*
$$G = \{g_1, \ldots, g_l\} \subset (0,1),$$
что для любой окрестности $U \supset G$, состоящей из конечного числа интервалов, и для любых γ, $\sigma > 0$ существует такой конечный набор $\tau_1, \ldots, \tau_m$, включающий все граничные точки $[0,1] \setminus U$, что если $[\tau_i, \tau_{i+1}] \subset [0,1] \setminus U$, то
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\sup_{\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}} |\, \rho_n(t) - \rho_n(\tau_i) \,| < \sigma \right) < -\gamma.$$

Тогда в точках непрерывности Φ_X
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,(\|\,\rho_n\,\|_X > \varepsilon) = \Phi_X(\varepsilon).$$

Для доказательства нам потребуется классическая теорема Г. Чернова [1, 5] в следующей формулировке.

Теорема (Г. Чернов)**.** *Пусть ξ_1, $\xi_2, \ldots$ – такие независимые одинаково распределенные случайные величины, что $\mathbf{E}\xi_i = 0$, $\mathbf{E}e^{s|\xi_i|} < \infty$ для некоторого $s > 0$. Пусть $\mathbf{P}(\xi_i = 0) = 0$. Тогда для $\varepsilon > 0$*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i > \varepsilon\Big) = \inf_{s \geqslant 0} \ln \mathbf{E}e^{s(\xi_1 - \varepsilon)}.$$

Доказательство теоремы 2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Покажем вначале, что
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,(\|\,\rho_n\,\|_\infty > \varepsilon) = \Phi_X(\varepsilon). \tag{6}$$

Так как
$$\|\,\rho_n\,\|_\infty = \sup_{\beta \in B_{\mathcal{M}}} (\rho_n, \beta) = \sup_{\beta \in B_{\mathcal{M}}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i, \beta),$$
то для каждого $\beta \in B_{\mathcal{M}}$
$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,(\|\,\rho_n\,\|_\infty > \varepsilon) \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (Y_i, \beta) > \varepsilon\Big).$$

Но по теореме Г. Чернова последний предел равен

$$\inf_{s\geqslant 0} \ln \mathbf{E}e^{s((Y_1,\beta)-\varepsilon)} = \inf_{s\geqslant 0} \ln \mathbf{E}e^{s(\xi_1-\varepsilon)}.$$

Переходя к супремуму по $\beta \in B_{\mathcal{M}}$, получаем требуемую оценку снизу.

Далее предположим, что $\Phi_X(\varepsilon) > -\infty$ (в случае $\Phi_X(\varepsilon) = -\infty$ изменения, необходимые в доказательстве, очевидны). Отметим, что в равенстве $\|\rho_n\|_\infty = \sup_{\beta\in B_{\mathcal{M}}}(\rho_n,\beta)$ супремум можно брать по значительно меньшему множеству. Действительно, если δ_t-мера Дирака в точке t, $\widetilde{B}_{\mathcal{M}} = \{\pm\delta_t\}_{t\in[0,1]}$, то

$$\|\rho_n\|_\infty = \sup_{\beta\in B_{\mathcal{M}}} (\rho_n,\beta) = \sup_{\beta\in \widetilde{B}_{\mathcal{M}}} (\rho_n,\beta),$$

так как $\|\rho_n\|_\infty = \sup_t |\rho_n(t)|$, а $(\rho_n, \pm\delta_t) = \pm\rho_n(t)$.

