А. В. Судаков, В. Н. Судаков

ПРОЦЕСС ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕР

0. В работе [1] авторы ввели в рассмотрение некоторое семейство преобразований пары симметричных выпуклых подмножеств конечномерного пространства гауссовских случайных величин, действующих с выходом из первоначального пространства, и одновременно сопряженное семейство преобразований декартова квадрата соответствующего векторного пространства с гауссовской мерой. В процессе ортогонализации взаимное расположение двух семейств X и Y гауссовских случайных величин изменялось от их расположения в одном и том же пространстве до расположения в двух ортогональных (координатных) подпространствах декартова квадрата этого гауссовского пространства. Работа была первым шагом к изучению эволюции гауссовской меры пересечения поляр к этим гауссовским семействам. В декартовом квадрате гауссовского пространства $G \oplus G$ была введена однопараметрическая группа ортогональных операторов U^{φ}, действие которой можно себе представлять как умножение на $e^{i\varphi}$ при интерпретации этого декартова квадрата как комплексификации первого прямого слагаемого (при которой это подпространство становится изотропным относительно возникающей при комплексификации симплектической структуры). Сопряженная однопараметрическая группа V^{φ} действует в сопряженном ц упомянутым декартовым квадратом векторном пространстве $E = E_0 \oplus E_1$ с гауссовской мерой, и первостепенное значение получают орбиты и (двумерные) орбитальные плоскости этой сопряженной группы ортогональных операторов, действие которой, очевидно, изоморфно действию самой группы $\{U^{\varphi}\}$.

Разбиение $\mathrm{mod}\,0$ пространства $E_0 \oplus E_1$ с гауссовской мерой на орбитальные плоскости — это разбиение на эргодические компо-

Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00852, 96-01-00853, а также Немецким обществом исследований и РФФИ в рамках меморандума о взаимопонимании между НОИ и РФФИ.

ненты действия группы $\{V^\varphi\}$ на единичной сфере пространства $E_0 \oplus E_1$, и фактор-пространство единичной сферы по этому разбиению (или фактор-пространство всего гауссовского пространства по $\operatorname{mod} 0$ измеримому разбиению на орбитальные плоскости) — это проективное пространство $\mathbb{C}P^{d-1}$ (d — размерность), и образ при каноническом проектировании гауссовской меры — это инвариантная мера на нашем компактном однородном пространстве, а естественно возникающая инвариантная метрика — это кэлерова метрика. Важнейшее свойство орбитальных плоскостей — их равнонаклонность друг к другу: для каждой пары орбитальных плоскостей два угла, определяющих их взаимное расположение, равны друг другу. Их общую величину будем называть раствором (или углом пространственного раствора) этих орбитальных плоскостей. Если обозначить кэлерову метрику k, а угол раствора между некоторыми орбитами равен α, то $k(\tau_1, \tau_2) = 2\alpha$. В дальнейшем фактор-пространство $E_0 \oplus E_1/\zeta_{\{V^\varphi\}}$ обозначается Σ, орбиты обозначаются $\tau \in \Sigma$. В настоящей работе авторы преимущественно имеют дело с предельно наглядным случаем $\dim E = 2$, когда Σ — это двумерная сфера. Каноническое проектирование $E_0 \oplus E_1/\zeta_{\{V^\varphi\}} \to \Sigma$ называется в этом случае отображением Хопфа.

Нас интересует теперь поведение распределения супремума объединения $X \cup U^\varphi Y$ относительно сферически инвариантной меры m_E на единичной сфере пространства $E_0 \oplus E_1$. Это распределение можно подсчитывать как проинтегрированное по инвариантной мере m_Σ распределение на каждой орбитальной плоскости нормы на этом двумерном подпространстве, порождаемой объединением ортогональных проекций на эту орбитальную плоскость подмножеств X и $U^\varphi Y$; при этом удобно отождествить (как стандартным образом отождествляют гильбертово (или евклидово) пространство и пространство, с ним сопряженное, определяя действие элемента гильбертова пространства как функционала на нём с помощью скалярного произведения) декартовы квадраты $G = G_0 \oplus G_1$ векторных пространств случайных величин и $E = E_0 \oplus E_1$ векторных пространств с мерой (равномерным распределением на единичной сфере пространства E, которая не является произведением мер на прямых слагаемых, или стандартной гауссовской в евклидовом пространстве E, которая таким произведением является). В этой работе такое пространство обозначается E, два симметричные семейства элементов пространства E обозначаем $X \subset E_0$ ц элементами $x \in X$ и $Y^\varphi = U^\varphi Y \subset U^\varphi E_0 = E_0^\varphi$.

