Л. В. Розовский

О ЗАКОНЕ ПОВТОРНОГО ЛОГАРИФМА ДЛЯ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С КОНЕЧНЫМИ ДИСПЕРСИЯМИ

Введение

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ с нулевыми средними и конечными дисперсиями $\sigma_i^2 = \mathbf{D}\, X_i$ $(i \geqslant 1)$. Положим $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $B_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$ и в дальнейшем будем считать, что $B_n \uparrow \infty$ при $n \uparrow \infty$.

Основной целью настоящей заметки является нахождение простых, но в то же время достаточно общих новых условий, которые позволяют распространить фундаментальную теорему А. Н. Колмогорова ([1; 2, гл. VII, теорема 1]) на случай неограниченных случайных величин. В этом смысле статья продолжает исследования из работы [3], в которой помимо прочего можно найти краткую справку по истории вопроса.

Для прояснения сути дела приведем анонсированное в [4] следствие доказанных ниже результатов.

Теорема. *Пусть* $b_n = B_n\sqrt{2 \ln\ln B_n}$, $n \geqslant n_0$. *Если* $(n \to \infty)$

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{l=1}^{n} \mathbf{E} X_l^2 \mathbf{I}[|X_l| > \varepsilon B_n^2/b_n] \to 0 \quad (\forall \varepsilon > 0) \tag{1}$$

и при некотором $\gamma < 1$ *и некотором* $a > 0$

$$\sum_n \left(\mathbf{P}\{X_n > \gamma b_n\} + \frac{B_n^2}{b_n^2}\,\mathbf{P}\{X_n > aB_n^2/b_n\}\right) < \infty, \tag{2}$$

то

$$\limsup \frac{S_n}{B_n\sqrt{2\ln\ln B_n}} = 1 \text{ п.н.} \tag{3}$$

Сформулированный результат является прямым обобщением вышеупомянутой теоремы Колмогорова ((2) и (3), очевидным

Работа над статьей была поддержана грантом РФФИ No. 95-01-01260, No. 96-01-00547 и грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

образом, выполняются, если $\operatorname{essup}|X_n| = o(B_n^2/b_n)$, $n \to \infty$) и включает в себя теорему Хартмана–Винтнера ([5; 2, гл. X, теорема 8]) (легко подсчитать, что сходимость ряда в (2) при одинаково распределенных случайных величинах $X_1, X_2, \ldots$ равносильна условию $\mathbf{E}X_1^2\mathbf{I}[|X_1| > 0] < \infty$).

Кроме того, из теоремы вытекают теоремы 3, 4, 6 работы [3] (и все остальные результаты, обобщению которых посвящена эта статья). Наконец, заметим, что в условии (2) используется информация лишь *о правых* хвостах функций распределения суммируемых случайных величин.

1. Результаты

Введем обозначения. Положим

$$T_\alpha\{b_n\} = T_\alpha = \sum_{l\geqslant 1} \frac{b_{l+1} - b_l}{b_l}\, e^{-(\alpha b_l/B_l)^2/2},$$

где $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$ – неубывающая положительная последовательность, $b_0 = 0$, $\alpha > 0$.

Все предельные переходы в дальнейшем производятся при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть*

$$b_n/B_n \uparrow \quad \text{и} \quad b_n/B_n^\delta \downarrow \quad (\exists \delta > 1), \tag{4}$$

выполняется условие (1) *и при некоторых* $\gamma < 1$, $t \geqslant 0$, $\beta < (2+2t)^{-1}$ *и* $a > 0$

$$\sum_n \left(\mathbf{P}\{X_n > \gamma b_n\} + \frac{B_n^2}{b_n^2}\,\mathbf{P}\{X_n > \beta b_n\} + \right. \\ \left. + \left(\frac{B_n}{b_n}\right)^{2t} \mathbf{P}\{X_n > a B_n^2/b_n\} \right) < \infty. \tag{5}$$

Тогда условие

$$T_\alpha < \infty\,(\forall \alpha > 1) \quad \text{и} \quad T_\alpha = \infty\,(\forall \alpha < 1) \tag{6}$$

является необходимым и достаточным для выполнения закона повторного логарифма

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} = 1 \ \text{п.н.} \tag{7}$$

Отметим, что в предположениях теоремы 1 сходимость ряда T_α равносильна сходимости ряда

$$\widetilde{T}_\alpha = \sum_{l\geqslant 1} \frac{\sigma_{l+1}^2}{B_l^2}\, e^{-(\alpha b_1/B_l)^2/2}. \tag{8}$$

Теорема, приведенная во введении, вытекает из теоремы 1 при $t = 1$ (и $b_n = B_n\sqrt{2\ln\ln B_n}$).

