Н. М. Боголюбов

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНЗАЦ БЕТЕ И МОДЕЛЬ ТЕЙВИСА–КАММИНГСА

§1. Введение

Взаимодействие одномодового поля излучения с системой N двухуровневых атомов определяется гамильтонианом

$$\mathbf{H_d} = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2}(\omega + \Delta)\sum_{j=1}^{N} \sigma_j^z + \left(a^\dagger \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^- + a \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^+ \right), \qquad (1)$$

в котором бозе операторы $a^\dagger$, a описывают поле излучения, а матрицы Паули σ_j^z, $\sigma_j^\pm$: $[\sigma_i^-, \sigma_j^-] = \sigma_j^z \delta_{ij}$, $\sigma_j^\pm] = \pm\sigma_j^\pm \delta_{ij}$ являются атомными переменными. Энергия фотонной моды равна ω, невозмущенная энергия атома равна $\pm\frac{1}{2}(\omega + \Delta)$, постоянная $\Delta > 0$ называется расстройкой, а константа взаимодействия нормирована на единицу.

В теории сверхизлучения модель (1) известна как модель Дике [1], а в квантовой оптике как модель Тейвиса–Каммингса [2]. Частный случай $N = 1$ соответствует модели Джейса–Каммингса [3]. Модель (1) очень популярна и интенсивно исследуется почти 40 лет. Я приведу несколько статей, в которых использовались различные подходы к решению проблемы [4–9], более подробный список литературы можно найти, например, в [10–11]. В этой статье мы будем называть (1) – моделью Тейвиса–Каммингса (Т–К).

Легко проверить, что оператор числа возбуждений

$$\mathbf{M} = S^z + a^\dagger a, \qquad (2)$$

и оператор Казимира

$$\mathbf{S}^2 = S^+ S^- + S^z (S^z - 1) \qquad (3)$$

коммутируют между собой и с $\mathbf{H_d}$ (1):

$$[\mathbf{H_d}, \mathbf{M}] = [\mathbf{H_d}, \mathbf{S}^2] = 0. \qquad (4)$$

В формулах (2), (3) мы ввели операторы полного спина $S^z = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sigma_j^z$, $S^{\pm} = \sum_{j=1}^{N}\sigma_j^{\pm}$ с перестановочными соотношениями $[S^+, S^-] = 2S^z$, $[S^z, S^{\pm}] = \pm S^{\pm}$. В дальнейшем мы будем рассматривать гамильтониан $\mathbf{H} = \mathbf{H_d} - \omega\mathbf{M}$:

$$\mathbf{H} = \Delta S^z + \left(a^{\dagger}S^- + aS^+\right). \tag{5}$$

Ответы для (1) получаются элементарным пересчетом. Пространство состояний модели $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathcal{B}} \otimes \mathbf{C}_1^2 \otimes \ldots \otimes \mathbf{C}_N^2$ разлагается по неприводимым представлениям su(2) со спином S и числом возбуждений M:

$$\mathcal{H}_N = \otimes_{S\geqslant 0}^{N/2} Y(N,S) \otimes_{M=0}^{\infty} \mathcal{H}(N,S,M-S).$$

Здесь $Y(N,S) = N!(2S+1)\left\{\left(\frac{1}{2}N+S+1\right)!\left(\frac{1}{2}N-S\right)!\right\}^{-1}$ является вырождением представления $\mathcal{D}_S$ в редукции $(\mathcal{D}_{\frac{1}{2}})^N$.

