В. В. Борзов, Е. В. Дамаскинский, С. Б. Егоров

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ ДЕФОРМИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА ПРИ РАЗНЫХ ВЫБОРАХ ОБРАЗУЮЩИХ

Аннотация. С единых позиций обсуждаются различные варианты перестановочных соотношений алгебры q-деформированного бозонного осциллятора, соответствующие разным вариантам выбора ее образующих. Рассматриваются типы перестановочных соотношений, включающие в качестве частных случаев все наиболее популярные формы таких соотношений. Стандартными методами описана процедура построения и классификации представлений алгебры q-деформированного бозонного осциллятора в разных базисах. Обсуждается возможность введения в этой алгебре структуры алгебры Хопфа. Кратко обсуждена возможность построения универсальной $\mathcal{R}$-матрицы для рассматриваемой алгебры.

1. Введение

В последние годы много внимания было уделено исследованию всевозможных деформаций перестановочных соотношений бозонного осциллятора (см. например [1]). В настоящей работе мы опишем все неприводимые представления алгебры деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$, $q > 0$ при различных выборах набора $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q) = \{a,\, a^{\dagger},\, N\}$ порождающих элементов, удовлетворяющих соотношениям

$$a\,a^{+} - q^{\gamma}\,a^{+}\,a = q^{\alpha N+\beta}, \quad q \in \mathcal{C}$$
$$[N,\, a] = -a, \qquad [N,\, a^{\dagger}] = a^{\dagger},$$

где α, β, γ вещественные параметры. Для упрощения терминологии мы, допуская некоторую вольность речи, будем называть такой набор $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ образующих с указанными соотношениями базисом в $\mathcal{A}(q)$, а его элементы генераторами.

Отметим, что помимо основного параметра деформации q мы используем здесь три дополнительных вещественных параметра

α, β, γ. Поскольку, как мы покажем ниже, при $\alpha \neq \gamma$, алгебры, порождаемые разными выборами базисов, изоморфны (при подходящих соотношениях между параметрами), то эти параметры не являются независимыми и могут быть устранены соответствующими переопределениями. Однако, введение этих параметров позволяет с единых позиций рассмотреть большинство стандартных деформаций осциллятора (в том числе и стандартные бозоный и фермионный) как частные случаи. Укажем, что вариант $\mathcal{W}^1_{\alpha,\beta}(q)$ такого выбора с $\gamma = 1$ был предложен недавно в [2].

Мы также обсудим возможность введения структуры алгебры Хопфа (типа $sl_q(2)$) при соответствующей модификации алгебры q-осциллятора $\mathcal{A}(q)$. Мы будем называть такую модифицированную алгебру суженной, поскольку она имеет только несингулярные представления фоковского типа. Для такой модифицированной алгебры структура алгебры Хопфа может быть определена довольно естественным образом. В случае, когда параметры, входящие в определение алгебры q-осциллятора, принимают специфические значения мы получим стандартные варианты определения копроизведения, коединицы и антипода (см. например [3]).

Известно, что в теории квантовых деформаций особо важную роль играет универсальная $\mathcal{R}$-матрица. При соответствующей модификации алгебры $\mathcal{A}(q)$ можно показать, что универсальная $\mathcal{R}$-матрица типа универсальной $\mathcal{R}$-матрицы для $sl_q(2)$ может быть введена достаточно стандартным образом. В последней части работы мы приведем пример такого определения. Этот пример универсальной $\mathcal{R}$-матрицы воспроизводит стандартный [3] вариант при специальном выборе параметров (т.е. базиса $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$).

Однако следует подчеркнуть, что такая модификация сужает возможности физических приложений, так как имеются основания считать, что нефоковские представления, которые отсуствуют при такой модификации, могут иметь [4] важное физическое значение. Более того, соответствующая модификация по существу разрушает “осцилляторную” природу рассматриваемых объектов придавая им особенности характерные для “углового момента”, так как полученная структура алгебры Хопфа и универсальная $\mathcal{R}$-матрица подобны тем, которые известны для $sl_q(2)$ [5, 6]. Настоящая работа является уточненым и переработанным вариантом препринта [7].

