Б. П. Харламов

ОБРАТНАЯ ПРОБЛЕМА ПЕРВОГО ВЫХОДА ДЛЯ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА

Введение, определения и обозначения

Пусть $(w(t))_{t\geq 0}$ – стандартный винеровский процесс. Рассмотрим область $G \subset R_+ \times R$, для которой

$$P((\exists \epsilon > 0)(\forall t < \epsilon)\, w(t) \in G) = 1.$$

Наиболее интересным представляется случай, когда граница области проходит через точку $(0,0)$ и не имеет других общих точек с осью ординат $\{t = 0\}$. Примером такой области будет

$$\{(t,x) :\, 0 < t < T,\, -g_1(t) < x < g_2(t)\},$$

где g_1, g_2 – функции верхнего класса (в терминологии Хинчина и Колмогорова [2]). Рассматриваемые области G мы также будем называть областями верхнего класса. Пусть, кроме того, G обладает кусочно гладкой границей, на которой может быть определена мера Лебега. Пусть

$$\tau_G(w) = \inf\{t > 0 :\, (t, w(t)) \notin G\}$$

и $\pi_G(w) = w(\tau_G(w))$ (в нашем случае $\tau_G(w) < \infty$). Нас будет интересовать распределение точки $p_G(w) = (\tau_G(w), \pi_G(w))$ на границе ∂G области G, а также такие G, которые порождают распределение точки первого выхода наперед заданного вида. Пусть g является гладкой функцией верхнего класса с неположительной второй производной. Пусть g пересекает ось абсцисс $\{x = 0\}$ в точке $t = a$. Рассмотрим симметричную область

$$G = \{(t,x) :\, 0 < t < a,\, |x| < g(t)\}.$$

Работа поддержана грантом РФФИ No. 97-01-01168 и грантом ведущих научных школ No. 96-15-96199.

Обратная проблема первого выхода для области этого вида может быть сформулирована следующим образом: найти g такую, что

$$f_G(t) = V(t, g(t), g'(t)),$$

где V – некоторая заданная функция и

$$P(p_G \in d\ell(p)) = f_G(t)\sqrt{1+(g'(t))^2}\,dt \quad (p=(t,x)),$$

то есть $f_G(t)$ – плотность распределения точки первого выхода на границу ∂G относительно лебеговой меры на ней. Легко привести эту плотность к плотности относительно лебеговой меры на той или иной оси координат. Мы предпочитаем использовать в определении лебегову меру на самой границе ввиду возможности частей границы перпендикулярных осям.

Из марковского свойства винеровского процесса следует, что неизвестная g удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{h}}\exp(-\frac{g^2(h)}{2h}) = \int_0^h V(t, g(t), g'(t))\sqrt{1+(g'(t))^2}\times$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{h-t}}\exp\left(-\frac{(g(h)-g(t))^2}{2(h-t)}\right) + \frac{1}{\sqrt{h-t}}\exp\left(-\frac{(g(h)+g(t))^2}{2(h-t)}\right)\right)\,dt,$$

где $0 < h < a$, $g(0) = g(a) = 0$. Существование решения обратной проблемы первого выхода эквивалентно существованию решения этого уравнения.

В настоящей статье мы будем иметь дело с относительно более простым вариантом обратой проблемы первого выхода, а именно: найти g такую, что

$$f_G(t) = c,$$

где $c > 0$ –некоторая заданная величина. Интерес к этой проблеме (к так называемой проблеме uds-окрестности) возникла при изучении многомерного диффузионного процесса. Она была связана с предполагаемыми экстремальными свойствами таких окрестностей, которые в некоторых случаях имеют место (нетривиальный пример, когда тепло распространяется из точечного источника в анизотропной среде). Некоторые результаты в этом направлении можно найти в работах [3,4].

Рассматривая координату времени как добавочную размерность, мы можем интерпретировать винеровский процесс как вырожденный двумерный диффузионный процесс с дрейфом (равномерное движение вдоль одной оси и одномерное винеровское движение вдоль второй оси).