Из (4) следует, что операторы $\mathbf{H}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{S}^2$ диагонализуются одновременно:

$$\begin{aligned} &\mathbf{H} \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle = E_{S,M} \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle, \\ &\mathbf{M} \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle = (M-S) \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle, \\ &\mathbf{S}^2 \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle = S(S+1) \mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle, \\ &0 \leqslant M < \infty, \quad 0 \leqslant S \leqslant \frac{N}{2}. \end{aligned} \tag{6}$$

В традиционном подходе [2–6] задача на собственные значения (6) решается подстановкой

$$\mid \Phi_{S,M}^{\sigma}\rangle = \sum_{m=0}^{M} A_{S,M,m}^{\sigma}(S^+)(a^{\dagger})^{M-m} \mid \Omega_S\rangle. \tag{7}$$

Вакуумное состояние $\mid \Omega_S\rangle$ определяется согласно

$$\begin{aligned} &\mid \Omega_S\rangle = \mid 0\rangle \mid S,-S\rangle; \quad a \mid 0\rangle = 0; \quad S^- \mid S,-S\rangle = 0, \\ &S^z \mid S,-S\rangle = -S \mid S,-S\rangle, \quad 0 \leqslant S \leqslant \frac{N}{2}, \end{aligned} \tag{8}$$

причем $\mathbf{S}^2 \mid \Omega_S\rangle = S(S+1) \mid \Omega_s\rangle$, а $\mathbf{M} \mid \Omega_S\rangle = -S \mid \Omega_S\rangle$. Последние два уравнения в (6) выполняются автоматически, а первое приводит к разностному уравнению на амплитуды $A_{S,M,m}^{\sigma}$:

$$\begin{aligned} &\{E_{S,M} - \Delta(m-S)\} A_{S,M,m}^{\sigma} = \\ &= (m+1)(2S-m)A_{S,M,m+1}^{\sigma} + (M+1-m)A_{S,M,m-1}^{\sigma}. \end{aligned} \tag{9}$$

В этой статье мы продемонстируем, что модель Т–К решается с помощью алгебраического анзаца Бете [12–14]. Собственные энергии и амплитуды волновой функции выражаются через корни уравнений Бете. Для норм собственных векторов и средних значений наблюдаемых будет получено детерминантное представление.

§2. Решение модели

Определим **L**-оператор

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} -X^z(\lambda) & X^+(\lambda) \\ X^-(\lambda) & X^z(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

с матричными элементами

$$X^z(\lambda) = \frac{1}{2}\left(-2\frac{S^z}{\lambda} - \lambda + \Delta\right),$$
$$X^+(\lambda) = a^\dagger - \frac{S^+}{\lambda}, \quad X^-(\lambda) = a - \frac{S^-}{\lambda},$$

а $\lambda \in \mathcal{C}$. Этот **L**-оператор удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[L_1(\lambda),\, L_2(\mu)] = [\mathbf{r}(\lambda,\mu),\, L_1(\lambda),\, L_2(\mu)]\,; \tag{11}$$

с **r**-матрицей

$$\mathbf{r}(\lambda,\mu) = \frac{1}{\lambda-\mu}\Pi. \tag{12}$$

Мы использовали стандартные обозначения $L_1 \equiv L \otimes I$, $L_2 \equiv I \otimes L$, а Π оператор перестановки: $\Pi x \otimes y = y \otimes x$, $\forall x, y \in \mathcal{C}^2$. Уравнение (11) является линеаризованной версией билинейного соотношения $R(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu) = T_2(\mu)T_1(\lambda)R(\lambda,\mu)$ [7, 15]. Операторы $X^z(\lambda)$, $X^+(\lambda)$, $X^-(\lambda)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\begin{gathered}\left[X^+(\lambda),\, X^-(\mu)\right] = \frac{2}{\lambda-\mu}\left(X^z(\lambda) - X^z(\mu)\right); \\ \left[X^z(\lambda),\, X^\pm(\mu)\right] = \pm\frac{1}{\lambda-\mu}\left(X^\pm(\lambda) - X^\pm(\mu)\right); \\ \left[X^+(\lambda),\, X^+(\mu)\right] = \left[X^-(\lambda),\, X^-(\mu)\right] = \left[X^z(\lambda),\, X^z(\mu)\right] = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Заметим, что $\operatorname{Tr} L(\lambda) = 0$. Первый нетривиальный спектральный инвариант

$$t(\lambda) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr} L^2(\lambda) = (X^z(\lambda))^2 + \frac{1}{2}X^+(\lambda)X^-(\lambda) + \frac{1}{2}X^-(\lambda)X^+(\lambda); \quad (14)$$