Заметим, что условие (5) выполняется (см. [6, 7]), если при некоторых положительных t, a

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{E}\min(1, X_n/b_n)^t \mathbf{I}[X_n > aB_n^2/b_n] < \infty.$$

Существенную роль в доказательстве теоремы 1 играет следующее, представляющее самостоятельный интерес, утверждение.

Теорема 2. *Пусть $b_n \geqslant B_n$, $n > n_0$. Если выполняется условие (1), то при любом фиксированном $\mu > 0$ для всех достаточно больших n*

$$\mathbf{P}\{S_n > x\} \geqslant \bar{\Phi}\left(\frac{(1+\mu)x}{B_n}\right), \quad x \in [B_n, b_n]. \tag{9}$$

Здесь $\bar{\Phi}(\dots) = 1 - \Phi(\dots)$, где $\Phi(\dots)$ – стандартная нормальная функция распределения.

Следствие ([8, (7)]). *Если независимые случайные величины $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ одинаково распределены, то оценка (9) имеет место при $b_n = n/\rho_n$, где положительная последовательность ρ_n стремится к бесконечности сколь угодно медленно.*

Теорема 2 является обобщением одной леммы А. Н. Колмогорова ([2, лемма 2]), играющей ключевую роль при доказательстве его теоремы о законе повторного логарифма.

Отметим, что формально оценку (9) можно вывести из [9, теорема 4], однако соответствующий результат там не доказан, и, скорее всего, не является справедливым.

Следующий результат уточняет теорему 1.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 1. Для выполнения соотношения*

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \leqslant 1 \ (< 1) \text{ п.н.} \tag{10}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$T_\alpha < \infty \text{ при любом } \alpha < 1 \text{ (при некотором } \alpha < 1). \tag{11}$$

Замечание 1. Условия (1), (4), (5) в разной степени используются при доказательстве необходимости и достаточности в теореме 3. Так, необходимость в теореме 3 верна без предположения (5), а достаточность – без предположения (1). Выражаясь точнее, достаточность сохраняет справедливость при замене предположений (1) и (4) на

$$b_n/B_n \uparrow, \tag{12}$$

а (5) ($\exists\gamma < 1$, $t \geqslant 0$, $\beta < (2+2t)^{-1}$, $a > 0$) – на (5) ($\exists\gamma < 1$, $t \geqslant 0$, $\beta < (2+2t)^{-1}$, $\forall a > 0$), соответственно.

Следствие 1 ([3, теорема 1]). *Пусть* $b_n = B_n\sqrt{2\ln\ln B_n}$, $n \geqslant n_0$. *Если выполняется условие* (1), *то*

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \geqslant 1 \text{ п.н.}$$

Замечание 2. Известно ([2, гл. VII, теорема 5]), что условие

$$\sum_{n\geqslant 1} \mathbf{P}\{X_n > \gamma b_n\} < \infty \text{ при любом } \gamma > 1 \text{ (некотором } \gamma < 1) \tag{13}$$

является необходимым для справедливости соотношения (10). Таким образом, если из условия (13) вытекает соотношение (5), то (в предположении (1)) условия (11) и (13) становятся необходимыми и достаточными для выполнения (10). Такая ситуация, например, возникает, если $X_n = a_n Y_n$, $n \geqslant 1$, где $\{Y_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевыми средними и единичными дисперсиями, $\{a_n\}$ – положительная последовательность, причем

$$b_n/B_n \uparrow, \quad b_n/B_n^2 \downarrow 0, \quad \frac{a_n b_n}{B_n^2} \to 0, \tag{14}$$

и, кроме того,

$$b_n/a_n \asymp \bar b_n, \quad \sum_{m>n} \bar b_m^{-p} = 0(n\bar b_n^{-p}), \quad \exists p > 0, \tag{15}$$

где $\bar b_n \uparrow$.

Заметим, что в этом случае $B_n^2 = \sum\limits_{m=1}^{n} a_m^2$, а условие (1) выполняется по (14).