2. Алгебра деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$

Алгебра деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ может быть определена как ассоциативная алгебра с единицей, три генератора $a^{\dagger}$, a, N которой в базисе $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$a\,a^{+} - q^{\gamma}\,a^{+}\,a = q^{\alpha N+\beta}, \quad q \in \mathcal{C} \tag{2.1}$$

$$[N,\,a] = -a, \qquad [N,\,a^{\dagger}] = a^{\dagger}, \tag{2.2}$$

где α, β, γ вещественные параметры.

Отметим, что стандартный бозонный осциллятор соответствует выбору $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (или же $q = 1$).

Как уже отмечалось выше, дополнительные параметры α, β, γ не являются независимыми и могут быть устранены простым переопределением. Поскольку в алгебре $\mathcal{A}(q)$, как и в каждой ассоциативной алгебре, допустимо любое обратимое преобразование образующих, то алгебры порождаемые базисами $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ с $\alpha \neq \gamma$ и $\mathcal{W}^{\widetilde{\gamma}}_{\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}}(\widehat{q})$ с $\widetilde{\alpha} \neq \widetilde{\gamma}$ изоморфны. Этот изоморфизм устанавливается соотношениями

$$\widetilde{a} = q^{\sigma} a, \qquad \widetilde{a}^{\dagger} = a^{\dagger} q^{\sigma}, \qquad \widetilde{N} = N, \qquad \widehat{q}^{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}} = q^{\gamma-\alpha}, \tag{2.3}$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{\widetilde{\alpha}\gamma - \alpha\widetilde{\gamma}}{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}}\widetilde{N} + \widetilde{\beta}\frac{\gamma-\alpha}{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}} - \beta\right). \tag{2.4}$$

Эти формулы несколько упрощаются если в качестве первого базиса $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ взять $\mathcal{W}^{1}_{0,0}(q)$ [8, 9]

$$\widetilde{a} = q^{\sigma} a, \qquad \widetilde{a}^{\dagger} = a^{\dagger} q^{\sigma}, \qquad \widetilde{N} = N, \qquad \widehat{q}^{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}} = q, \sigma = \frac{1}{2}\frac{\widetilde{\alpha}\widetilde{N}+\widetilde{\beta}}{\widetilde{\gamma}-\widetilde{\alpha}}. \tag{2.5}$$

Если теперь в качестве второго базиса выбрать $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(\widehat{q})$ [10, 11], то эти формулы перейдут в известные соотношения [1]

$$\widetilde{a} = q^{-\frac{N}{4}} a, \qquad \widetilde{a}^{\dagger} = a^{\dagger} q^{-\frac{N}{4}}, \qquad \widetilde{N} = N, \qquad \widehat{q}^{2} = q. \tag{2.6}$$

Подчеркнем, что изоморфизм имеется лишь для вполне определенного соотношения ($\widehat{q}^{2} = q$) параметров деформации. Заметим также, что этот изоморфизм сохраняет естественные условия эрмитовости

$$(a)^* = a^\dagger, \quad (a^\dagger)^* = a, \quad (N)^* = N, \tag{2.7}$$

Вернемся к рассмотрению произвольного базиса. Стандартными методами, предполагая существование вакуумного состояния $|0\rangle$, такого что

$$a|0\rangle = 0, \qquad N|0\rangle = 0, \qquad (\langle 0|0\rangle = 1), \tag{2.8}$$

можно построить представление Фока для алгебры $\mathcal{A}(q)$ деформированного осциллятора в базисе $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$. Если взять в качестве базиса в пространстве Фока $\mathcal{H}_F$ (нормированные) состояния

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q)!}}|0\rangle \quad n = 0, 1, 2, ...; \tag{2.9}$$