Положим

$$\Phi_\infty(\varepsilon) = \sup_{t\in[0,1]} \max\Bigl\{\inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E}e^{s(-Y_1(t)-\varepsilon)}, \inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E}e^{s(Y_1(t)-\varepsilon)}\Bigr\}. \tag{7}$$

Иначе говоря,

$$\Phi_\infty(\varepsilon) = \sup_{\beta\in B_{\mathcal{M}}} \inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E}e^{s((Y_1,\beta)-\varepsilon)}.$$

Ясно, что

$$\Phi_\infty(\varepsilon) \leqslant \Phi_X(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty. \tag{8}$$

Возьмем произвольное $\sigma \in (0,\varepsilon)$. Положим $\gamma = -\Phi_\infty(\varepsilon)$ и выберем точки $t_1,\dots,t_k$ из условия (B). Тогда

$$\mathbf{P}\bigl(\|\rho_n\|_\infty > \varepsilon\bigr) \leqslant \sum_{i=1}^k \mathbf{P}\bigl(\,|\rho_n(t_i)| > \varepsilon-\sigma\bigr) +$$

$$\sum_{i=2}^k \mathbf{P}\Bigl(\sup_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i} |\rho_n(t)| - \max\{|\rho_n(t_{i-1})|, |\rho_n(t_i)|\} > \sigma\Bigr) =$$

$$= \sum_{i=1}^k A_{n,i} + \sum_{i=2}^k B_{n,i}.$$

Что касается второго слагаемого, то в силу выбора точек t_i

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln B_{n,i} \leqslant -\gamma = \Phi_\infty(\varepsilon), \quad i = 2,\dots,k.$$

Оценим

$$A_{n,i} \leqslant \mathbf{P}\big(\rho_n(t_i) > \varepsilon - \sigma\big) + \mathbf{P}\big(-\rho_n(t_i) > \varepsilon - \xi\big).$$

Так как точка t_i фиксирована, то по теореме Чернова

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(\rho_n(t_i) > \varepsilon - \sigma\big) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j(t_i) > \varepsilon - \sigma\right) =$$
$$= \inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E}\, e^{s(Y_1(t_i)-(\varepsilon-\sigma))} \leqslant \Phi_\infty(\varepsilon - \sigma).$$

Аналогично,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,\big(-\rho_n(t_i) > \varepsilon - \sigma\big) =$$
$$= \inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E}\, e^{s(-Y_1(t_i)-(\varepsilon-\sigma))} \leqslant \Phi_\infty(\varepsilon - \sigma).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,\big(\|\rho_n\|_\infty > \varepsilon\big) \leqslant \Phi_\infty(\varepsilon - \sigma),$$

и в силу (8)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,\big(\|\rho_n\|_\infty > \varepsilon\big) \leqslant \Phi_X(\varepsilon - \sigma).$$

Так как σ произвольно, то отсюда следует, что в точке непрерывности Φ_X справедлива требуемая оценка сверху

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,\big(\|\rho_n\|_\infty > \varepsilon\big) \leqslant \Phi_X(\varepsilon).$$

Вместе с (6) это доказывает теорему.

Следствие теоремы 2. *При доказательстве теоремы мы фактически показали, что в случае $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$ можно написать*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\,\big(\|\rho_n\|_\infty > \varepsilon\big) = \Phi_\infty(\varepsilon),$$

где Φ_∞ определена формулой (7).

Замечание к теореме 2. Похожий результат получен Сетураманом [8], но формально они не являются следствиями друг друга.

Доказательство теоремы 3. Оценка снизу

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(\| \rho_n \|_\infty > \varepsilon\big) \geqslant \Phi_\infty(\varepsilon)$$

доказывается так же, как в теореме 2. Для получения оценки сверху зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\sigma > 0$ столь малым, что $\varepsilon > \varkappa\sigma$, где $\varkappa$ – константа из Введения. Из теоремы 2 следует, что существует настолько малое положительное число Δ, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\| \rho_n \|_\infty > \frac{\varkappa\sigma}{\Delta}\right) < \Phi_X(\varepsilon).$$