Может возникнуть сомнение в значимости результатов, полученных при произвольном масштабе времени в произведении пространств время $\times$ пространство, который определяет лебегову меру на кривой ∂G. К счастью, наши результаты не зависят существенным образом от линейной замены времени. Если $\mathfrak{A}$ – множество всех uds-окрестностей для винеровского процесса w и $\mathfrak{A}_a$ – то же для преобразованного винеровского процесса $\sqrt{a}\cdot w$, тогда

$$\mathfrak{A}_a = \Pi_a\mathfrak{A} = \{G : (\exists G_1 \in \mathfrak{A})\, G = \Pi_a G_1\},$$

где $\Pi_a(t,x) = (at, ax)$ (растяжение). С другой стороны, легко показать, что при преобразовании $(t,x) \to (t, \sqrt{a}\,x)$ uds-свойство не сохраняется.

Основные результаты

Наши главные результаты относятся к выпуклой uds-окрестности для винеровского процесса:

Сравнение плотностей.

Теорема 1. *Пусть G_1, G_2 – две окрестности начальной точки процесса, обе – из верхнего класса и с кусочно гладкими границами, которые пересекаются в точке $p = (t,x)$. Пусть g_1, g_2 – функциональные представления верхних ветвей этих границ, так что $g_1(t) = g_2(t) = x$. Если*

$$G_1 \cap ((0,t)\times R) \subset G_2 \cap ((0,t)\times R),$$

тогда

$$f_{G_1}(t)\sqrt{1+(g_1'(t))^2} \le f_{G_2}(t)\sqrt{1+(g_2'(t))^2},$$

где плотности и производные понимаются в смысле "слева". В частности, если t – точка касания границ то $f_{G_1}(t) \le f_{G_2}(t)$ ("внутренняя" плотность меньше, чем "наружная").

Это свойство дает нам способ оценки uds-кривой сверху. Простейший известный объект для сравнения – это прямая $x =$

$b + k\,t$ ($b > 0$, $-\infty < k < \infty$) с плотностью распределения точки первого выхода на эту прямую (относительно лебеговой меры на этой прямой) вида

$$\bar{f}_x(t) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{(b+k\,t)^2}{2t}),$$

(см. [1]). Пусть g – решение следующего дифференциального уравнения

$$c = \frac{1}{\sqrt{1+(g')^2}}\frac{g-g't}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp(-\frac{g^2}{2t}).$$

Здесь точке $(t, g(t))$ кривой сопоставлена плотность первого выхода на прямую, касающуюся этой кривой в данной точке. Эта плотность, по предположению равна c, что накладывает условие на кривую. В качестве начального условия в данном случае удобно взять значение g в точке t_c предполагаемого второго пересечения кривой g с осью абсцисс (первое пересечение: $g(0) = 0$). Имеем $g(t_c) = 0$, а сама эта точка находится из условия

$$c = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_s}},$$

которое вытекает из предположения о симметрии, гладкости и выпуклости области, ограниченной кривой g и ее зеркальным отражением. Тогда касательная в точке $(t_c, 0)$ вертикальна, и распределение первого выхода на нее есть одномерное распределение винеровского процесса в момент t_c. Итак, $t_s = 1/(2\pi c^2)$. По теореме сравнения плотностей в предположении выпуклости соответствующего множества G справедливо $f_G(t) \le c$ $(0 < t < t_c)$.

Интересно оценить плотности первого выхода для известных классических кривых из закона повторного логарифма. Можно показать, что для малых t каждая положительная uds кривая принадлежит интервалу $(\sqrt{2t\log\log\frac{1}{t}}, \sqrt{2t\log\frac{1}{t}})$.

Теорема единственности. Простым следствием теоремы сравнения плотностей является теорема единственности uds-кривой, проходящей через каждую точку $p \in (0,\infty)\times R$.