Следствие 2. *Пусть* $S_n = a_1Y_1 + \ldots + a_nY_n$, $n \geqslant 1$, *где* $\{Y_n\}$ *то же, что в замечании* 2. *Тогда, если* $a_n \asymp \exp\{\alpha \ln_n^p\}$, $\alpha > 0$, $p > 1$, *то*

$$(2) \Longleftrightarrow \mathbf{E}Y_1^2 \ln^{p-1} Y_1 / \ln\ln Y_1 \mathbf{I}[Y_1 > 9] < \infty.$$

если $a_n \asymp \exp\{\alpha n^p\}$, $\alpha > 0$, $p \in (0, 1)$, *то*

$$(2) \Longleftrightarrow \mathbf{E}(Y_1^2/\ln Y_1)^{\frac{1}{1-p}} \mathbf{I}[Y_1 > 3] < \infty.$$

Отметим, что соотношение (2) выполняется также, если $a_n \asymp n^p$, $p \geqslant -1/2$, однако здесь достаточно условия $\mathbf{E}Y_1^2 < \infty$.

2. Леммы

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ $(n \geqslant 1)$ – независимые случайные величины с нулевыми средними, конечными дисперсиями и функциями распределения $V_1, \ldots, V_n$; $Z_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, $D_n^2 = \mathbf{D}Z_n$. Положим

$$Q_n(t) = \sum_{l=1}^{n} (1 - V_l(t)), \quad \Theta_n(t) = \sum_{l=1}^{n} V_l(t),$$

$$U_{n,c}(t) = \mathbf{P}\{Z_n > t, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} Y_k < c\},$$

$$\alpha(c) = \int_{-c}^{c} y d\Theta_n(y) \qquad \delta_n^2(h) = D_n^{-2} \int_{|y| \geqslant h} y^2 d\Theta_n(y). \tag{16}$$

Пусть $k \geqslant 1$, $h \geqslant 0$, $c > kh, b, p, q > 0$, $p + q = 1/2$; $\beta(u) = (e^u - 1 - u)/u^2$,

$$P_0 = e^{-b\bar{x}/2h},$$
$$P_1 = \exp\left\{-\frac{p\bar{x}^2}{2D_n^2}(\beta(b) + \mathbf{I}[k > 1]\beta(kb)\delta_n^2(h))^{-1}\right\},$$
$$P_2 = \left(\frac{1}{kbqc\bar{x}} \int_{kh}^{c} y^2 d\Theta_n(y)\right)^{\frac{\bar{x}}{2c}}.$$

Лемма 1. *Пусть* $\bar{x} = x - \alpha(c)$. *Тогда*

$$U_{n,c}(x) \leqslant \max(P_0, P_1, P_2); \tag{17}$$

если $0<\lambda<\gamma<1$ *и* $c=\lambda x$, *то*

$$U_n(x)\leqslant U_{n,c}(x)+Q_n(\gamma x)+(1-\gamma)^{-2}\frac{D_n^2}{x^2}\,Q_n(\lambda x). \tag{18}$$

Доказательство. По аналогии с [10, лемма 1] имеем

$$U_n(x)\leqslant U_{n,c}(x)+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{c}^{\infty}P_{n,k}(x-y)dV_k(y),$$

где $P_{n,k}(t)=\mathbf{P}\{Z_n-Y_k>t\}$. При $c=\lambda x$, очевидно,

$$\int\limits_{c}^{\infty}P_{n,k}(x-y)dV_k(y)\leqslant\int\limits_{\gamma x}^{\infty}dV_k(y)+P_{n,k}(x-\gamma x)\int\limits_{\lambda x}^{\infty}dV_k(y).$$

Учитывая, что $P_{n,k}(x-\gamma x)\leqslant\frac{D_n^2}{(1-\gamma)^2x^2}$, отсюда получим оценку (18).

Соотношение (17) при $k=1$ является следствием леммы 2 из [10], а при $k>1$ его можно получить путем модификации этой леммы.

Проведем соответствующие рассуждения. Имеем по аналогии с [10, (34)]:

$$L(s)=\int\limits_{-\infty}^{c}e^{sy}\,d\Theta_n-n\leqslant s\alpha(c)+\beta(b)s^2D_n^2+B(s),$$

причем

$$B(s)=\int\limits_{\bar b}^{c}\beta(sy)(sy)^2\,d\Theta_n\leqslant s^2\int\limits_{\tilde b}^{c}\beta(sy)(sy)^2\,d\Theta_n+s^2D_n^2\beta(kb)\delta_n^2(\bar b), \tag{19}$$

где $\bar b=\min(c,b/s)$, $\tilde b=\min(c,kb/s)$.

Первое слагаемое в правой части (19) не превосходит $s\tilde B(s)=\frac{e^{sc}}{c^2}\int\limits_{\tilde b}^{c}y^2d\Theta_n$.