Используя условие 2^0, возьмем окрестность U настолько малой, чтобы при $\operatorname{supp} f \subset U$ выполнялось неравенство

$$\| f \|_X \leqslant \Delta \| f \|_\infty. \tag{9}$$

Теперь, положив $\gamma = -\Phi_X(\varepsilon)$, выберем в $[0,1]\backslash U$ точки $\tau_1, \dots, \tau_m$ в соответствии с условием (C) и рассмотрим аппроксимацию процесса ρ_n, соответствующую выбранному разбиению

$$\widetilde{\rho_n}(y) = \begin{cases} \rho_n(\tau_i), & t \in [\tau_i, \tau_{i+1}] \\ 0, & t \in U. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{P}\big(\| \rho_n \|_X > \varepsilon\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\| \rho_n - \widetilde{\rho_n} \|_X > 2\varkappa\sigma\big) + \\ + \mathbf{P}\big(\| \widetilde{\rho_n} \|_X > \varepsilon - 2\varkappa\sigma, \| \rho_n - \widetilde{\rho_n} \|_X \leqslant 2\varkappa\sigma\big) = P_1 + P_2. \end{gathered} \tag{10}$$

Сначала оценим слагаемое P_1. Представим ρ_n в виде суммы

$$\rho_n = \rho_n^{(1)} + \rho_n^{(2)}, \quad \text{где} \quad \rho_n^{(1)} = \rho_n(t) \mathbb{1}_U(t), \quad \rho_n^{(2)} = \rho_n(t) \mathbb{1}_{[0,1]\backslash U}(t).$$

Тогда

$$P_1 \leqslant \mathbf{P}\big(\| \rho_n^{(2)} - \widetilde{\rho_n} \|_X > \varkappa\sigma\big) + \mathbf{P}\big(\| \rho_n^{(1)} \|_X > \varkappa\sigma\big). \tag{11}$$

Так как $\| \cdot \|_X \leqslant \varkappa \| \cdot \|_\infty$, то

$$\mathbf{P}\big(\| \rho_n^{(2)} - \widetilde{\rho_n} \|_X > \varkappa\sigma\big) \leqslant \mathbf{P}\big(\| \rho_n^{(2)} - \widetilde{\rho_n} \|_\infty > \sigma\big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \mathbf{P}\left(\sup_{\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1}} | \rho_n(t) - \rho_n(\tau_i) | > \sigma\right)$$

(суммирование производится по тем номерам i, для которых $(\tau_i, \tau_{i+1}) \subset [0,1] \setminus U$). В силу выбора точек τ_i (см. условие (C)) отсюда следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\Bigl(\| \rho_n^{(2)} - \widetilde{\rho_n} \|_X > \varkappa\sigma\Bigr) < -\gamma = \Phi_X(\varepsilon).$$

Для оценки второго слагаемого в (11) заметим, что из неравенства (9) следует $\| \rho_n^{(1)} \|_X \leqslant \Delta \| \rho_n^{(1)} \|_\infty$, и поэтому в силу выбора Δ имеем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\Bigl(\| \rho_n^{(1)} \|_X > \varkappa\sigma\Bigr) \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\| \rho_n^{(1)} \|_\infty > \frac{\varkappa\sigma}{\Delta}\right) \leqslant$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\| \rho_n \|_\infty > \frac{\varkappa\sigma}{\Delta}\right) < \Phi_X(\varepsilon).$$

Суммируя полученные оценки, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_1 < \Phi_X(\varepsilon). \tag{12}$$

Перейдем к оценке P_2 из (10). Аппроксимация $\widetilde{\rho_n}$, как случайная величина в пространстве X, принимает значения в некотором конечномерном пространстве Y. Пусть $y_1^*, \dots, y_r^*$ образуют Δ-сеть в единичном шаре B_{Y^*} сопряженного пространства Y^*. Выберем $\sigma > 0$ настолько малым, чтобы