удовлетворяет соотношению

$$[t(\lambda),\, t(\mu)] = 0 \quad (15)$$

при произвольных λ, μ. Последнее соотношение следует из (13). Коммутативность (15) можно проверить исходя из явного вида $t(\lambda)$:

$$t(\lambda) = \lambda^{-2}\mathbf{S}^2 - \lambda^{-1}\mathbf{H} + \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{2} + \mathbf{M}\right) - \frac{\Delta}{2}\lambda + \frac{\lambda^2}{4}, \quad (16)$$

где $\mathbf{M}$ это оператор числа возбуждений (2), а $\mathbf{S}^2$ оператор Казимира (3). Оператор $\mathbf{H}$ является гамильтонианом модели Тейвиса–Каммингса (5). $\mathbf{L}$-оператор удовлетворяет свойствам симметрии:

$$e^{\alpha\mathbf{S}^2} L(\lambda) e^{-\alpha\mathbf{S}^2} = L(\lambda).$$

Оператор $X^+(\lambda)$ можно считать оператором рождения квазичастицы

$$\mathbf{M}X^+(\lambda) = X^+(\lambda)(\mathbf{M}+1) \quad (17)$$

$$\mathbf{S}^2X^+(\lambda) = X^+(\lambda)\mathbf{S}^2. \quad (18)$$

Собственную функцию спектрального инварианта $t(\lambda)$ естественно искать в стандартной для алгебраического Бете анзаца форме [7]:

$$\mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle = \prod_{j=1}^{M} X^+(\lambda_j) \mid \Omega_S\rangle, \quad (19)$$

с вакуумом $\mid \Omega_S\rangle$ (8). Согласно определению

$$\begin{aligned} X^z(\lambda) \mid \Omega_S\rangle = x(\lambda) \mid \Omega_S\rangle &= \frac{1}{2}\left(2\frac{S}{\lambda} - \lambda + \Delta\right) \mid \Omega_S\rangle, \\ X^-(\lambda) \mid \Omega_S\rangle &= \left(a - \frac{S^-}{\lambda}\right) \mid \Omega_S\rangle = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

и

$$t(\lambda) \mid \Omega_S\rangle = k(\lambda) \mid \Omega_S\rangle = \left\{ \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\Delta}{2}\lambda + \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{1}{2} - S \right) + \lambda^{-1}\Delta S + S(S+1)\lambda^{-2} \right\} \mid \Omega_S\rangle. \tag{21}$$

Вакуумное собственное значение $k(\lambda)$ спектрального инварианта выражается через вакуумное собственное значение оператора $X^z(\lambda)$. Из (13) следует, что

$$\left[X^+(\lambda),\, X^-(\lambda)\right] = 2\frac{\partial}{\partial\lambda}X^z(\lambda) \tag{22}$$

и следовательно,

$$t(\lambda) \mid \Omega_S\rangle = \left((X^z(\lambda))^2 - \frac{\partial}{\partial\lambda}X^z(\lambda) \right) \mid \Omega_S\rangle = \left(x^2(\lambda) - \frac{\partial}{\partial\lambda}x(\lambda) \right) \mid \Omega_S\rangle.$$

Волновая функция (19) является симметричной функцией своих аргументов, т.к. $[X^+(\lambda),\, X^+(\mu)] = 0$. Из (17), (18) и (8) следует что

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle &= (M - S) \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle, \\ \mathbf{S}^2 \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle &= S(S+1) \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} t(\lambda) \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle &= \Theta_M(\mu) \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle + \\ &+ \sum_{j=1}^{M} \frac{f_j}{\mu - \lambda_j} \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \mu, \lambda_{j+1} \ldots, \lambda_M)\rangle, \end{aligned} \tag{24}$$

где

$$\Theta_M(\mu) = x^2(\mu) - \frac{\partial}{\partial\mu}x(\mu) - 2\sum_j \frac{1}{\mu - \lambda_j} \left\{ x(\mu) - \sum_{k\neq j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \right\} \tag{25}$$