Таким образом, $L(s)\leqslant s\alpha(c)+sB_1(s)$, где $B_1(s)=\tilde B(s)+sD_n^2((\beta(b)+\beta(kb)\delta_n^2(\bar b))$. Отсюда,

$$U_n(x)\leqslant e^{-sx+L(s)}\leqslant e^{-s(\bar x-B_1(s))}\leqslant e^{-s_0\bar x/2}, \tag{20}$$

где $s_0 = \sup(u \geqslant 0 : B_1(u) \leqslant \bar{x}/2)$.

Если $b/s_0 \leqslant h$, то
$$U_n(x) \leqslant P_0. \tag{21}$$

Если $b/(s_0+\varepsilon) > h(\exists \varepsilon > 0)$, то $B_1(s_0+\varepsilon) > \bar{x}/2$, вследствие чего либо
$$(s_0+\varepsilon)D_n^2((\beta(b)+\beta(kb)\delta_n^2(\bar{b})) > p\bar{x}, \tag{22}$$

либо
$$\tilde{B}(s_0+\varepsilon) > q\bar{x}, \tag{23}$$

причем в этом случае $c \geqslant \tilde{b}$, или $c \geqslant \frac{kb}{s_0+\varepsilon} > kh$, и $\tilde{B}(s_0+\varepsilon) \leqslant e^{(s_0+\varepsilon)c}\frac{1}{ckb}\int\limits_{kh}^{c} y^2 d\Theta_n$.

Оценка (17) следует отсюда и из (21)–(23) в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Лемма 1 доказана полностью.

Лемма 2. *При любом $\beta \in (0, 10^{-2})$ для всех x,*
$$\beta^{-1}D_n \max\left(1, \frac{D_n}{c}\,\delta_n(c)\right) \leqslant x \leqslant \beta\frac{D_n^2}{c},$$
$$U_n(x) \geqslant \exp\left\{-\frac{(1+\mu)}{2}\,\frac{x^2}{D_n^2}\right\}, \tag{24}$$

где $\mu = 50\beta$, а c – произвольный параметр, удовлетворяющий условиям
$$c \leqslant \beta^2 D_n, \quad \delta_n(c) \leqslant \beta^2 \tag{25}$$

(заметим, что параметр c может зависеть от x).

Следствие.

1. *Пусть $|Y_k| \leqslant c$ п.н., $1 \leqslant k \leqslant n$, где $c \leqslant \beta^2 D_n$, $0 < \beta < 10^{-2}$. Тогда (24) выполняется при всех $x \in [\beta^{-1}D_n, \beta D_n^2/c]$. В частности, при $c = M\, D_n^2/b_n$ и $b_n \geqslant M\beta^{-2}D_n$, $\beta^{-1}D_n \leqslant x \leqslant \beta M^{-1} b_n$.*

2. *Если $\delta_n(\beta D_n^2/b_n) \leqslant \beta^2$, где $b_n \geqslant \beta^{-1}D_n$, то (24) выполняется при $\beta^{-1}D_n \leqslant x \leqslant b_n$.*

3. *Если $\delta_n(\nu D_n^2/b_n) \leqslant \beta^2$, где $b_n \geqslant \nu\beta^{-2}D_n$, то (24) выполняется при $x = \nu^{-1}\beta b_n$ ($c = \nu D_n^2/b_n$).*

Для проверки второго утверждения примем $c = \beta D_n^2/x$. Тогда (25) выполняется при $\beta^{-1}D_n \leqslant x \leqslant b_n$, а условия на x из (24) справедливы (в случае (25)) при $x \geqslant \beta^{-1}D_n$.

Отметим, что лемма 2 является обобщением (на случай неограниченных $Y_1, \dots, Y_n$) аналогичной, совпадающей с пунктом 1 следствия, оценки из [11, (29)].

Доказательство леммы 2. Введем обозначения:

$$L_k(h) = \int\limits_{-c}^{c} e^{hy}\, dV_k(y), \quad \underline{\sigma}_k^2 = \int\limits_{|y|\leqslant c} y^2\, dV_k(y),$$

$$\sigma_k^2 = \mathbf{D}X_k, \quad \bar{\sigma}_k^2 = \sigma_k^2 - \underline{\sigma}_k^2.$$