то действие генераторов алгебры $\mathcal{A}(q)$ имеет вид

$$\begin{aligned} N|n\rangle &= |n\rangle \\ a|n\rangle &= \sqrt{F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q)}|n-1\rangle \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n+1;q)}|n+1\rangle \end{aligned} \tag{2.10}$$

Величина, $F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q)$, называемая в дальнейшем базисным числом, определяется формулами

$$F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q) = \begin{cases} q^{\beta}\ \frac{q^{n\alpha}-q^{n\gamma}}{q^{\alpha}-q^{\gamma}} & \alpha \neq \gamma \\ n\, q^{\beta+\gamma(n-1)} & \alpha = \gamma \end{cases}$$
$$F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q)! = F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(1;q) \cdot F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(2;q) \cdot \ldots \cdot F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n;q), \quad F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(1;q) = q^{\beta}. \tag{2.11}$$

Заметим,что для специальных значений параметров, соответствующих наиболее популярным выборам базиса, имеем

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}^{1}_{0,0}(q)\ \ [8,9,12]: \ F^{1}_{0,0}(n;q) = \tfrac{q^n-1}{q-1} = [n;q]; \\ &\mathcal{W}^{1}_{-1,0}(q)\ \ [10,11]: F^{1}_{-1,0}(n;q) = \tfrac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}} = [n]_q \equiv [n]; \\ &\mathcal{W}^{0}_{-2,0}(q)\ \ [23,24]: F^{0}_{-2,0}(n;q) = q^{2(1-n)}[n;q^2] = \\ &\qquad\qquad q^{2(1-n)}(1+q^2+\ldots+q^{2(n-1)}); \\ &\mathcal{W}^{1}_{1,0}(q) \qquad\qquad : \ F^{1}_{1,0}(n;q) = nq^{n-1}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для стандартного бозонного осциллятора имеем

$$F^0_{0,0}(n;q) = n, \tag{2.13}$$

что соответствует классическому пределу

$$\lim_{q\to 1} F^\gamma_{\alpha,\beta}(n;q) = n. \tag{2.14}$$

Перечислим некоторые свойства введенных базисных чисел, которые мы будем использовать ниже:

$$\begin{cases} F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) < 0, & \text{если} \quad n < 0, \\ F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) = 0, & \text{если} \quad n = 0, \\ F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) > 0, & \text{если} \quad n > 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$F^\gamma_{\alpha,\beta}(n+1) - q^\gamma F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) = q^{\alpha n+\beta}; \tag{2.16}$$

$$F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) = F^\alpha_{\gamma,\beta}(n). \tag{2.17}$$

Очевидно, что в представлении Фока базисные векторы отличаются от стандартных только нормировкой и выполняется дополнительное соотношение

$$a^\dagger a = F^\gamma_{\alpha,\beta}(N;q), \tag{2.18}$$

аналогичное соотношению $N_b = b^\dagger b$ для стандартного бозонного осциллятора $[b, b^\dagger] = \mathbf{1}$. Отсюда следует, что в представлении Фока элементы N, $a^\dagger$, a базиса $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ алгебры $\mathcal{A}(q)$ связаны с генераторами N_b, $b^\dagger$, b стандартного осциллятора соотношениями

$$\begin{gathered} N = N_b, \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{F^\gamma_{\alpha,\beta}(N;q)}{N_b}}\, b^\dagger, \\ a = b\sqrt{\frac{F^\gamma_{\alpha,\beta}(N;q)}{N_b}}. \end{gathered} \tag{2.19}$$

Эти соотношения меняются в других представлениях, существование которых связано с нетривиальностью центра алгебры $\mathcal{A}(q)$, который в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ порождается элементом [13, 1]

$$\zeta = q^{-\gamma N}\left(F^\gamma_{\alpha,\beta}(N) - a^\dagger a\right).$$

Для стандартного бозонного осциллятора $\mathcal{W}^0_{0,0}(q)$ $F^0_{0,0}(N_b;q) = N_b$, а центр обращается в ноль, так что, в соответствии с теоремой фон Неймана, представление Фока для $\mathcal{W}^0_{0,0}(q)$ единственно с точностью до унитарной эквивалентности.