и

$$f_j = x(\lambda_j) - \sum_{k\neq j}^{M} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}. \tag{26}$$

Здесь $x(\lambda)$ это вакуумное собственное значение оператора (20). Если все коэффициенты f_j равны нулю, то $\mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle$

является собственным вектором $t(\mu)$. Соответствующие уравнения

$$x(\lambda_j) = \sum_{k \neq j}^{M} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k}. \tag{27}$$

называются уравнениями Бете, а собственные значения $t(\mu)$ равны

$$\Theta_M(\mu) = x^2(\mu) - \frac{\partial}{\partial \mu} x(\mu) - 2 \sum_{j=1}^{M} \frac{x(\mu) - x(\lambda)}{\mu - \lambda_j}. \tag{28}$$

Для доказательства (24) мы должны, как обычно, переместить в (14) оператор $t(\mu)$ слева направо через операторы X^+ используя перестановочные соотношения (13) и

$$\left[t(\lambda),\, X^+(\mu)\right] = \frac{2}{\lambda - \mu} \left\{X^+(\lambda) X^z(\mu) - X^+(\mu) X^z(\lambda)\right\},$$

которые следует из (13) и (14). После первого шага мы получим

$$t(\mu) \mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle = k(\mu) \mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle - \sum_j X^+(\lambda_1) \ldots X^+(\lambda_{j-1}) \frac{2}{\mu - \lambda_j} \times$$
$$\left\{X^+(\lambda_j) X^z(\mu) - X^+(\mu) X^z(\lambda_j)\right\} X^+(\lambda_{j+1}) \ldots X^+(\lambda_M) \mid \Omega_S\rangle,$$

где $\mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle \equiv \mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M)\rangle$. Перемещая теперь операторы X^+ направо по правилу (13) и действуя ими на вакуум согласно (20) мы, в результате, получим:

$$k(\mu) \mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle - \sum_j \frac{2}{\mu - \lambda_j} x(\mu) \mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle + \sum_{\substack{j \\ k > j}} \frac{2}{\mu - \lambda_j} \frac{1}{\mu - \lambda_k} \mid \Phi\{\lambda_j\}\rangle -$$
$$\sum_{\substack{j \\ k > j}} \frac{2}{\mu - \lambda_j} \frac{1}{\mu - \lambda_k} \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_M)\rangle +$$
$$\sum_j \frac{2}{\mu - \lambda_j} x(\lambda_j) \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \mu, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_M)\rangle +$$
$$\sum_{\substack{j \\ k > j}} \frac{2}{\mu - \lambda_j} \frac{1}{\mu - \lambda_j} \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \mu, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_M)\rangle +$$
$$\sum_{\substack{j \\ k > j}} \frac{2}{\mu - \lambda_j} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \mu, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_M)\rangle.$$

Равенства

$$\sum_{k\neq j}\frac{1}{u_k(u_k-u_j)}=-\sum_{k<j}\frac{1}{u_k u_j},$$
$$\frac{1}{(u-\lambda)(u-\mu)}=\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{u-\lambda}-\frac{1}{u-\mu}\right),$$

приводят к окончательному результату (24):

$$t(\mu)\mid\Phi\{\lambda_j\}\rangle=\left(k(\mu)-2\sum_j\frac{1}{\mu-\lambda_j}\left\{x(\mu)-\sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\right\}\right)\mid\Phi\{\lambda_j\}\rangle+$$
$$2\sum_j\frac{1}{\mu-\lambda_j}\left\{x(\lambda_j)-\sum_{k\neq j}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\right\}\mid\Phi(\lambda_1,\ldots,\lambda_{j-1},\mu,\lambda_{j+1},\ldots,\lambda_M)\rangle.$$

Подставляя явное выражение для $x(\lambda)$ (20) в уравнение (27) мы получим уравнение Бете для модели Тейвиса–Каммингса:

$$\frac{2S}{\lambda_n}-\lambda_n+\Delta-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq n}}^{M}\frac{2}{\lambda_n-\lambda_j}=0, \tag{29}$$

