В. Н. Судаков

О МНОГОМЕРНОМ ВАРИАНТЕ „ТОМОГРАФИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ“

Томографической задачей обыкновенно называют задачу о восстановлении оптической плотности p неизвестного трёхмерного распределения (объекта) по нескольким наблюдениям, каждое из которых представляет собой двумерную „теневую проекцию“ этого распределения из некоторой точки, т.е. по относительному уменьшению „освещенности“ (практически — рентгеновской) плоскости приемника изображения (реально — фотопленки) в результате поглощения излучения объектом по сравнению с той ее освещенностью, которая создавалась бы тем же точечным источником при нулевой плотности (т.е. при отсутствии объекта) и которая легко находится (вычисляется при изотропности источника или находится экспериментально). При этом часто источник удобно считать расположенным в бесконечности, так что направления лучей параллельны, но рассматриваются и другие схемы, о чем можно прочитать, например, в монографии [1]. Сама плотность $p(x)$ понимается как коэффициент поглощения энергии источника объектом в точке x, т.е. математически представляет собой в случае параллельной схемы взятую со знаком минус логарифмическую производную плотности энергии в точке x по направлению ее распространения, а в общем случае — взятую со знаком минус логарифмическую производную отношения плотностей I_1 и I_0 энергии при наличии и при отсутствии объекта, так что в конце концов

$$I_1/I_0 = \exp\Big\{-\int\limits_L p(u)\,du\Big\},$$

где интегрирование происходит по прямой L (см. [1]). Таким образом, одна из естественных интерпретаций (и обобще-

Работа поддержана грантами РФФИ 96-01-00852 и 96-01-00853, грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

ний) томографической задачи состоит в том, что требуется повозможности точно восстановить неизвестную плотность p интересующего нас объекта по измеряемым несколько раз с различными положениями источника излучения проекциям меры с плотностью p. Можно считать, что p — плотность некоторой вероятностной меры P, и что нам доступны измерения, состоящие в том, что мы можем находить образы неизвестной вероятностной меры P при отображениях из некоторого класса (например, что плотность r — это плотность по мере Лебега вероятностной меры P в евклидовом трехмерном пространстве, а упомянутые отображения — это ортогональные проектирования на двумерные подпространства; при этом мы приходим к стандартной постановке). Вместо одномерных проекций меры P естественно говорить о распределениях линейных функционалов, т.е. рассматривать канонические проекции P на одномерные фактор-пространства, и такое же соображение полезно иметь в виду для произвольных размерностей.

В этой заметке обсуждается вопрос о том, какую информацию о мере P несет малое количество проекций не очень большой размерности сравнительно с размерностью векторного (или аффинного) пространства E, на подмножествах которого и задана интересующая нас мера P. Окажется, что кое-какую информацию несет первое „измерение“, а несколько последующих „измерений“ практически не дают никакого вклада в наши знания о мере P. При этом мы исходим из того, что у нас нет никаких априорных знаний о мере P, и что поэтому измерения выбираются из числа допустимых случайным независимым образом, чему вскоре будет придан точный смысл.

Конечно, такая постановка лишь косвенно связана с медицинской трехмерной томографией, но интерес представляет сама математическая модель, томографией навеянная. Можно также утверждать, что в подобных моделях ограниченная заранее фиксированной константой M плотность относительно меры Лебега на всем конечномерном линейном пространстве или на его линейном подпространстве практически никогда не восстанавливается по своим маргинальным распределениям однозначно: возникает целое семейство мер с заданными маргинальными распределениями, это семейство образует в надлежащей топологии (в топологии $\sigma(L^\infty, L^1)$) выпуклое компактное множество, экстремальными точками которого служат только некоторые ступенчатые функции, не принимающие других значений, кроме 0 и M. То, что каждая такая функция является экстремальной точкой компакта плотностей, ограниченных константой M, доказывается совсем просто, а неэкстремальность плотностей q другого вида вытекает из существования в этом случае такой ограниченной функции h (плотности некоторого заряда), что маргинальные для него заряды — нулевые (так что добавление или вычитание такого заряда не меняет маргинальные распределения), и для исходной плотности q из рассматриваемого компакта функции $q+h$ и $q-h$ обе принадлежат тому же компакту, чем неэкстремальность q и доказывается. Вот точная формулировка утверждения, доказательство которого только что намечено.