Перечислим, не входя в подробности (см., например, обзор [1]) некоторые из наиболее популярных вариантов q-осцилляторов, которые могут быть получены выбором конкретных значений параметров базиса $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$.

Случай $\mathcal{W}^1_{0,0}(q)$. Соответствующая деформация была введена независимо многими авторами (см., например, [8, 9, 12]) исходя из разных соображений. Определяющее перестановочное соотношение имеет вид

$$a\,a^\dagger - q\,a^\dagger\,a = I,$$

и может быть дополнено соотношениями (2.2). Конечно, уравнение $N = a^\dagger\,a$ в этом случае не справедливо. В рассматриваемом базисе $\mathcal{W}^1_{0,0}(q)$ центр порождается [13, 1] элементом

$$\zeta = q^{-N}\big([N;q] - a^\dagger a\big), \quad \text{где } [m;q] \equiv \tfrac{q^m - 1}{q-1}. \tag{2.20}$$

Привлекательная особенность этого выбора базиса образующих в алгебре $\mathcal{A}(q)$ состоит в возможности сравнительно просто определить ковариантное относительно квантовой группы $SU_q(n)$ обобщение на случай нескольких степеней свободы, нетривиальным (взаимно некоммутирующим) образом [14, 15, 18].

Случай $\mathcal{W}^1_{-1,0}(q)$. Образующие этого базиса удовлетворяют [10, 11, 1] соотношениям

$$a\,a^\dagger - qa^\dagger\,a = q^{-N}, \quad [N,a] = -a, \quad [N,a^\dagger] = a^\dagger. \tag{2.21}$$

Соответствующая деформация алгебры осциллятора возникла при распространении бозонной реализации Швингера [19] операторов углового момента на случай квантовой алгебры $U_q(su(2))$ [10, 11, 1] и ее некомпактной формы $U_q(su(1,1))$ [20, 1]. При таком выборе базиса (нетривиальный) центр [13, 1], порождается элементом аналогичным (2.20) с $[m] \equiv \frac{q^m - q^{-m}}{q-q^{-1}}$ вместо $[m;q]$ и имеется много неэквивалентных неприводимых представлений [13, 21, 1].

Некоторые авторы рассматривали более ограничительную форму деформации с базисом $\mathcal{W}^1_{-1,0}(q;q^{-1})$ для элементов которого помимо соотношения (5) постулируется также дополнительное соотношение

$$a\,a^\dagger - \frac{1}{q} a^\dagger\, a = q^N, \tag{2.22}$$

Тогда мы имеем

$$a^\dagger\, a = [N], \qquad a\,a^\dagger = [N+1], \qquad [a, a^\dagger] = [N+1] - [N], \tag{2.23}$$

и (как следует из (2.20) с $[N;q]$ замененным на $[N]$) центр этой алгебры становится тривиальным ($\zeta = 0$). Соответственно эта деформация имеет только одно (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление – q-аналог стандартного представления Фока.

Случай $\mathcal{W}^0_{-2,0}(q)$. Этот базис рассматривался в [23, 24] (см.также [1]) и его элементы удовлетворяют соотношениям

$$[a,\, a^\dagger] = q^{-2N}, \quad [N,\, a] = -a, \quad [N,\, a^\dagger] = a^\dagger. \tag{2.24}$$

Заметим, что алгебра $\mathcal{W}^0_{-2,0}(q)$ может быть получена контракцией в пределе бесконечного спина из квантовой алгебры $sl_q(2)$ [5, 25, 26, 1]. Центр алгебры $\mathcal{W}^0_{-2,0}(q)$ порождается элементом

$$\zeta = [N; q^{-2}] - a^\dagger\, a.$$

Некоторые ее представления рассматривались в [24].