где $0\leqslant S\leqslant\frac{N}{2}$, а собственные значения (28) спектрального инварианта (14) равны:

$$\begin{gathered}\Theta_M(\mu)=S(S+1)\mu^{-2}-\mu^{-1}\left(-S\Delta-2S\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\lambda_j}\right)+\\ \left(\frac{\Delta^2}{4}+\frac{1}{2}+(M-S)\right)-\frac{\Delta}{2}\mu+\frac{\mu^2}{4}.\end{gathered} \tag{30}$$

Как следует из (16), вычет $\Theta_M(\mu)$ в простом полюсе $\mu=0$ есть собственная энергия модели:

$$E_{S,M}=-S\left(\Delta+2\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{\lambda_j}\right)=\Delta(M-S)-\sum_{j=1}^{M}\lambda_j, \tag{31}$$

мы воспользовались равенством $\sum_{n,j=0}^{M}(\lambda_n-\lambda_j)=0$ чтобы вывести последнее равенство. Коэффициент при μ^{-2} равен $S(S+1)$, а собственное значение оператора (2) равно $(M-S)$ в соответствии с (23).

Рассмотрим полином, построенный по корням уравнений Бете:

$$P(\lambda) = C\prod_{j=1}^{M}(\lambda_j - \lambda), \tag{32}$$

где $C^{-1} = \prod_{j=1}^{M}\lambda_j$. Из задачи на собственные значения (25) следует, что этот полином удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$P''(\lambda) - 2x(\lambda)P'(\lambda) + 2\sum_{j=1}^{M}\frac{x(\lambda)-x(\lambda_j)}{\lambda-\lambda_j}P(\lambda) = 0, \tag{33}$$

а уравнения Бете (27) являются уравнениями на нули этого полинома $P(\lambda_j) = 0$:

$$P''(\lambda_j) - 2x(\lambda_j)P'(\lambda_j) = 0.$$

Для вывода уравнения (33) из (25) следует воспользоваться равенствами:

$$\frac{P''(\lambda)}{P(\lambda)} = \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{M}\frac{1}{\lambda-\lambda_j}\frac{1}{\lambda-\lambda_k} = 2\sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{M}\frac{1}{\lambda_j-\lambda_k}\frac{1}{\lambda-\lambda_j},$$

$$\frac{P''(\lambda_k)}{P'(\lambda_k)} = 2\sum_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{M}\frac{1}{\lambda_k-\lambda_j}.$$

С помощью равенства $2\sum_{j=1}^{M}\frac{x(\lambda)-x(\lambda_j)}{\lambda-\lambda_j} = \lambda^{-1}(E_{S,M}+\Delta S) - M$, которое есть следствие соотношений (16), (21) и (23), уравнение (33) приводится к виду:

$$\lambda P''(\lambda) + (\lambda^2 - \Delta\lambda - 2S)P'(\lambda) + (E_{S,M} + \Delta S - M\lambda)P(\lambda) = 0. \tag{34}$$

Отсюда следует альтернативная формулировка задачи на собственные значения для модели Тейвиса–Каммингса: собственные энергии $E_{S,M}$ определяются из условия существования полиномиальных решений степени M без кратных корней уравнения

(34). Полином (32) является производящей функцией амплитуд $A^{\sigma}_{S,M,m}$ (7):

$$P(\lambda) = C\prod_{j=1}^{M}(\lambda_j^{\sigma} - \lambda) = \sum_{j=1}^{M} A^{\sigma}_{S,M,m}\lambda^m,$$

что следует из определения (19):

$$\mid \Phi\{\lambda^{\sigma}\}\rangle = C\prod_{j=1}^{M}\left(\lambda_j^{\sigma} a^{\dagger} - S^{+}\right)\mid \Omega_S\rangle =$$

$$\sum A^{M}_{S,m,\sigma}(S^{+})^m (a^{\dagger})^{M-m}\mid \Omega_S\rangle = \mid \Phi^{\sigma}_{S,M}\rangle.$$

Индекс σ в этих формулах обозначает различные наборы по модулю группы перестановки корней Бете (29). Дифференциальное уравнение (34) сводится к разностному уравнению (9), и это устанавливает соответствие рассматриваемого подхода с традиционным (7).