Теорема 1. *Пусть координаты пространства $\mathbb{R}^n$ разбиты на непересекающиеся группы:*

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}^{n_k}$$

и $L \subset \mathbb{R}^n$ — такое аффинное подпространство, что $\dim L > \min\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$. Тогда для каждой вероятностной (относительно меры Лебега на подпространстве L) плотности p на подпространстве L, $0 < p < 1$, существует такое измеримое подмножество $B \subset L$, что $\mathbb{I}_B$, рассматриваемый как вероятностная плотность, имеет те же маргинальные при проектировании на выделенные координатные многомерные подпространства распределения, что и p.

Использованный метод применялся различными авторами (не всегда знавшими о своих предшественниках) в [2, 3, 4, 5].

Теперь мы переходим к рассмотрению независимо выбираемых одномерных проекций некоторой неизвестной меры P в n-мерном векторном пространстве E высокой размерности, используемых с целью восстановления этой меры или по крайней мере получения какой-то содержательной информации. Мы будем дополнительно предполагать, что любой линейный функционал f на E имеет распределение, имеющее среднее значение и дисперсию (это гораздо более слабые предположения, чем предположение об ограниченности нашего „многомерного“ объекта), а также что мера P не слишком „размыта". Это последнее предположение мы выразим условием: на пространстве F определена некоторая евклидова норма $\|\cdot\|_F$, мажорирующая след на F гильбертовой нормы пространства $L^2(E,P)\supset F$ (которую можно называть P-нормой на F). Конечно, и это предположение также слабее предположения об ограниченности „объекта", т.е. носителя меры P. Как уже говорилось, мы считаем, что какая-либо другая априорная информация о природе „объекта" отсутствует.

Естественным способом для уточнения природы случайного выбора проекции может служить выбор того линейного функционала $f\in E'$, распределение которого относительно меры P и является наблюдаемой одномерной проекцией меры P, причем масштаб на той прямой, на которой мы наблюдаем эту проекцию, определяется нормой вектора f относительно нормы пространства F.

Конечно, ситуация несколько упростилась бы, если бы нам была известна P-норма на пространстве F, тогда F-скалярное произведение определилось бы следующим образом:

$$(f,g)_F := \int\limits_E (f,\omega)(g,\omega)\,P(d\omega)$$

Любопытно, что в качественном отношении при этом ничего бы не изменилось.

Если бы мы знали меру P, то мы знали бы и „естественное" скалярное произведение на F, определенное только что, и тогда, очевидно, „естественной" мерой для наших целей разумно было бы считать равномерное распределение $m_{F,P}$ на поверхности единичного евклидова шара пространства $(F,\|\cdot\|_{L^2(E,P)})$, который является следом на F единичного шара пространства . Однако, поскольку мера P неизвестна, мы будем выбирать функционалы $f\in F$ случайным независимым образом из равномерного распределения m_F на поверхности единичного шара в F.

И здесь несколько неожиданным образом оказывается, что если размерность пространства E достаточно велика, то при сделанных предположениях относительно природы меры P, которые, как мы видели, касаются только степени ее рассеяния относительно начала координат пространства E, но не более тонкой её структуры, со сколь угодно большой вероятностью оказывается, что только первое наблюдение несет заметную информацию, а каждое последующее почти с вероятностью сколь угодно близкой к единице дублирует первое со сколь угодно большой степенью точности. Таким образом, информативные наблюдения будут встречаться при каждом выборе функционала f на единичной сфере пространства F с очень малой вероятностью.