Звездообразность. Граница ∂G любого $G \in \mathfrak{A}$ пересекает любую кривую $x = a\sqrt{t}$ $(a \in R)$ один и только один раз (звездообразность относительно семейства всех парабол). Для доказательства этого утверждения нужно использовать одно добавочное свойство верхнего класса функций, которое не вытекает из критерия Колмогорова [2].

Моментная характеризация.

Теорема 2. *Пусть*

$$M_{kl} = \int_{\partial G} t^k x^l d\ell(p) \ (k, l \geq 0)$$

– смешанный момент uds-кривой. Тогда для всех $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n+k}{2k} \frac{M_{n-k,2k}}{(n+k)!} = 0.$$

Эта теорема является следствием более общего результата о моментах распределения первого выхода для произвольной окрестности верхнего класса относительно начальной точки. В этом случае существует последовательность моментных уравнений со смешанными моментами нечетного порядка относительно второй компоненты.

Предельные приведенные области.

Пусть D_a – отображение пространства $R_+ \times R$ на себя такое, что $D_a(t,x) = (at, \sqrt{a}\,x)$ $(a > 0)$. Это отображение индуцирует преобразование $\tilde{D}_a$ любой функции $\xi : R_+ \to R$ вида $(\tilde{D}_a \xi)(t) = \sqrt{a}\,\xi(\frac{t}{a})$. Хорошо известно, что мера винеровского процесса инвариантна относительно группы преобразований $(\tilde{D}_a)_{a>0}$ (автомодельность):

$$(\forall a > 0) \ P \circ \tilde{D}_a^{-1} = P,$$

где P – распределение винеровского процесса. Пусть g_a – функциональное представление uds-кривой, которая проходит через точку $(a, 0)$. Рассмотрим преобразованную uds-кривую (которая сама не является uds-кривой) вида $\tilde{g}_a = \tilde{D}_a^{-1} g_a$. При этом $\tilde{g}_a(1) = 0$. С помощью теоремы сравнения плотностей можно доказать существование следующих пределов

$$\tilde{g}_\infty = \lim_{a \to \infty} \tilde{g}_a,$$

$$\tilde{g}_0 = \lim_{a \to 0} \tilde{g}_a,$$

где сходимость равномерна на любом замкнутом интервале, принадлежащем $(0,1)$. Предельные функции являются решениями следующих обратных проблем первого выхода

$$f_G(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+(g'(t))^2}},$$

и

$$f_G(t) = \frac{\gamma \cdot |g'(t)|}{\sqrt{1+(g'(t))^2}},$$

соответственно, где $\gamma = 1/(4 \max\limits_{0<t<1} g(t))$. Интересно заметить, что решения этих проблем также являются uds-кривыми. Первое решение – это uds-кривая относительно меры Лебега на t-оси, и второе – то же относительно x-оси.

Доказательство Теоремы 1

Пусть $F_{G_i}(S|p) = \int\limits_S f_{G_i}(p_1|p)\, d\ell(p_1)$ – мера подмножества $S \subset \partial G_i$ $(i = 1,2)$, определяемая распределением P_p винеровского процесса, начинающегося в точке $p \in R_+ \times R$. Пусть $G_i^t = G_i \cap ([0,t) \times R)$, $\partial G_i^t = (\partial G_i) \cap ([0,t) \times R)$. Мы рассмотрим части границ в первом квадранте плоскости $S_i = \partial G_i \cap ((t-h,t) \times R_+)$ и $\bar{S}_i = \partial G_i \cap ((t-h,t) \times R_-)$, $R_- = (-\infty, 0]$, $(i = 1,2)$. Тогда

$$F_{G_2}(S_2|0,0) = \int\limits_{\partial G_1^t} F_{G_2}(S_2|p) f_{G_1}(p|0,0)\, d\ell(p) \geq$$

$$\int\limits_{S_1} F_{G_2}(S_2|p) f_{G_1}(p|0,0)\, d\ell(p) \geq \inf_{p\in S_1} F_{G_2}(S_2|p) \cdot F_{G_1}(S_1|0,0).$$

Мы должны показать, что $\inf(\cdot)$ стремится к 1, когда $h \to 0$.