Будем в дальнейшем обозначать буквой t каноническое проектирование на фактор-пространство $E \to \Sigma$. Образ подпространств E_0 и E_1 — это экватор на сфере Σ. Действие рассматриваемой ортогональной однопараметрической группы не изменяет образа. Для произвольной прямой или двумерного подпространства пространства t-образ — это некоторый (вообще говоря, малый) круг на Σ.

На сфере Σ мы рассматриваем „географические" координаты — широту и долготу. Широта произвольной точки (относительно экватора $t(E_0)$) определена однозначно, так же как и разность долгот двух точек. Для двух произвольных орбитальных плоскостей $\tau_1, \tau_2 \in \Sigma$ угол раствора между ними равен половине расстояния по геодезической (по дуге большого круга) на сфере Σ между точками $t(\tau_1)$ и $t(\tau_2)$ сферы. В частности, диаметрально противоположные точки сферы Σ соответствуют взаимно ортогональным орбитальным плоскостям. Полезно иметь в виду, что соединяя две точки Σ геодезической, мы тем самым устанавливаем синхронизацию (сопоставление точек начала отсчета угла φ; направление же отсчета углов φ — „направление течения времени", стандартная ориентация — определяется на каждой орбите в соответствии с действием группы U^φ) соответствующих орбит $t^{-1}(\tau_1)$, $t^{-1}(\tau_2)$ („временну́ю синхронизацию"), которая соответствует для неортогональных орбит синхронизации, определяемой ортогональным проектированием этих орбит друг на друга. При обходе замкнутого контура, имеющего форму сферического многоугольника, а с переходом к пределу — по любому гладкому контуру найдём, что величина „десинхронизации" численно равна половине площади, ограниченной этим контуром, а знак этой „временно́й десинхронизации" определяется с учетом ориентации. Углы, измеряемые на подпространствах E_0^φ, будем называть пространственными.

1. Для подсчетов, необходимых при рассмотрении конкретных примеров, полезно иметь в виду следующее. Пусть L — произвольное двумерное линейное подпространство в E (например, порождаемое аффинной прямой l, соединяющей пару точек $x \in X$ и $y^\varphi \in Y^\varphi$; на такой прямой будем задавать ориентацию от x к

y^φ, которая, в свою очередь, определяет ориентацию на $L \supset l$. Пусть e_L — фиксированный единичный вектор из L, τ_L^+ и τ_L^- — полюса на Σ, для которых малый круг $t(L)$ — одна из параллелей, $e_L^+ \in \tau_L^+$ и $e_L^- \in \tau_L^-$ — такие элементы этих орбит, что $e_L = re_L^+ + se_L^-$, где r и s — некоторые неотрицательные коэффициенты (очевидно, что $r^2 + s^2 = 1$). Тогда точка $e_{L,\varphi}$, свернутая на угол φ относительно e_L по единичной окружности в L, представляется как

$$e_{L,\varphi} = rU^\varphi(e_L^+) + sU^{-\varphi}(e_L^-) \in L.$$

Ясно, что

$$r = \cos\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\Big), \qquad s = \sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\Big),$$

где γ — широта малого круга $t(L)$ в системе координат, определяемой по полюсам τ_L^+ и τ_L^-, с нулевым меридианом, проходящим через $t(e_L)$. Пусть τ — произвольная орбита с координатами α (широта) и β (долгота), $e_0 \in \tau$,

$$e_0 = pU^{\beta/2}e_L^+ + qU^{-\beta/2}e_L^-,$$

где

$$p = \cos\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\Big), \qquad q = \sin\Big(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\Big).$$

При этом $\pi_{\mathrm{lin}\,\tau}(\tau_L^+)$ — окружность радиуса p, $\pi_{\mathrm{lin}\,\tau}(\tau_L^-)$ — окружность радиуса q,

$$\pi_{\mathrm{lin}\,\tau}(U^\varphi(e_L^+)) = pU^{\beta/2+\varphi}(e_0),$$
$$\pi_{\mathrm{lin}\,\tau}(U^{-\varphi}(e_L^-)) = qU^{-\beta/2-\varphi}(e_0),$$

и, наконец,

$$\pi_{\mathrm{lin}\,\tau}(e_{L,\varphi}) = prU^{\beta/2+\varphi}(e_0) + qsU^{-\beta/2-\varphi}(e_0).$$

Эта проекция — эллипс, вырожденный при $pr = qs \iff p = s \iff q = r \iff \alpha = -\gamma$. Полуоси эллипса суть $pr + qs$ и $|pr - qs|$;

$$pr + qs = \cos((\alpha - \gamma)/2), \qquad pr - qs = \sin((\alpha - \gamma)/2).$$

Если $pr > qs \iff \sin((\alpha-\gamma)/2) > 0$, то ориентация эллипса в $\operatorname{lin}\tau$ положительна.