§3. Нормы и средние значения

Состояние, сопряженное (19), равно

$$\langle \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)\mid = \langle \Omega_S \mid \prod_{j=1}^{M} X^{-}(\lambda_j), \tag{35}$$

где $\langle \Omega_S \mid$ – дуальный псевдовакуум: $\langle \Omega_S \mid = \mid \Omega_S\rangle^{\dagger}$, $\langle \Omega_S \mid \Omega_S\rangle = 1$, $\langle \Omega_s \mid X^{+}(\lambda) = 0$, а $\{\lambda_j\}$ это решения уравнений Бете (29). Сопряженный вектор (35) является собственным для $t(\mu)$ (14):

$$\langle \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)\mid t(\mu) = \Theta_M(\mu)\langle \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M)\mid$$

с собственным значением (30). Вектора (19) и (35) ортогональны

$$\langle \Phi(\lambda_1^{\sigma'}, \ldots, \lambda_M^{\sigma'}) \mid \Phi(\lambda_1^{\sigma}, \ldots, \lambda_M^{\sigma})\rangle = 0,$$

если наборы решений не совпадают: $\{\lambda_j^{\sigma'}\} \neq \{\lambda_j^{\sigma}\}$. Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть матричный элемент

$$\langle \Omega_S \mid \prod_{j=1}^{M} X^{-}(\lambda_j^{\sigma'}) t(\mu) \prod_{j=1}^{M} X^{+}(\lambda_j^{\sigma}) \mid \Omega_S\rangle$$

и учесть, что $\Theta_M(\mu, \{\lambda_j^{\sigma'}\}) \neq \Theta_M(\mu, \{\lambda_j^{\sigma}\})$ [14].

Нормы векторов Бете равны

$$\langle \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \mid \Phi(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) \rangle = \det \widehat{f}, \tag{36}$$

где $\widehat{f}$ матрица с матричными элементами

$$f_{nj} = \left\{ \frac{2S}{\lambda_n^2} + 1 - \sum_{k \neq n} \frac{2}{(\lambda_n - \lambda_k)^2} \right\} \delta_{nj} + \frac{2}{(\lambda_n - \lambda_j)^2}. \tag{37}$$

Доказательство равенства (36) основано на стандартной схеме КМОЗ. Следует заметить, что форма (36) является стандартной для интегрируемых моделей [14, 16]. Для того чтобы сделать это соответствие более прозрачным, достаточно показать, что матричные элементы (37) есть вторые производные действия F : $\frac{\partial^2}{\partial \lambda_n \partial \lambda_j} F = f_{nj}$, при условии что уравнения экстремума $\frac{\partial}{\partial \lambda_n} F = f_n$, $f_n = 0$ это уравнения Бете. В рассматриваемом случае

$$F = -2S \sum_{k=1}^{M} \ln \mid \lambda_k \mid + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \lambda_k^2 - \Delta \sum_{k=1}^{M} \lambda_k + \sum_{\substack{k,j=1 \\ k \neq j}}^{M} \ln \mid \lambda_k - \lambda_j \mid, \tag{38}$$

и уравнение $f_n = 0$ есть (29).

Чтобы вычислить среднее оператора S^z на собственном векторе $\mid \Phi(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_M) \rangle$ следует заметить, что вариация параметра Δ приводит к:

$$\langle S^z \rangle = \frac{\langle \Phi \mid S^z \mid \Phi \rangle}{\langle \Phi \mid \Phi \rangle} = \frac{\partial E_{S,M}}{\partial \Delta}.$$

Это равенство позволяет вычислить среднее значение через решения уравнения Бете. Воспользовавшись выражением (31) для собственной энергии получим:

$$\langle S^z \rangle = M - S - \sum_{j=1}^{M} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \Delta}.$$

Дифференцирование (29) по Δ дает

$$\sum_{j=1}^{M} f_{nj} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \Delta} = 1,$$

где f_{nj} это (37) и, следовательно,

$$\langle S^z \rangle = M - S + \frac{\det \widehat{\phi}}{\det \widehat{f}}.$$

Матрица $\widehat{\phi}$ равна

$$\widehat{\phi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & f_{11} & \dots & f_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_{M1} & \dots & f_{MM} \end{pmatrix}.$$

Среднее значение числа фотонов равно

$$\langle a^\dagger a \rangle = M - S - \langle S^z \rangle = \frac{\det \widehat{\phi}}{\det \widehat{f}},$$

так как $\langle \mathbf{M} \rangle = M - S$ (23).