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left(\| \rho_n \|_\infty > \frac{\sigma}{\Delta}\right) < \Phi_X(\varepsilon). \tag{13}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P_2 &= \mathbf{P}\Bigl(\| \widetilde{\rho_n} \|_X > \varepsilon - 2\varkappa\sigma), \| \widetilde{\rho_n} - \rho_n \|_X < 2\sigma\varkappa\Bigr) = \\
&= \mathbf{P}\Bigl(\sup_{y^* \in B_{Y^*}} \bigl(\widetilde{\rho_n}, y\bigr) > \varepsilon - 2\varkappa\sigma, \| \widetilde{\rho_n} - \rho_n \|_X < 2\sigma\varkappa\Bigr) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{q=1}^{r} \mathbf{P}\Bigl(\bigl(\widetilde{\rho_n}, y_q^*\bigr) > \varepsilon - 3\varkappa\sigma, \| \widetilde{\rho_n} - \rho_n \|_X < 2\sigma\varkappa\Bigr) + \qquad (14) \\
&+ \sum_{q=1}^{r} \mathbf{P}\Bigl(\sup_{\| y^* - y_q^* \| < \Delta} \bigl(\widetilde{\rho_n}, y^* - y_q^*\bigr) > \varkappa\sigma\Bigr) = \sum_{q=1}^{r} \bigl(P_{1,q} + P_{2,q}\bigr).
\end{aligned}$$

Нетрудно показать, что существуют такие $x_q^* \in X$, что

$$\| x_q^* \|_{X^*} \leqslant 1+\sigma \quad \text{и} \quad (\rho_n^{(1)}, y_q^*) = (\rho_n^{(1)}, x_q^*), \quad n = 1, \ldots, q = 1, \ldots, r.$$

Поэтому (можно считать, что $\sigma < 1$) имеем

$$P_{1,q} = \mathbf{P}\left((\widetilde{\rho_n}, x_q^*) > \varepsilon - 3\varkappa\sigma, \| \widetilde{\rho_n} - \rho_n \|_X < 2\varkappa\sigma \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\left((\widetilde{\rho_n}, x_q^*) > \varepsilon - 3\varkappa\sigma, | (\widetilde{\rho_n} - \rho_n,\, x_q^*) | < 2\varkappa\sigma(\sigma+1) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{P}\big((\rho_n, x_q^*) > \varepsilon - 7\varkappa\sigma\big) = \mathbf{P}\Big((\rho_n, \tilde{x}_q^*) > \frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma}\Big),$$

где $\tilde{x}_q^* = \frac{x_q^*}{1+\sigma}$, $\| \tilde{x}_q^* \| \leqslant 1$. Используя теорему Чернова, получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{1,q} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\left((\rho_n, \tilde{x}_q^*) > \frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma}\right) =$$

$$= \inf_{s\geqslant 0} \mathbf{E} \exp\Big(-s\frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma} + s\big(Y_1, \tilde{x}_q^*\big)\Big) \leqslant \Phi_X\Big(\frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma}\Big) \tag{15}$$

(последнее неравенство вытекает из определения Φ_X, так как $\| \tilde{x}_q^* \| \leqslant 1$).

Оценим $P_{2,q}$ из (14):

$$P_{2,q} \leqslant \mathbf{P}\Big(\| \widetilde{\rho_n} \|_X > \frac{\varkappa\sigma}{\Delta}\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\| \widetilde{\rho_n} \|_\infty > \frac{\sigma}{\Delta}\Big) \leqslant \mathbf{P}\Big(\| \rho_n \|_\infty > \frac{\sigma}{\Delta}\Big).$$

Используя (13), получаем

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_{2,q} \leqslant \Phi_X(\varepsilon).$$

Отсюда, из (15) и (14) следует, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln P_2 \leqslant \Phi_X\left(\frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma}\right). \tag{16}$$

Из (10), (12) и (16) получаем, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}\big(\| \rho_n \|_X > \varepsilon\big) \leqslant \Phi_X\left(\frac{\varepsilon - 7\varkappa\sigma}{1+\sigma}\right).$$

В силу произвольности σ это доказывает теорему.

Замечания.

1. Нетрудно видеть, что если выполнено условие (C) с $G = \varnothing$, то выполняется условие (B). Из доказательства видно, что в случае выполнения условий (A) и (C) с $G = \varnothing$ теорема 3 справедлива и без условия 2^0 на пространство X.
2. В теоремах 2 и 3 речь идет о точках непрерывности функции $\Phi_X(\varepsilon)$. Так как Φ_X не возрастает, то она непрерывна всюду, кроме, может быть, счетного множества точек. Теорема 1 также гарантирует непрерывность $\Phi_X(\varepsilon)$ на промежутке $[0, \delta]$ для некоторого $\delta > 0$.