Пусть $S = (x, \infty)$. Тогда для $p \in S_1$ мы имеем

$$F_{(0,t)\times R}(S|p) = \int\limits_{\partial G_2 \cap ((t-h,t)\times R)} F_{(0,t)\times R}(S|p_1) f_{G_2}(p_1|p)\, d\ell(p_1) \leq$$

$$\sup_{p_1 \in S_2} F_{(0,t)\times R}(S|p_1) \cdot F_{G_2}(S_2|p) + \sup_{p_1 \in \bar{S}_2} F_{(0,t)\times R}(S|p_1) \cdot F_{G_2}(\bar{S}_2|p).$$

Пусть $\delta = \sup\limits_{p_1 \in \bar{S}_2} F_{(0,t)\times R}(S|p_1)$. Тогда

$$F_{G_2}(S_2|p) \geq \frac{\inf\limits_{p\in S_1}(S|p) - \delta \cdot F_{G_2}(\bar{S}_2|p)}{\sup\limits_{p\in S_2} F_{(0,t)\times R}(S|p)}.$$

Пусть $\bar{g}_2$ – функциональное представление нижней ветви ∂G_2 и $-\bar{g}_2(t) > 0$. Тогда для $p = (t_1, \bar{g}_2(t_1))$ мы имеем

$$F_{(0,t)\times R}(S|p) = \int\limits_{x-\bar{g}_2(t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_1)}} \exp(-\frac{x_1^2}{2(t-t_1)})\, dx_1 \to 0 \quad (t_1 \uparrow t).$$

Для $p = (t_1, g_i(t_1))$ справедливо

$$F_{(0,t)\times R}(S|p) = \int\limits_{x+\bar{g}_i(t)}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_1)}} \exp(-\frac{x_1^2}{2(t-t_1)})\, dx_1.$$

Без потери общности мы предполагаем, что левая производная $g_i'(t)$ $(i = 1, 2)$ существует и конечна. Тогда $(g_i(t) - g_i(t_1))/\sqrt{t-t_1} \to 0$, и, следовательно, оба предыдущих интеграла стремятся к $\frac{1}{2}$. Тогда $F_{G_2}(S_2|p) \to 1$ $(h \to 0)$. Пусть $\epsilon > 0$ и $F_{G_2}(S_2|p) > 1-\epsilon$. Тогда $F_{G_2}(S_2|0,0) \geq (1-\epsilon)F_{G_1}(S_1|0,0)$ и

$$f_{G_2}(t,x|0,0)\sqrt{1+(g_2'(t))^2} \geq (1-\epsilon) f_{G_1}(t,x|0,0)\sqrt{1+(g_1'(t))^2},$$

и основное утверждение доказано. Оно остается верным при $g_1'(t) = g_2'(t)$. В этом случае $f_{G_2}(t,x|0,0) \geq f_{G_1}(t,x|0,0)$. По непрерывности мы заключаем, что это неравенство верно также в случае, когда величины этих производных бесконечны.
Теорема доказана.

Пусть G – симметричная выпуклая ограниченная область из верхнего класса с гладкой границей. Доказанная теорема дает возможность оценить плотность распределения точки первого выхода в экстремальных точках ее границы. В крайней правой точке $(a, 0)$, где $g(a) = 0$, мы имеем $f_G(a,0) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}$ (сравнение с "вертикальным" распределением). В крайней верхней точке (t_0, b), где $b = g(t_0) = \max\limits_{0<t<a} g(t)$, мы имеем $f_G(t_0, b) \leq \frac{K}{b^2}$, где

$K = \sqrt{\frac{27}{2\pi}} e^{-\frac{3}{2}}$ (сравнение с "горизонтальным" распределением). Если G – uds-окрестность, то предыдущие оценки дают соотношение между a и b.