Пусть $\eta = 10\beta$, $\bar{\gamma} = \beta\sqrt{2}$, $\delta = \beta\sqrt{3/2}$, $\gamma = 3\beta^2$, где $0 < \beta < 10^{-2}$. Положим $\bar{x} = (1+\bar{\gamma})x$, $h = (1+\eta)\bar{x}/D_n^2$, $\varepsilon^2 = \frac{3}{2}(ch)^2\delta_n(c)$, $I_n = \{k : h\bar{\sigma}_k \leqslant \varepsilon\}$, L_n – число элементов в I_n^c. Очевидно, $L_n \leqslant (\delta_n(c)D_n h/\varepsilon)^2$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} D_n^{-2}\sum_{k\in I_n}\underline{\sigma}_k^2 &= 1 - \delta_n^2(c) - \frac{1}{D_n^2}\sum_{k\in I_n^c}\underline{\sigma}_k^2 \\ &\geqslant 1 - \delta_n^2(c) - L_n c^2/D_n^2 \geqslant 1 - \delta_n^2(c)(1+(ch/\varepsilon)^2) \geqslant 1-\beta^2. \end{aligned} \tag{26}$$

Имеем при $\bar{Z}_n = \sum\limits_{k\in I_n} Y_k$,

$$U_n(x) \geqslant \mathbf{P}\{\bar{Z}_n > \bar{x}\}\mathbf{P}\{Z_n - \bar{Z}_n \geqslant -\bar{\gamma}x\} = P_1P_2. \tag{27}$$

Очевидно (см. (25)),

$$P_2 \geqslant 1 - D_n^2/(\bar{\gamma}x)^2 \geqslant \frac{1}{2}; \tag{28}$$

$$\begin{aligned} P_1 &\geqslant \mathbf{P}\{\bar{Z}_n > \bar{x}; |Y_k| \leqslant c, k\in I_n\} \\ &= \prod_{k\in I_n} L_k(h)\int\limits_{\bar{x}}^{\infty} e^{-hy}\, d\mathbf{P}\{\tilde{Z}_n < y\} = A_1A_2, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\tilde{Z}_n = \sum_{k\in I_n}\bar{Y}_k$, а $\{\bar{Y}_k\}$ – независимые случайные величины с функциями распределения $\frac{1}{L_k(h)}\int\limits_{\min(x,-c)}^{\max(x,c)} e^{hy}\, dV_k(y)$. Вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} L_k(h) &= 1 + \frac{1}{2}\, h^2 \underline{\sigma}_k^2 \left(1 + \frac{\theta_1}{3}\right) + \theta_2 c^{-2} \bar{\sigma}_k^2,\ 0 > \theta > -1, \\ L'_k(h) &= h \underline{\sigma}_k^2 \left(1 + \frac{1}{2}\theta_1\right) + \theta_3 c^{-1} \bar{\sigma}_k^2, \\ L''_k(h) &= \underline{\sigma}_k^2 (1 + \theta_1), \end{aligned} \tag{30}$$

где $|\theta_1| \leqslant \delta e^{\delta}$, $|\theta_2| \leqslant 1 + \delta$, $|\theta_3| \leqslant 1$; кроме того

$$|L_k(h) - 1| \leqslant \frac{1}{2}\, h^2 e^{hc} \underline{\sigma}_k^2 + (1+\delta) c^{-2} \bar{\sigma}_k^2 \leqslant \frac{1}{2} \delta^2 e^{\delta} + (1+\delta)(\varepsilon/hc)^2 \leqslant \gamma. \tag{31}$$

Оценим A_1 снизу. В соответствии с (31), (30) и (24)–(26) (см. также [11, (22)])

$$\begin{aligned} &\ln L_k(h) \geqslant L_k(h) - 1 - \frac{\gamma}{(1-\gamma)^2}\, |L_k(h) - 1| \geqslant \frac{1}{2}\, h^2 \bar{D}_n^2 \left(1 - \frac{1}{4}\,\beta\right) \\ &- \left\{ 2(1+\delta) \left(\frac{D_n}{c}\, \delta_n(c)\right)^2 + \frac{\gamma}{4(1-\gamma)^2}\, h^2 e^{\delta} \bar{D}_n^2 \right\} \geqslant \frac{1}{2}\, h^2 D_n^2 (1 - \gamma_3), \end{aligned}$$

где $\bar{D}_n^2 = \sum\limits_{k \in I_n} \underline{\sigma}_k^2$, $\gamma_3 = 0.4\beta$.