Случай $\mathcal{W}^1_{1,0}(q)$. Элементы этого варианта выбора базиса в алгебре $\mathcal{A}(q)$ обладают свойствами, характерными для систем, описываемых методом Тамма-Данкова, и удовлетворяют перестановочным соотношениями

$$a\,a^\dagger - q a^\dagger\, a = q^N, \quad [N,\, a] = -a, \quad [N,\, a^\dagger] = a^\dagger, \tag{2.25}$$

где q произвольное (в общем случае комплексное) ненулевое число. Отметим, что этот случай особый, так как порождаемая $\mathcal{W}^1_{1,0}(q)$ алгебра не изоморфна алгебре алгебре $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ при $\alpha \neq \gamma$.

Случай $\widehat{W}^1_{-1,0}(q)$**.** Эта деформация была введена в работе [22] и определяется соотношениями (2.2) и последним из соотношений (2.23), которые не эквивалентны (2.21) и (2.22) (см. подробное обсуждение в [27]). Алгебра порождаемая в этом случае допускает [22] структуру алгебры Хопфа того же типа, что и $sl_q(2)$ [5, 6]. Легко показать, что эта алгебра имеет тривиальный центр и только представления фоковского типа.

Все конкретные деформации рассматриваемого класса имеют некоторые общие черты.

Во-первых, исследуется алгебра не являющаяся алгеброй Ли, которая строго определяется как фактор алгебра $\mathcal{A}(q) = \mathcal{A}/I_q$ ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ по двустороннему идеалу I_q. Здесь ассоциативная алгебра $\mathcal{A}$ свободно порождена фиксированным множеством букв (генераторов), а идеал I_q определен фиксированным множеством правил (перестановочных соотношений).

Во-вторых, во всех базисах каждый генератор рассматривается как независимый, и всякое соотношение аналогичное соотношению $N := b^\dagger b$, обычному для стандартной квантовой механики, вообще говоря не верно. Конкретная связь между генераторами может появиться либо как дополнительное ограничение на выбор представлений либо должна постулироваться независимо в определении алгебры.

В-третьих, всегда предполагается, справедливость некоторого "правила соответствия". А именно, предполагается, что в так называемом "классическом пределе" при котором $q \to 1$, воспроизводится структура стандартной алгебры бозонного осциллятора. Несмотря на это в большинстве базисов имеются так называемые "сингулярные" представления [13], которые исчезают в таком пределе.

3. Классификация неприводимых представлений алгебры деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$

В этой главе мы дадим[1] классификацию всех неприводимых представлений алгебры деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$. Будем предполагать, что $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, а q – произвольное положительное число. Нас будут интересовать представления алгебры $\mathcal{A}(q)$ (т.е. соотношений (2.1)) в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, в которых элементы a, $a^\dagger$, N, базиса $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ реализованы как операторы удовлетворяющие естественным условиям эрмитовости (2.7) и при этом самосопряженный (эрмитов) оператор N имеет простой (невырожденный) дискретный спектр. Так как параметр β не участвует в классификации представлений алгебры $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$, то удобно выделить следу-

[1] В основном следуя работе [21], в которой рассмотрен случай $\mathcal{W}^1_{-1,0}(q)$

ющие пять различных областей изменения параметров α, γ

$$\begin{aligned} &1)\quad \gamma \ge 0,\quad \alpha < \gamma\,;\\ &2)\quad \gamma \ge 0,\quad \alpha > \gamma\,;\\ &3)\quad \gamma \le 0,\quad \alpha < \gamma\,;\\ &4)\quad \gamma \le 0,\quad \alpha > \gamma\,;\\ &5)\quad \alpha = \gamma\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Поскольку замена $q \leftrightarrow q^{-1}$ переводит случай 4) в случай 1), а случай 3) в 2), то мы ограничимся рассмотрением областей указанных в 1), 2), 5), а для двух остальных приведем только окончательные результаты.