Доказательство Теоремы 2

Пусть $u(t,x)$ – решение дифференциального уравнения $u'_{10} + \frac{1}{2}u''_{02} = 0$. Функция $F_G(S|\cdot)$ и интеграл

$$F_G(\phi|\cdot) := \int\limits_{\partial G} \phi(p) F_G(dp|\cdot),$$

где ϕ – некоторая интегрируемая функция, примеры таких решений. Более общая форма такого решения – это решение интегрального уравнения:

$$u(\cdot) = \int\limits_{\partial G} u(p)\, F_G(dp|\cdot).$$

Пусть G – ограниченная область из верхнего класса с гладкой границей. Разложим функцию $u(p)$ в ряд Тейлора в окрестности начальной точки $(0,0)$:

$$u(t,x) = u(0,0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n)}_{n-k,k} t^{n-k} x^k,$$

где производные вычислены в точке $(0,0)$. Подставим этот ряд под знак интеграла и проинтегрируем его почленно Это возможно в достаточно малой окрестности. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n)}_{n-k,k} M_{n-k,k} = 0,$$

где $M_{kl} = M^{(1)}_{kl}$ и $(\forall a > 0)$

$$M^{(a)}_{kl} = \int\limits_{\partial D_a G} t^k x^l F_{D_a G}(dp|0,0).$$

Заменяя переменные, мы получаем

$$M^{(a)}_{kl} = \int\limits_{\partial G} (at)^l (\sqrt{a}\, x)^k F_{D_a G}(D_a(dp)|0,0),$$

и по автомодельному свойству винеровского процесса это равно $a^{l+k/2}M_{lk}$. При $a < 1$ мы убеждаемся в справедливости почленного интегрирования. Кроме того, группируя члены с одинаковыми степенями a, мы получаем две последовательности уравнений. Левые части полученных уравнений в первой последовательности – это коэффициенты при a^n $(n \geq 1)$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{n-k,2k}^{(n+k)} \binom{n+k}{2k} \frac{M_{n-k,2k}}{(n+k)!} = 0 \ (n \geq 1).$$

Коэффициенты при $a^{n-1/2}$ дают нам последовательность

$$\sum_{k=1}^{n} u_{n-k,2k-1}^{(n+k-1)} \binom{n+k-1}{2k-1} \frac{M_{n-k,2k-1}}{(n+k-1)!} = 0 \ (n \geq 1).$$

Для пояснения смысла этих уравнений заметим, что из уравнения $u'_{10} + \frac{1}{2}u'_{02} = 0$ вытекает множество уравнений

$$(\forall k, l \geq 0, \text{ц}elye) \ u_{k+1,l}^{(k+l+1)} + 1/2\, u_{k,l+2}^{(k+l+2)} = 0,$$

где $u_{kl}^{(k+l)} = \partial^{k+l}u/(\partial t^k \partial x^l)$. Из этих уравнений можно получить два представления:

$$u_{n-k,2k}^{(n+k)} = (-2)^k u_{n0}^{(n)} \ (0 \leq k \leq n),$$

$$u_{n-k,2k-1}^{(n+k-1)} = (-2)^{k-1} u_{n-1,1}^{(n)} \ (1 \leq k \leq n).$$

Из произвольности решения u получаем

$$\sum_{k=0}^{n} (-2)^k \binom{n+k}{2k} \frac{M_{n-k,2k}}{(n+k)!} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-2)^{k-1} \binom{n+k-1}{2k-1} \frac{M_{n-k,2k-1}}{(n+k-1)!} = 0 \ (n \geq 1).$$

Утверждение теоремы следует из первого уравнения. Второе уравнение обращается в тождество ввиду очевидной симметрии uds-окрестности относительно t-оси.

Теорема доказана.