Таким образом,

$$A_1 \geqslant \exp\left\{ \frac{h^2 D_n^2}{2}\, (1 - \gamma_3) \right\}. \tag{32}$$

Далее,

$$A_2 = e^{-h\bar{x}} \int\limits_0^{\infty} e^{-ht} d\mathbf{P}\{\bar{Z}_n < t + \bar{x}\} \geqslant e^{-h(1+2\eta)\bar{x}} (1 - P_3), \tag{33}$$

где $P_3 = \mathbf{P}\{\tilde{Z}_n \geqslant (1+2\eta)\bar{x} \cup \tilde{Z}_n < \bar{x}\}$. Имеем

$$\mathbf{E}\tilde{Z}_n = \sum_{k \in I_n} \left(L'_k(h) + L'_k(h) \frac{1 - L_k(h)}{L_k(h)} \right) = J_1 + J_2, \tag{34}$$

причем в согласии с (30), (31), (26)

$$J_1 = h\bar{D}_n^2 (1 + \theta_4) + \theta_5 D_n^2 c^{-1} \delta_n^2(c) = h D_n^2 (1 + \theta_6 \beta),$$

$$|\theta_4| \leqslant \frac{1}{2}\,\delta e^{\delta}, \quad |\theta_5| \leqslant 1, \quad |\theta_6| \leqslant 0.7, \quad |J_2| \leqslant 0.04\beta h D_n^2. \tag{35}$$

Из (34), (35) следует, что

$$9\beta \leqslant \frac{\mathbf{E}\tilde{Z}_n - \bar{x}}{\bar{x}} \leqslant 11\beta$$

и, следовательно (см. (30) и (24))

$$P_3 \leqslant (9\beta\bar{x})^{-2}\mathbf{D}\tilde{Z}_n \leqslant \frac{2(1+\delta e^{\delta})}{(1-\gamma)81\beta^2}\,\frac{D_n^2}{x^2} < \frac{1}{2}.$$

Отсюда, из (27)–(29), (32), (33) получим (24). Лемма 2 доказана.

3. Доказательства

Теорема 2 вытекает из пункта следствия к лемме 2 (при $\beta^{-1}B_n \leqslant x \leqslant b_n$) и центральной предельной теоремы (для $B_n \leqslant x \leqslant \beta^{-1}B_n$), которая, разумеется, имеет место, поскольку из (1) следует условие Линдеберга.

Докажем необходимость в теореме 3. Точнее, покажем, что из условия

$$\limsup \frac{S_n}{b_n} \leqslant 1 \text{ п.н.} \tag{36}$$

следует

$$T_\alpha < \infty \ (\forall \alpha > 1) \tag{37}$$

(случай строго неравенства в (10) разбирается аналогично). Из [2, гл. VII, доказательство теоремы 5] следует, что если

$$\liminf \mathbf{P}\{S_n > -\varepsilon b_n\} > 0 \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{38}$$

то (36) влечет сходимость ряда

$$\sum_{n \geqslant r} \mathbf{P}\{S_{i_n} - S_{i_{n-r}} > (1+\varepsilon)\rho^n\} < \infty \quad (\forall \varepsilon > 0\, \forall \rho > 1\, \forall r \geqslant 1), \tag{39}$$

где $i_n = i_n(\rho)$ – наибольшее целое, для которого $b_{i_n} \leqslant \rho^n$.

Из (1), (4) и центральной предельной теоремы легко следует (38). Таким образом, надо показать, что (39) $\Longrightarrow$ (37).

Выберем в (39) ρ и r так, чтобы $B_{i_n} \geqslant 0.5B_{i_{n-r}}, n \geqslant r$ (по этому поводу см. [11, (37), (38)]). Положим $\sum' \ldots = \sum\limits_{l>i_{n-r}}^{i_n} \ldots$, $\Delta_n = B_{i_n} - B_{i_{n-r}}$. Тогда при всех достаточно больших n

$$\frac{1}{\Delta_n}\sum{}' \int\limits_{|y|>\nu\Delta_n/\rho^n} y^2 d\mathbf{P}\{X_l < y\} \leqslant \frac{2}{B_{i_n}^2}\sum_{l=1}^{i_n} \mathbf{E}X_l^2\mathbf{I}[|X_l| > \nu B_{i_n}^2/3b_{i_n}],$$

поскольку по (1), (4) $\rho^n < b_{i_n}\frac{b_{i_n+1}}{b_{i_n}} \leqslant \frac{3}{2}b_{i_n}$, если i_n достаточно велико.

Отсюда, из (1), (4) и леммы 2 (следствие 3) при всех достаточно больших n получим оценку

$$\sum_{n\geqslant r}\mathbf{P}\{S_{i_n} - S_{i_{n-r}} > (1+\varepsilon)\rho^n\} \geqslant \exp\left(-\frac{(1+2\varepsilon)\rho^{2n}}{\Delta_n}\right). \qquad (40)$$

Из (39), (40) так же, как в [11, (38)], получим импликацию $(39) \Longrightarrow (37)$.