2. Наша главная цель — исследовать эволюцию распределения супремума объединения семейств случайных величин X и Y^φ. Для этой цели бывает полезно рассмотреть понимаемую в смысле слабой сходимости зарядов производную „по времени φ“ этого закона распределения:

$$\frac{d}{d\varphi}\mathcal{L}(\sup(X \cup Y^\varphi)) = \lim_{\Delta\varphi=0} \frac{\mathcal{L}(X \cup Y^{\varphi+\Delta\varphi}) - \mathcal{L}(X \cup Y^\varphi)}{\Delta\varphi}.$$

Поскольку допредельное выражение представляет собой заряд суммарной нулевой массы, таков же будет и предел. Оказывается, можно в удобной форме выразить такую производную на каждой орбите $\tau \in \Sigma$. Общее распределение

$$\mathcal{L}(\max(X \cup Y^\varphi)) = \mathcal{L}(\max\{\max X, \max Y^\varphi\}) = \mathcal{L}(\max\{\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{Y^\varphi}\}$$

может быть выражено как смесь по равномерному вероятностному распределению на Σ (по фактор-мере m_E/ζ_t) распределений на каждой орбитальной плоскости максимума ограничений на эту орбитальную плоскость норм $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_{Y^\varphi}$, которые на каждой орбитальной плоскости $\operatorname{lin}\tau$ совпадают с $\|\cdot\|_{\pi_{\operatorname{lin}\tau}X}$ и $\|\cdot\|_{\pi_{\operatorname{lin}\tau}Y^\varphi}$.

Теорема 1. *Пусть на единичной окружности S с равномерной вероятностной мерой заданы две функции f и g, и множество $\{\varphi \in S : f(\varphi) = g(\varphi)\}$ состоит из точек $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_2 n$, так что при возрастании φ в точках с нечетными индексами значение максимума этих функций меняется со значений, принимаемых функцией f, на значения, принимаемые функцией g, а в точках с четными индексами — наоборот. Тогда заряд*

$$\frac{d}{d\varphi}\mathcal{L}(\max\{\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_{Y^\varphi}\})$$

представляет собой комбинацию δ-функций

$$\sum_{k=1}^{2n} \varepsilon_k \delta_{\varphi_k}(\varphi), \qquad \varepsilon_{2n+1} = 1, \quad \varepsilon_{2n} = -1$$

3. Будем говорить, что вероятностная мера P сосредоточена правее вероятностной меры Q, если выполняется условие

$$F_P(u) - F_Q(u) \leqslant 0 \quad \text{для каждого } u \in \mathbb{R}.$$

Иными словами, если существует отображение $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, переводящее меру Q в меру P и такое, что для каждого $u \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $T(u) \geqslant u$, чем и оправдывается термин.

Очевидно, для того, чтобы с увеличением φ распределения $\mathcal{Z}_\varphi$ случайных величин из некоторого семейства Z_φ смещались вправо, достаточно, чтобы при каждом значении φ существовала производная этого семейства распределений по φ и была бы зарядом, функция распределения которой неположительна (т.е. чтобы положительная компонента этого заряда была сосредоточена правее абсолютной величины его отрицательной компоненты).

4. Возвращаясь к орбитальным плоскостям, на произвольной орбитальной плоскости $\operatorname{lin}\tau$ рассмотрим проекции $\pi_{\operatorname{lin}\tau}(X \cup Y^\varphi)$. Принимая во внимание отмеченные выше свойства орбит находим, что с изменением φ множество $\pi_{\operatorname{lin}\tau} Y^\varphi$ вращается в пределах рассматриваемой орбитальной плоскости как жесткое целое, без изменения формы. Рассмотрим при фиксированном φ (замкнутую) выпуклую оболочку

$$\operatorname{conv} \pi_{\operatorname{lin}\tau}(X \cup Y^\varphi)$$

рассматривавшейся уже ранее проекции всего семейства случайных величин в момент φ. Граница этого двумерного выпуклого множества состоит из нульмерных и одномерных ребер. Кроме пренебрежимого подмножества сферы Σ число одномерных ребер, концы которых принадлежат проекциям разных множеств, конечно.