§4. Модель Тейвиса–Каммингса с нелинейностью четвертого порядка

В статье [19] мы применили КМОЗ к решению модели с гамильтонианом

$$\mathbf{H}_c = \Delta S^z + (a^\dagger S^- + a S^+) + c a^\dagger a S^z, \tag{39}$$

где $c > 0$ есть постоянная взаимодействия, последнее слагаемое в гамильтониане приводит к межуровневым атомным переходам, зависящим от числа фотонов, и описывает поэтому штарковский сдвиг. Когда $c = 0$, (39) переходит в модель Тейвиса–Каммингса. Уравнения Бете (29) и спектр модели (31) были получены в пределе $c \to 0$ соответствующих выражений для модели (39). Между тем, последние были получены по стандратной схеме алгебраического Бете анзаца [12, 13]. Матрица монодромии модели (39)

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(\lambda) & \mathbf{B}(\lambda) \\ \mathbf{C}(\lambda) & \mathbf{D}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\mathbf{A}(\lambda) = \left(c\lambda - c\Delta - 1 - c^2 a^\dagger a\right)\left(1 - c\frac{S^z}{\lambda}\right) + \frac{c^2}{\lambda} S^- a^\dagger,$$

$$\mathbf{D}(\lambda) = \frac{c^2}{\lambda} a S^+ - \left(1 + \frac{c}{\lambda} S^z\right),$$

$$\mathbf{C}(\lambda) = -\frac{c}{\lambda} S^- + ca\left(1 - \frac{c}{\lambda} S^z\right),$$

$$\mathbf{B}(\lambda) = c(a^\dagger + cS^+) - c(1 + c\Delta)\frac{S^+}{\lambda} + c^2 a^\dagger \frac{S^z}{\lambda} - c^3 a^\dagger a \frac{S^+}{\lambda},$$

удовлетворяет билинейному соотношению

$$R(\lambda,\mu)T_1(\lambda)T_2(\mu) = T_2(\mu)T_1(\lambda)R(\lambda,\mu), \qquad (41)$$

с рациональной **R**-матрицей

$$R(\lambda,\mu) = I + \frac{c}{\lambda - \mu}\Pi.$$

Гамильтониан (39) и оператор числа возбуждений (2) выражаются через матрицу перехода $\tau(\lambda)$:

$$\tau(\lambda) = \operatorname{Tr} T(\lambda) = c\lambda - \left(c^2\mathbf{M} + c\Delta + 2\right) + \frac{c^2}{\lambda}\mathbf{H}_c.$$

Исследуем билинейное соотношение (41) в пределе малых констант взаимодействия $c \to 0$. Разложение матрицы монодромии (40) равно

$$T(\lambda) = -I + c\widetilde{L}(\lambda) + O(c^2) \qquad (42)$$

с **L**-оператором

$$\widetilde{L}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - \Delta + \frac{S^z}{\lambda} & a^\dagger - \frac{S^+}{\lambda} \\ a - \frac{S^-}{\lambda} & -\frac{S^z}{\lambda} \end{pmatrix}. \qquad (43)$$

Подставляя разложение (42) в билинейное соотношение (41) и собирая члены при первой степени c можно убедиться, что **L**-оператор (43) удовлетворяет линейному коммутационному соотношению (11). Поскольку (11) инвариантно относительно преобразования

$$\widetilde{L}(\lambda) \to \widetilde{L}(\lambda) - \frac{1}{2}(\lambda - \Delta)I,$$

мы в результате получим **L**-оператор (10) модели Тейвиса–Каммингса.