Отметим, что условие (5) в вышеприведенных рассуждениях не участвовало.

Перейдем к доказательству достаточности условий (1), (12), (5) и (37) для выполнения (36). Попутно укажем изменения, которые надо внести для обоснования замечания 1.

Прежде всего заметим [11, (38)], что из (12), (37) вытекает условие

$$\sum_{n\geqslant 1}\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\,b_{i_n}^2/B_{i_n}^2\right) < \infty. \qquad (41)$$

Из (41) и неравенства Чебышева при всех достаточно больших n получим

$$\mathbf{P}\{S_{i_n} - S_{i_{n-r}} > -\delta\rho^n\} \geqslant 1 - \frac{B_{i_n}^2}{\delta^2\rho^{2n}} \geqslant \lambda > 0 \ \ (\forall\delta > 0\,\forall r \geqslant 1\,\exists\lambda > 0). \qquad (42)$$

В [2, гл. VII, доказательство теоремы 5] показано, что в случае выполнения условия (42) соотношение (39) *достаточно* для (36).

Положим $x_n = (1+\varepsilon)b_{i_n}$, $p_n = \mathbf{P}\{\sum' X_l > x_n\}$ и оценим вероятность p_n с помощью леммы 1.

Пусть

$$t \geqslant 0, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2t+2} < \gamma < 1, \quad c = \beta x_n,$$

$$p_{n,c} = \mathbf{P}\left\{\sum{}' X_l > x_n, \max_{i_{n-r} < l \leqslant i_n} X_l < c\right\}.$$

Из (18) следует

$$p_n \leqslant p_{n,c} + \sum{}' \left(\mathbf{P}\{X_l > \gamma x_n\} + (1-\gamma)^{-2}\frac{\Delta_n}{x_n^2}\,\mathbf{P}\{X_l > \beta x_n\}\right). \quad (43)$$

Поскольку (см. (12)) $x_n > b_l$, $\frac{\Delta_n}{x_n^2} < \frac{B_l^2}{b_n^2}(i_{n-r} < l \leqslant i_n)$, то сумма в правой части (43) не превосходит

$$(1-\gamma)^{-2}\sum{}' \left(\mathbf{P}\{X_l > \gamma b_l\} + \frac{B_l^2}{b_l^2}\,\mathbf{P}\{X_l > \beta b_l\}\right).$$

Другими словами (см. (5), (43)), ряд в (39) будет сходится одновременно с рядом $\sum\limits_n p_{n,c}$.

Применим для оценки $p_{n,c}(c = \beta x_n)$ неравенство (17) при $h_n = bB_{i_n}^2/b_{i_n}$, $k = a\rho^n/b > 1$, выбрав $b > 0$ и $p < 1/2$ таким образом, что $\frac{1}{2} \leqslant \beta(b) < (1+\varepsilon)p$. Здесь a взято из условия (5), ρ, r и ε из (39).

Легко проверить, что при условии (1)

$$\bar{x}_n = x_n - \sum{}' \int\limits_{|y|<\beta x_n} y d\mathbf{P}\{X_l < y\} \sim x_n, \quad n \to \infty, \quad (44)$$

и

$$\Delta_n\left(\beta(b) + \beta(ap^r)\frac{1}{\Delta_n}\sum{}' \int\limits_{|y|>h_n} y^2 d\mathbf{P}\{X_l < y\}\right) \leqslant B_{i_n}^2(\beta(b) + o(1)), \quad n \to \infty. \quad (45)$$

Кроме того,

$$\left(\frac{1}{x_n^2}\sum{}' \int\limits_{kh_n}^{\beta x_n} y^2 d\mathbf{P}\{X_l < y\}\right)^{\frac{\bar{x}}{2\beta x_n}} \leqslant \beta^2 \sum{}' \mathbf{P}\{X_l > kh\}\left(\frac{\Delta_n}{x_n^2}\right)^{\frac{\bar{x}}{2\beta x_n}-1},$$

причем $kh_n = a\rho^r B_{i_n}^2/b_{i_n} \geqslant a\frac{B_l^2}{b_l}$, если $i_{n-r} < l \leqslant i_n$ (в соответствии с определением i_n, $b_{i_n} \leqslant \rho^r b_l$) и $\frac{\bar{x}}{2\beta x_n} - 1 = \frac{1+o(1)}{2\beta} - 1 > t$, $n \to \infty$.