Предположим теперь, что корреляционная функция

$$K(s,t) = \mathbf{E}\,(Y_i(s)\,Y_i(t))$$

непрерывна на $[0,1]\times[0,1]$. Определим оператор $\mathcal{K} : \mathcal{M} \to C[0,1]$ формулой

$$(\mathcal{K}\mu)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)\,d\mu\,(s).$$

Отметим, что из непрерывности K следует компактность оператора $\mathcal{K}$. Рассмотрим также квадратичную форму Q на X^*:

$$Q(\mu) = (\mathcal{K}\mu, \mu),$$

и определим число

$$J_X = \|\,\mathcal{K}\,\| = \sup_{\|\mu\|_{X^*} \leqslant 1} Q(\mu)$$

(если $\mu \in \mathcal{M} \setminus X^*$, то будем считать, что $\|\mu\|_{X^*} = \infty$).

Лемма 3. *Пусть*

$$B_X = \bigl\{\mu \in \mathcal{M} : \|\,\mu\,\|_{X^*} \leqslant 1\bigr\}, \quad J_X = \sup_{\mu \in B_X} Q(\mu).$$

Тогда существует такое $\mu_0 \in B_X$, *что*

$$Q(\mu_0) = J_X.$$

Доказательство. Пусть μ_n – такая последовательность элементов B_X, то $Q(\mu_n) \to J_X$. В силу *-слабой компактности единичного шара в X^*, можно считать, что существует такое $\mu_0 \in B_X$, что

$$\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_0 \tag{17}$$

(здесь w^* означает *-слабую топологию на X^*). Покажем, что

$$\mathcal{K}\mu_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathcal{K}\mu_0. \tag{18}$$

Если данное утверждение неверно, то по компактности $\mathcal{K}$ можно выделить такую подпоследовательность μ_n, что $\mathcal{K}\mu_{n_l} \to x$, где $x \neq \mathcal{K}\mu_0$. Будем считать, что исходная последовательность такова, что $\mathcal{K}\mu_n \to x$. В этом случае существует такое $\nu \in \mathcal{K}^*$, что

$$(\mathcal{K}\mu_0 - x, \nu) \neq 0. \tag{19}$$

Но $(\mathcal{K}\mu_0 - x, \nu) = (\mathcal{K}\mu_0 - \mathcal{K}\mu_n, \nu) + (\mathcal{K}\mu_n - x, \nu)$. Норма второго слагаемого не превосходит $\| \mathcal{K}\mu_n - x \|_X \cdot \|\nu\|_{X^*} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Для оценки первого слагаемого заметим, что $(\mathcal{K}\mu, \nu) = (\mathcal{K}\nu, \mu)$ для любых μ, $\nu \in X^*$. Поэтому $(\mathcal{K}\mu_0 - \mathcal{K}\mu_n, \nu) = (\mathcal{K}\nu, \mu_0 - \mu_n) \to 0$, так как $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu_0$. Получившийся результат противоречит (19), что доказывает (18). Теперь

$$| Q(\mu_n) - Q(\mu_0) | = | (\mathcal{K}\mu_n, \mu_n) - (\mathcal{K}\mu_0, \mu_n) + (\mathcal{K}\mu_0, \mu_n) - (\mathcal{K}\mu_0, \mu_0) | \leqslant$$

$$\leqslant | (\mathcal{K}(\mu_n - \mu_0), \mu_n) | + | (\mathcal{K}\mu_0, \mu_n - \mu_0) | .$$

Первое слагаемое стремится к нулю, так как

$$| (\mathcal{K}\mu_n - \mu_0), \mu_n) | \leqslant \| \mathcal{K}\mu_n - \mathcal{K}\mu_0 \|_X \| \mu_n \|_{X^*} \leqslant \| \mathcal{K}\mu_n - \mathcal{K}\mu_0 \|_X \to 0$$