§5. Заключение

Модель Тейвиса–Каммингса является простейшей моделью квантовой нелинейной оптики, решаемой алгебраическим анзацем Бете. Более сложные модели рассмотрены в работах [17–19].

Эта работа была поддержана Российским Фондом фундаментальных исследований (проект No. 95–01–00476а) и грантом No. R3C300 Международного Фонда.

Литература

1. R. H. Dicke,, *Coherence in spontaneous radiation process.* — Phys. Rev. **93** (1954), 99.
2. M. Tavis, F. Cummings,, *Exact solution for an N-molecule-radiation-field Hamiltonian.* — Phys. Rev. **170,** No. 2 (1968), 379–384.
3. E. T. Jaynes, F. W. Cumming,, — IEEE **51** (1963), 89.
4. Y. K. Wang, F. T. Hioe,, *Phase transition in the Dicke model of superradiance.* — Phys. Rev. **A 7,** No. 3 (1072), 831–836.
5. K. Hepp, E. H. Lieb,, *On the superradiant phase transition for molecules in a quantized radiation field: the Dicke maser model.* — Annals of Phys. **76** (1973), 360–404.
6. G. Sharf,, *Time evolution of a quantum mechanical maser model.* — Annals of Phys. **83** (1974), 71–102.
7. M. Gauden,, *La fonction d'onde de Bethe.* Masson, Paris (1983).
8. С. А. Федотов,, *Применение метода функционального интегрирования в теории сверхизлучения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **161** (1987), 146–154.
9. В. Н. Попов, В. С. Ярунин,, *Когерентные коллективные явления в сверхпроводимости и нелинейной оптике.* Изд-во С.-Петербургского университета, СПБ (1994).
10. R. K. Bullough, N. M. Bogoliubov, N. Nayak, B. V. Thompson,, *Cavity Q.E.D.: Fundamental theory of micromaser and measurements of its cavity field.* Quantum measurements in optics, ed P. Tombesi and D. F. Walls, New-York, Plenum Press (1992), 129–149.
11. Е. И. Алискендеров, А. С. Шумовский, Хо Чунг Зунг, *Квантовые эффекты взаимодействия атомов с радиационным полем.* — ЭЧАЯ **24,** No. 2 (1993), 409–462.
12. L. D. Faddeev,, *Quantum inverse scattering method.* — Sov. Sci. Rev. Math. Phys. **1** (1981), 107–160.
13. Н. М. Боголюбов, А. И. Изергин, В. Е. Корепин,, *Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи.* Изд-во “Наука”, Москва (1992).
14. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin,, Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions Cambridge University Press (1993).
15. E. K. Sklyanin,, *Separation of variables.* — Progr. Theor. Phys. Suppl. **118** (1995), 35–60.

16. V. E. Korepin,, *Calculations of norm of Bethe wave functions.* — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
17. В. И. Рупасов,, *Вклад в теорию сверхизлучения Дике. Точное решение квазиодномерной квантовой модели.* — ЖЭТФ **83** (1982), 1711–1723.
18. N. M. Bogoliubov, A. V. Rybin, J. Timonen,, *An integrable q-deformed model for bosons interacting with impurities.* — J. Phys. **A 27** (1994), L363–L367.
19. N. M. Bogoliubov, R. K. Bullough, J. Timonen,, *Exact solution of generalised Tavis–Gummings models.* (to appear in J. Phys. A)
20. Н. М. Боголюбов,, *Точное решение модели трех связанных осцилляторов с штарковской нелинейностью.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 122–128.

Bogoliubov N. M. Algebraic Bethe anzatz and the Tavis–Cummings model.

The N-atoms-radiation-field model is solved for its eigenvalues and eigenstates by the Algebraic Bethe anzatz and the comparison with the traditional approach is established. The eigenenergies and the amplitudes of the wave function are expressed through the solutions of the Bethe equations. The determinant representation of the norms of the wave functions and of the expectation values are obtained. The algebraic approach establish the connections of the cinsidered model with the other exactly solvable models.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 мая 1996 г.