Теорема 2. *Пусть на орбитальной плоскости* $\operatorname{lin}\tau$ *для некоторого ребра на границе проекции на эту орбитальную плоскость множества* $X \cup Y^\varphi$ *его расстояние до начала координат равно* h. *Тогда это ребро вносит в производную распределения максимума* $\max X \cup Y^\varphi$ *по условной (равномерной) вероятностной мере на* *орбите τ вклад, представляющий собой δ-меру, если на этом ребре направление от того конца, который является проекцией некоторой точки из X, к концу, который происходит от проектирования Y^{φ}, совпадает с направлением естественной ориентации орбитальной плоскости, соответствующей действию однопараметрической группы U^{φ} при возрастании φ, и минус δ-меру в противоположном случае. Это — полное описание производной распределения упомянутого максимума.*

5. Хотя формально интересующая нас производная распределения максимума представлена как смесь по равномерному распределению на Σ сравнительно простых комбинаций дельта-нагрузок, все же реальный подсчет производной во многих случаях затруднен именно наличием на некоторых орбитальных плоскостях более чем двух пар „активных" ребер (т.е. ребер, вносящих вклад в производную). Правда, для экваториальных орбит проекция X и проекция Y представляют собой два отрезка, и их выпуклая оболочка — просто параллелограмм. Так же будет и для других орбит, соответствующим точкам вблизи экватора Σ. Напротив, на полюсные орбитальные плоскости и X, и Y^{φ} проектируются гомотетичным образом (с коэффициентом подобия $2^{-1/2}$), и объединение может быть любым. Поэтому предлагается следующий метод подсчета производной.

Не умаляя общности, будем считать X и Y выпуклыми. Рассмотрим множество $\operatorname{conv} X \cup Y^{\varphi}$. Назовем отрезки, соединяющие пары граничных точек множеств X и Y^{φ} „боковыми ребрами". Назовем боковое ребро „видимым", если найдется опорная для этого множества (трехмерная) (гипер)плоскость, содержащая это ребро.

Теорема 3. *Каждое боковое ребро видимое.*

Замечание. Если X и Y строго выпуклые, то каждое боковое ребро будет одномерной гранью рассматриваемого множества, т.е. найдется опорная гиперплоскость, пересекающая множество только по этому ребру.

Теперь рассмотрим двумерные плоскости E_0 и E_0^{φ}. Единичные окружности этих плоскостей обладают каноническим соответствием — совпадением при $\varphi = 0$. Теперь для каждой пары точек на этих окружностях, т.е. для пары углов λ, μ (при фиксированном начале отсчета $e_0 \in E_0$ и $e_0^{\varphi} \in E_0^{\varphi}$ и заданном направлении обхода в E_0 и, следовательно, в E_0^φ), или, иначе говоря, для каждой точки s некоторого двумерного тора T, возьмем опорные прямые, касающиеся окружностей в этих точках, и гомотетично с положительными коэффициентами $h_{X,\lambda}$ и $h_{Y,\mu}$ растянем эти прямые до превращения в прямые, опорные к X и, соответственно, к Y^φ. Рассмотрим орбиту $\tau \in \Sigma$, на которой проекции наших опорных прямых имеют выпуклую оболочку размерности единица (т.е. проектирующиеся обе в одну и ту же прямую $l(s)$). Такая орбита существует и единственна. Тем самым построено отображение θ двумерного тора T в сферу Σ. При этом, что главное, общая проекция двух опорных прямых оказывается активным ребром на орбитальной плоскости τ, и тем самым встречи с монстрозными проекциями с многочисленными активными ребрами исключаются. Просто если на некотором τ активных ребер несколько, это означает, что эта орбита возникнет как образ нескольких различных точек тора T. Теперь на торе T могут быть определены неотрицательная функция $h(s)$, равная для каждой точки s тора T расстоянию прямой $l(s)$ до начала координат, т.е. определяющая вклад рассматриваемого ребра в заряд-производную и определяемая положениями двух опорных прямых данных направлений, и некоторый заряд, возникающий по следующему правилу. Заряд окрестности $\varepsilon(s)$ точки s по модулю равен $m_\Sigma(\theta(\varepsilon(s)))$, а знак совпадает со знаком проекции соответствующего s ребра на $\operatorname{lin}\theta(s)$ (см. теорему 2). Таким образом, искомая производная представляется как интеграл от $h(s)$ по описанному заряду на торе.