в силу (18), а второе слагаемое стремится к нулю вследствие (17). Таким образом, $Q(\mu_n) \to Q(\mu_0)$, и поэтому $J_X = Q(\mu_0)$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Если в условиях теорем 2 или 3 (или замечания 2 к теореме 3) $J_X > 0$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\|\rho_n\|_X > \varepsilon) = -\frac{\varepsilon^2}{2J_X} + O(\varepsilon^3), \quad \varepsilon \to 0.$$

Доказательство. Пусть μ-мера, представляющая функционал из B_{X^*}, $\xi_\mu = \int_0^1 Y_1(t)\,d\mu(t)$. Тогда

$$\mathbf{D}\,\xi_n = \mathbf{E}\Big(\int\limits_0^1 Y_1(t)\,d\mu\,(t)\int\limits_0^1 Y_1(s)\,d\mu\,(s)\Big) =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \mathbf{E}\left(Y_1(t)\,Y_1(s)\right)\,d\mu\,(t)\,d\mu(s) =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(t,s)\,d\mu\,(t)\,d\mu\,(s) = Q(\mu).$$

Теперь, чтобы вывести нужный результат из теорем 2 и 3, нужно показать, что супремум квадратичной формы достигается на единичном шаре. В случае $\|\cdot\|_X \neq \|\cdot\|_\infty$ это следует из леммы 3. При $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_\infty$ воспользуемся следствием теоремы 2 и рассмотрим функция $\Phi_\infty(\varepsilon)$, определенную в (7). Тогда вместо $\mathbf{D}\,\xi_\mu$ нужно взять $\mathbf{D}\,Y_1(t) = K(t,t)$, и супремум достигается в силу непрерывности K, причем, как нетрудно видеть, $J_X = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} K(t,t)$.

Автор благодарит Я. Ю. Никитина за полезное обсуждение этой работы.

Литература

1. R. Bahadur, *Some limit theorems in statistics.* SIAM, Philadelphia, 1971.
2. R. Bahadur, *On the asymptotic efficiency of tests and estimates.* — Sankhya **22, No. 3–4** (1960), 229–252.
3. A. Cabaña, *Transformation du pont brownien empirique et teste de type Kolmogorov–Smirnov.* — C. R. Acad. Sci., Paris **317, Sér. 1** (1993), 315–318.
4. A. Cabaña, *Transformation of the empirial measure and Kolmogorov–Smirnov tests.* — Ann. Stat. **24, No. 5** (1996), 2020–2035.
5. H. Chernoff, *A measure of asymptotic efficiency for tests a hypothesis based on sums of observations.* — Ann. Math. Stst. **23, No. 4** (1952), 493–507.
6. D. Darling, *On the asymptotic distribution of Watson's statistic.* — Ann. Stat. **11** (1983), 1263–1266.
7. P. Deheuvels, *Invariance of Wiener process and of Brownian bridges by integral transforms and applications.* — Stoch. Proc. and Appl. **13** (1982), 311–318.
8. J. Sethuraman, *On the probability of the large deviations of families of sample means.* — Ann. Stst. Math. **35, No. 3** (1964), 1304–1316.

9. Я. Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических критериев*. Наука-Физматлит, М., 1995.
10. Э. В. Хмаладзе, *Некоторые применения теории мартингалов в статистике*. — Успехи мат наук **37**, вып. **6** (1982), 193–212.

Podkorytova O. A. Rough large deviations probability asymptotics of some functionals of the norm kind.

This paper contains some results describing rough large deviations probability asymptotics of the norm type functionals of empirical processes. This gives the opportunity to find exact Bahadur slopes which permit to compare different nonparametric tests using asymptotic relative efficiencies.

Высшее военно-морское
училище радиоэлектроники
им. проф. А. С. Попова

Поступило 10 апреля 1997 г.