Тип рассматриваемого представления удобно определять по знаку оператора Казимира

$$K := (q^{\alpha} - q^{\gamma})\,\zeta + q^{\beta} I, \tag{3.2}$$

который более естественен, по сравнению с оператором $\widetilde{K} = aa^{\dagger} - q^{\alpha}a^{\dagger}a = q^{\gamma N}K$, предложенным в [16] для базиса $\mathcal{W}^{1}_{-1,0}(q)$. Из (2.2) следует, что $[N, a^{\dagger}a] = 0$. Следовательно, если $N\psi_0 = \nu_0\psi_0$, тогда $a^{\dagger}a\psi_0$ также является собственным вектором для N с тем же самым собственным значением ν_0. Учитывая, что N имеет простой спектр мы получим $a^{\dagger}a\psi_0 = \lambda_0\psi_0$, где $\lambda_0 \ge 0$ так как оператор $a^{\dagger}a$ неотрицательный. Обозначим λ_n, λ_{-m} (μ_n, μ_{-m}) собственные значения оператора $a^{\dagger}a$ ($aa^{\dagger}$), соответствующие собственным векторам $(a^{\dagger})^n\psi_0$, $(a^m\psi_0)$, соответственно. Тогда имеем

$$\begin{aligned} N(a^{\dagger})^n\psi_0 &= (\nu_0 + n)(a^{\dagger})^n\psi_0, &\qquad Na^m\psi_0 &= (\nu_0 - m)a^m\psi_0;\\ (a^{\dagger}a)(a^{\dagger})^n\psi_0 &= \lambda_n(a^{\dagger})^n\psi_0, &\qquad (a^{\dagger}a)a^m\psi_0 &= \lambda_{-m}a^m\psi_0;\\ (aa^{\dagger})(a^{\dagger})^n\psi_0 &= \mu_n(a^{\dagger})^n\psi_0, &\qquad (aa^{\dagger})a^m\psi_0 &= \mu_{-m}a^m\psi_0. \end{aligned}$$

Рассматривая соотношение (2.1) на векторах

$$\psi_n = \begin{cases} (a^{\dagger})^n\psi_0 & \text{для} \quad n \ge 0\\ a^{-n}\psi_0 & \text{для} \quad n < 0 \end{cases}$$

мы получим

$$\mu_n - q^{\gamma}\lambda_n = q^{\alpha(n+\nu_0)+\beta}. \tag{3.3}$$

Но при всех $n \in \mathbb{Z}$, таких что $\psi_n \neq 0$, имеем $\mu_n = \lambda_{n+1}$. Поэтому из (3.3) следует, что рекуррентное соотношение

$$\lambda_{n+1} = q^{\gamma}\lambda_n + q^{\alpha(n+\nu_0)+\beta},$$

имеет решение

$$\lambda_n = q^{\gamma n}\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n). \tag{3.4}$$

Нам нужны только те решения уравнений (3.4), для которых $\lambda_n \geq 0$ (так как оператор $a^{\dagger}a$ неотрицателен). Согласно (2.23) правая часть (3.4) всегда неотрицательна при $n \geq 0$. Однако при $n < 0$ имеем $\lambda_n \geq 0$ только, если

$$\lambda_0 \geq -q^{\alpha\nu_0-\gamma n}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n), \quad n < 0. \tag{3.5}$$

Удобно переписать это неравенство в виде

$$\lambda_0 \geq \begin{cases} q^{\alpha\nu_0+\beta-\alpha}\frac{1-q^{n(\alpha-\gamma)}}{1-q^{\gamma-\alpha}}, & \text{если} \quad \alpha \neq \gamma \\ -nq^{\gamma(\nu_0-1)+\beta}, & \text{если} \quad \alpha = \gamma \end{cases}; \quad (n < 0)$$

Заметим, что если

$$q > 1,\ \alpha \leq \gamma \quad \text{или} \quad 0 < q < 1,\ \alpha \geq \gamma$$

то правая часть (3.5) стремится к $+\infty$ при $n \to -\infty$. Тогда существует $n_0 < 0$ такое, что $\lambda_n \leq 0$, для всех $n < n_0$.