Отсюда, из (44), (45) и (17) следует оценка

$$p_{n,c} \leqslant e^{-(1+\varepsilon/2)b_{i_n}^2/B_{i_n}^2} + e^{-(1+\varepsilon/2)b_{i_n}^2/B_{i_n}^2} + C\left(\frac{B_{i_n}}{b_{i_n}}\right)^{2t} \sum{}' \mathbf{P}\{X_l > aB_l^2/b_l\}, \quad (46)$$

где постоянная C не зависит от n, а каждое слагаемое отвечает соответствующей величине из правой части (17).

Из (46), (41) при $\alpha = 1+\varepsilon/2$, (12) и (5) следует, что $\sum\limits_n p_{n,c} < \infty$. Ранее было показано, что сходимость этого ряда обеспечивает сходимость ряда (39) и, следовательно, выполнение (36). Доказательство завершено.

Справедливость (в части достаточности) замечания 1 обосновывается с использованием для оценивания $p_{n,c}$ леммы 2 (17) при $k = 1$. В этом случае в условии (1) нет необходимости, поскольку параметр b (который можно положить равным $a\rho^r$) за счет выбора a можно сделать сколь угодно малым.

Следствие 1 доказывается от противного: если это утверждение не верно, то по теореме 3 с учетом замечания 1 $T_\alpha < \infty$ $(\exists \alpha < 1)$, что невозможно по выбору b_n.

Равносильность сходимости рядов T_α и $\tilde{T}_\alpha$ следует из элементарных неравенств

$$\frac{B_{i_{n+1}}^2 - B_{i_n}^2}{B_{i_n}^2}(1+M)^{-1} \leqslant \frac{b_{n+1}-b_n}{b_n} \leqslant \frac{B_{i_{n+1}}^2 - B_{i_n}^2}{B_{i_n}^2}\, C,$$

где $M = \sup\limits_{n\geqslant 1} \frac{B_{n+1}}{B_n}$, $C = \sup\limits_{1\leqslant u\leqslant M} \frac{u^\delta - 1}{u^2-1}$, справедливых при условиях (4), и того, что из (1) вытекает условие $B_{n+1} \sim B_n$, $n \to \infty$.

Доказательство замечания 2 и следствия 2 носит технический характер и поэтому опускается.

Литература

1. A. N. Kolmogorov, *Uber Gesetz des iterierten Logarithmus.* Math. Ann. **B.101** (1929), 126–135.
2. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987, 320 с.

3. А. И. Мартикайнен, *Об одностороннем законе повторного логарифма.* Теория вероятн. и ее примен. **XXX**, No. 4 (1985), 694–705.
4. L. V. Rozovsky, *The refinement of Kolmogorov's theorem on the law of iterated logarithm. Sixth Intern. Vilnius Conf. on Probab. Theory and Math. Stat., Vilnius, June 28 – July 3, Abstracts of communications*, vol. 2, 1993, p. 114.
5. P. Hartman, A. Wintner, *On the law of iterated logarithm.* Amer. J. Math. **63**, No. 1 (1941), 169–176.
6. H. Teicher, *On the law of the iterated logarithm.* Ann. Probab **2** (1974), 714–728.
7. R. Wittman, *A general law of iterated logarithm.* Z. Wahrcheinlichkeitstheorie Verw. Geb. **68**, No. 4 (1985), 521–543.
8. Л. В. Розовский, *Об асимптотический эквивалентности сверток распределений, совпадающих на полупрямой.* В кн.: Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей. Вып. 1. СПб.: изд-во СПб ун-та, 1986, с. 203–210.
9. А. Н. Архангельский, *Нижние оценки для больших уклонений сумм независимых случайных величин.* Теория вероятн. и ее примен. **XXXIV**, No. 4 (1989), 625–635.
10. Л. В. Розовский, *Одна оценка для вероятностей больших уклонений.* Матем. Заметки **42**, No. 1 (1987), 145–156.
11. Л. В. Розовский, *Обобщение одной теоремы А. Н. Колмогорова о законе повторного логарифма.* Теория вероятн. и ее примен. **XLII**, No. 1 (1997).

Rozovsky L. V. On the law of iterated logarithm for sums of the independent finite variation random variables.

The objective of the note is to find the simple but rather general conditions giving the opportunity to extend the Kolmogorov theorem on the law of iterated logarithm to the case of unbounded summands with finite variations. The obtained results include both Kolmogorov's and the Hartman–Wintner theorems.

Санкт-Петербургская
Химико-Фармацевтическая Академия,
кафедра высшей математики

Поступило 4 апреля 1997 г.