6. Приведем некоторые расчеты для частных случаев, когда X и Y суть круги, т.е. $\forall\lambda\, h_{X,\lambda} = h_X$, $\forall\mu\, h_{Y,\mu} = h_Y$. В дальнейших формулах будем считать, что φ фиксировано. Обозначим $\psi = \mu - \lambda$ — угол между выбранными опорными плоскостями в X и в Y, и, не умаляя общности для случая двух кругов, будем считать, что $\lambda = 0$, т.е. что точка x_0 касания круга X есть $x_0 = h_X e_0$. Попробуем выразить широту α и долготу β орбиты $\tau \in \Sigma$, на линейную оболочку которой происходит проектирование пары $(0, \psi) \in T$. Границы кругов X и Y при проекции на τ дадут эллипсы с полуосями $p_X = h_X \cos\frac{\alpha}{2}$ и $q_X = h_X \sin\frac{\alpha}{2}$ для $\pi_{\operatorname{lin}\tau}(X)$ и $p_Y = h_Y \cos\frac{\alpha}{2}$ и $q_Y = h_Y \sin\frac{\alpha}{2}$ для $\pi_{\operatorname{lin}\tau}(Y)$ (отрицательная величина одной из полуосей соответствует обратному направлению обхода эллипса), соответствующие оси которых образуют угол φ. Образ ребра есть касательная к обоим эллипсам, и, прирав-

няв соответствующие коэффициенты в уравнениях касательных к каждому эллипсу, после преобразований получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin\dfrac{\alpha}{2}\Big(\dfrac{h_Y}{h_X}\cos\dfrac{\beta}{2}-\cos(\dfrac{\beta}{2}-\psi)\cos\varphi\Big)=\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin(\dfrac{\beta}{2}-\psi)\sin\varphi, \\ \cos\dfrac{\alpha}{2}\Big(\dfrac{h_Y}{h_X}\sin\dfrac{\beta}{2}-\sin(\dfrac{\beta}{2}-\psi)\cos\varphi\Big)=-\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos(\dfrac{\beta}{2}-\psi)\sin\varphi. \end{cases} \qquad (*)$$

(Заметим, что система останется верна и для произвольных X и Y при $\lambda=0$ после замены y_X и h_Y на $h_{X,\lambda}=h_{X,0}$ и $h_{Y,\mu}=u_{Y,\psi}$ соответственно. Выбор другого начала отсчета на E_0, дающий ненулевое λ, приведет к увеличению β на 2λ.) Зная α и β, получаем

$$h=\frac{h_X}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}}$$

(опять же эта формула верна и для общего случая при $\lambda=0$) и выражение для плотности ρ заряда на T:

$$\rho(\lambda,\psi)=\cos\alpha(\lambda,\psi)\frac{\partial\alpha}{\partial\psi}\frac{\partial\beta}{\partial\lambda}$$

(а здесь использовалось то, что для кругов X и Y частная производная $\partial\alpha/\partial\lambda=0$, поэтому для общего случая ρ выражается сложнее).

В еще более частном случае, когда круги X и Y одного радиуса ($h_X=h_Y$), из соображений симметрии ясно, что $\beta=\psi$; тогда из любого из уравнений системы $(*)$ получаем

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Теперь можно явно выразить

$$h=\frac{h_X}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2}}},$$

$$\rho=\frac{2(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2})}{(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\psi}{2})(\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\cos^2\frac{\psi}{2}+\operatorname{ctg}^3\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\psi}{2})}.$$

Заметим, что при $\psi = \pm\varphi$ широта $\alpha = \mp\pi/2$, т.е. τ — один из полюсов, и плотность ρ заряда на T обращается в ноль. При $|\psi| < \varphi$ проекции ребер положительные и плотность заряда положительная, а при $|\psi| > \varphi$ — отрицательные.

Литература

1. В. Н. Судаков, *Процесс ортогонализации в гауссовском пространстве.* — Зап. научн. семин ПОМИ **228** (1996), 300–311.

Sudakov A. V., Sudakov V. N. An orthogonalization process for spherically invariant measures.

A method is described for investigation of behavior of distribution of maximum of two families of linear functionals during a process of orthogonalization.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 1997 г.