Асимптотика uds-кривой

Пусть G_a – выпуклая гладкая uds-окрестность с граничной функцией g_a, проходящей через точку $(a, 0)$. Тогда ее образ $\tilde{G}_a$ при отображении D_a^{-1} имеет граничную функцию вида $\tilde{g}_a$, проходящую через точку $(1, 0)$. Мы покажем, что семейство $(\tilde{g}_a)_{a>0}$ компактно и существуют пределы $\tilde{g}_\infty = \lim\limits_{a\to\infty} \tilde{g}_a$ и $\tilde{g}_0 = \lim\limits_{a\to 0} \tilde{g}_a$, которые являются решениями соответствующих обратных проблем первого выхода.

Из выпуклости G_a следует, что $2a \le \ell_a \le 2a + 4b_a$, где ℓ_a – длина границы ∂G_a и b_a – максимальное значение функции $g_a(t)$ на интервале $0 < t < a$. Здесь $c_a = 1/\ell_a$ – значение плотности равномерного распределения на границе. С другой стороны, максимальное значение плотности первого выхода из множества $R_+ \times (-\infty, x)$ равно

$$\max_{t\in R_+} \frac{x}{\sqrt{2\pi t_3}} \exp(-\frac{x^2}{2t}) = \frac{K}{x^2},$$

где $K = e^{-3/2}\sqrt{\frac{27}{2\pi}}$. Из Теоремы 1 мы получаем оценку с помощью "горизонтальной" плотности $c_a \le K/b_a^2$. Отсюда получаем неравенство $2a + 4b_a \ge b_a^2/K$, из которого следует $b_a \le 2K + \sqrt{4K^2 + 2Ka}$. Следовательно, $ac_a = a/\ell_a \to 1/2$ $(a \to \infty)$ и $\limsup\limits_{a\to\infty} \tilde{b}_a \le \sqrt{2K}$, где $\tilde{b}_a = b_a/\sqrt{a} = \max\limits_{0<t<1} \tilde{g}_a(t)$.

Для оценки $\tilde{b}_a$ снизу мы используем Теорему 1 для крайней правой точке границы ∂G_a, сравнивая плотность в ней с "вертикальной" плотностью винеровского процесса:

$$c_a \le \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}.$$

Итак, мы получаем неравенство $b_a \ge \frac{1}{4}\sqrt{2\pi a} - 2a$, которое полезно при $a \to 0$. Более универсальную оценку дает нам первое моментное уравнение из Теоремы 2: $M_{10} = M_{02}$. В классе выпуклых uds-окрестностей мы имеем следующие неравенства:

$$\frac{a}{2}\sqrt{a^2 + b_a^2} \le M_{10} \le \frac{a^2}{2} + 2ab,$$

$$\frac{b^2}{3}\sqrt{a^2 + 4b^2} \le M_{02} \le b^2(a + \frac{2}{3}b).$$

Из этих неравенств мы получаем две системы оценок для $b_a/\sqrt{a}$. Для больших a: $(3/28)^{1/4} \le \tilde{b}_a \le 3/\sqrt{2}$, и для малых a: $\sqrt{3/8} \le \tilde{b}_a \le 3/6^{1/4}$.

Из предыдущих неравенств для $\tilde{b}_a$ следует, что семейство функций $(\tilde{g}_a)_{a>0}$ компактно относительно равномерной сходимости на любом замкнутом интервале, не содержащем точки $t = 0$ и $t = 1$. Доказательство того, что пределы являются функциями верхнего класса, следует из Леммы:

Лемма. *Пусть G_1, G_2 – выпуклые симметричные окрестности начальной точки с гладкими границами, определяемыми функциями g_1, g_2. Пусть f_1, f_2 – соответствующие плотности первого выхода на этих границах. Предположим, что $\min\limits_{0<t<T} f_1 > \max\limits_{0<t<T}$ для некоторого $T > 0$. Тогда*

(1) *если $g_1(T) \le g_2(T)$, тогда $(\forall 0 < t < T)\ g_1(t) < g_2(t)$,*
(2) *если g_1, g_2 обе возрастают на интервале $0 < t < T$, тогда $(\forall 0 < t < T)\ g_1(t) < g_2(t)$.*