Чтобы сформулировать точное утверждение (опирающееся на теоремы о существовании типичных распределений линейных функционалов, см. [6, 7, 8]), уточним необходимое для нас понятие близости вероятностных распределений на прямой и в евклидовом пространстве. Пусть $\mathcal{M}_n$ — пространство всех вероятностных распределений в n-мерном евклидовом пространстве, и пусть κ — расстояние Канторовича на этом множестве или какое-нибудь другое расстояние, ему эквивалентное. Напомним, что в одномерном случае

$$\kappa(\mu,\nu) = \int |F_\mu(t) - F_\nu(t)|\, dt,$$

т.е. расстояние Канторовича совпадает с L^1-расстоянием между функциями распределения этих мер. Для общего метрического сепарабельного пространства расстояние Канторовича определяется как минимальная работа по транспортировке меры μ в меру ν, причем работа по перемещению элементарной массы равна величине этой элементарной массы, умноженной на величину перемещения. Другое определение расстояния Канторовича:

$$\kappa(\mu,\nu) = \min\{\, \|X_1 - X_2\| : \mathcal{L}(X_1) = \mu,\ \mathcal{L}(X_1) = \nu\,\},$$

где X и Y — случайные величины, а $\|Z\| = \int_\Omega |Z(\omega)|\, P(d\omega)$ — норма в пространстве L^1. Можно использовать и другие нормы в пространстве случайных величин, получая другие метрики.

Для одномерных проекций в „томографической задаче“ имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть задано произвольное неотрицательное число ε. Тогда существует такое целое положительное число $N(\varepsilon)$, что для любого евклидова пространства E размерности $N \geqslant N(\varepsilon)$ и* *для любой такой вероятностной меры P второго порядка в пространстве E (т.е. $E' \subset L^2(E,P)$), что собственная евклидова норма в $F = E'$ мажорирует след L^2-нормы, существует такая вероятностная мера $\overline{P}$ из $\mathcal{M}_1$ и такое борелевское множество $A \subset F$ что для всякого $f \in A$*

$$m_F(A) \geqslant 1 - \varepsilon$$

и

$$\kappa(\mathcal{L}, \overline{P}) \leqslant \varepsilon.$$

При этом можно считать, что $N(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-4})$. Типичное для меры P одномерное распределение $\overline{P}$ выбранного наудачу линейного функционала можно выбрать среди смесей центрированных гауссовских мер.

Таким образом действительно оказывается, что первый выбранный наудачу линейный функционал позволяет с какой-то точностью оценить меру на множестве штандартов гауссовских мер, по которой эти меры смешиваются для получения типичного распределения $\overline{P}$, что несомненно является важной характеристикой меры P, в то время как повторный выбор случайной одномерной проекции со сколь угодно большой вероятностью не даст заметного отличия.

Переход к многомерным проекциям не вносит в эту ситуацию принципиальных изменений.

Литература

1. Ф. Наттерер, *Математические аспекты компьютерной томографии.* М., «Мир», 1990.
2. И. В. Романовский, В. Н. Судаков, *О существовании независимых разбиений.* — Труды МИАН СССР **79** (1965), 5–10.
3. В. Н. Судаков, *Теорема И. В. Романовского и В. Н. Судакова.* — В кн.: Ю. В. Линник. Статистические задачи с мешающими параметрами. М., 1966, с. 226–233.
4. V. N. Sudakov, *Geometric problems in the theory of infinite dimensional probability distributions (proposition 43).* — Proc. of the Steklov Inst. of Math. (1979), 1–178.
5. S. Gutman, J. H. B. Kemperman, J. A. Reeds, L. A. Shepp, *Existence of probability measures with given marginals.* — The Annals of Probability **19** no. 4 (1991), 1781–1797.

6. V. N. Sudakov, *Typical distributions of linear functions chosen at random.* Aspects statistiques et aspects physiques des processus Gaussiens (Saint-Flour, 22–29 juin 1980). Paris, Éditions du CNRS, 1981.
7. В. Н. Судаков, *Типичные распределения линейных функционалов в конечномерных пространствах высокой размерности.* — Докл. АН СССР **243**, № 6 (1978), 1402–1405.
8. С. Б. Макарова, *О совместных распределениях случайных линейных функционалов.* — В кн.: Проблемы теории вероятностных распределений. X. Зап. научн. семин. ЛОМИ. т. 158, 1987, с. 115–121.

Sudakov V. N. On a multidimensional generalization of the tomographic problem.

The main result: if dimension of a Euclidean space with measure is high enough, only the first observation from the long series of observations with random independent choice of projection gives an essential information of the measure.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 ноября 1997 г.