Доказательство. a) Пусть $G = G_1 \cap G_2$ и f – соответствующая плотность. Пусть $B = \{t < T : g_1(t) \ge g_2(t)$. Если это множество состоит только из точек касания, то из Теоремы 1 следует, что $(\exists t < T)\ f_1(t) \le f_2(t)$. Если существует точка $t < T$ такая, что $g_1(t) > g_2(t)$, тогда мера $|B| > 0$ и мы получаем последовательность неравенств:

$$\min f_1 \cdot \int\limits_B \sqrt{1 + (g_1'(t))^2}\,dt \le \int\limits_B f_1(t)\sqrt{1 + (g_1'(t))^2}\,dt \le$$

$$\int\limits_B f(t)\sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt \le \int\limits_B f_2(t)\sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt \le$$

$$\max f_2 \int\limits_B \sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt.$$

Из выпуклости следует, что

$$\int\limits_B \sqrt{1 + (g_1'(t))^2}\,dt \ge \int\limits_B \sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt,$$

и, следовательно, $\min f_1 \le \max f_2$.

b) Если $g_1 > g_2$ на $(0, T)$, то из выпуклости получаем, что

$$\int_0^T \sqrt{1 + (g_1'(t))^2}\,dt \geq \int_0^T \sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt,$$

и из марковского свойства

$$\int_0^T f_1(t)\sqrt{1 + (g_1'(t))^2}\,dt \leq \int_0^T f_2(t)\sqrt{1 + (g_2'(t))^2}\,dt.$$

Это противоречит условию о плотностях. Если существует $t > 0$ такое, что $g_1(t) \leq g_2(t)$, то мы возвращаемся к случаю a).
Лемма доказана.

Первое приложение леммы состоит в сравнении любого $\tilde{g}_a$ с функцией $\bar{g}_1$, которая является граничной функцией *uds*-окрестности $\bar{G}_1$ с плотностью $c = 1$. Так как $\max f_{\tilde{G}_a} < 1$, мы заключаем, что $\bar{G}_1 \subset \tilde{G}_a$ для всех $a > 0$. Следовательно, все предельные точки семейства $(\tilde{g}_a)_{a>0}$ включены в верхний класс.

Из Теоремы 1 легко следует, что предельная функция единственна, когда $a \to \infty$, и то же для $a \to 0$. Из свойства автомодельности можно получить плотности вида

$$f_{\tilde{G}_a}(t) = c_a \frac{\sqrt{a^2 + a(\tilde{g}_a'(t))^2}}{\sqrt{1 + (\tilde{g}_a'(t))^2}}.$$

Когда $a \to \infty$, мы приходим к первой предельной обратной проблеме первого выхода. Мы используем свойство $a \cdot c_a \to 1/2$. Когда $a \to 0$, мы получаем второй предел. Имеем $\sqrt{a}\, c_a \to 1/4\tilde{b}_0$, где $\tilde{b}_0 = \lim\limits_{a \to 0} \tilde{b}_a$.

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Birkhäuser Verlag, 1996.
2. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* Мир, М., 1968.
3. B. P. Harlamov, *Uniform distribution Surfaces for the first exit points of a multi-dimensional diffusion process,* Probability theory and mathematical statistics (I. A. Ibragimov, A. Yu. Zaitsev, eds.), Gordon & Breach Publ.

4. Б. П. Харламов, *Равномерное распределение точки первого выхода для двумерного анизотропного диффузионного процесса: асимптотика окрестности начальной точки.* — Записки научных семинаров ПОМИ **228** (1996), 333–348.

Harlamov B.P. Inverse first exit problem for Wiener process

An inverse first exit problem for Wiener process is considered. This problem is to find such a ragion $G: \ (0,0) \in G \cup \partial G \subset R_+ \times R$ that a distribution of the first exit point from it has a priory given property. For to estimate of this region with the uniform distribution of the first exit point a theorem on comparing of densities and a theorem on moment characterization are used. When the uniform density tends to zero and to infinity two asymptotics are investigated.

Институт проблем машиноведения

Поступило 5 ноября 1997 г.