С другой стороны, если

$$q > 1,\ \alpha > \gamma \quad \text{или} \quad 0 < q < 1,\ \alpha < \gamma$$

то неравенство (3.5) выполнено для всех $n < 0$ когда

$$\lambda_0 \geq \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}. \tag{3.6}$$

В случае противоположном к (3.6) существует $n_0 < 0$ такое, что $\lambda_n \leq 0$, для всех $n < n_0$.

Перейдем к рассмотрению неприводимых представлений алгебры $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ в отдельности для каждой из областей изменения параметров, указанных в (3.1).

3.1. Случай 1) $\gamma \geq 0, \quad \alpha < \gamma$. Сперва будем предпологать, что выполнены неравенства

$$(A) \qquad q > 1 \quad \text{или} \quad 0 < q < 1,\ \lambda_0 < \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}. \tag{3.7}$$

Согласно (3.4), если $n \to +\infty$, то

$$\begin{array}{lll}
\lambda_n \to +\infty & \text{если} & \begin{cases} \gamma > 0,\ q > 1, & \text{или} \\ \gamma = 0,\ 0 < q < 1, & \text{или} \\ \gamma > 0,\ \alpha < 0,\ 0 < q < 1; \end{cases} \\
\lambda_n \to 0^+ & \text{если} & \gamma > 0, \quad \alpha > 0 \quad 0 < q < 1; \\
\lambda_n \to \lambda_0 + \dfrac{q^{\alpha\nu_0+\beta}}{1-q^{\alpha}} & \text{если} & \gamma = 0, \qquad q > 1; \\
\lambda_n \to \dfrac{q^{\beta}}{1-q^{\gamma}} & \text{если} & \gamma > 0, \quad \alpha = 0, \quad 0 < q < 1;
\end{array}$$

и если $n \to -\infty$, то

$$\begin{array}{lll}
\lambda_n \to -\infty & \text{если} & \begin{cases} \gamma = 0,\ q > 1, & \text{или} \\ \gamma > 0,\ 0 < q < 1, & \text{или} \\ \gamma > 0,\ \alpha < 0,\ q > 1; \end{cases} \\
\lambda_n \to 0^- & \text{если} & \gamma > 0, \quad \alpha > 0, \quad q > 1; \\
\lambda_n \to \lambda_0 - \dfrac{q^{\alpha\nu_0+\beta}}{q^{\alpha}-1} & \text{если} & \gamma = 0, \quad 0 < q < 1; \\
\lambda_n \to \dfrac{q^{\beta}}{1-q^{\gamma}} & \text{если} & \gamma > 0, \quad \alpha = 0, \quad q > 1.
\end{array}$$

Обозначим n_0 наибольшее целое число для которого в уравнении (3.4) $\lambda_n \leq 0$. В этом случае $\psi_{n_0} = 0$ (так как $a^{\dagger}a \geq 0$). Тогда

$$a\psi_{n_0+1} = \psi_{n_0} = 0, \quad \text{где} \quad \psi_{n_0+1} \neq 0,$$

и вектор ψ_{n_0+1} является общим собственным вектором операторов $a^{\dagger}a$ и N с собственными значениями $\lambda_{n_0+1} = 0$ и $\nu_0' = \nu_0 + n_0 + 1$, соответственно. Более того, выполнено соотношение

$$\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0+\beta}\frac{q^{(n_0+1)(\alpha-\gamma)}-1}{q^{\alpha}-q^{\gamma}} = 0.$$

Осуществив замены

$$\psi_0 \to \psi_{n_0+1}, \qquad \lambda_0 \to 0, \qquad \nu_0 \to \nu_0'$$

и обозначив $|n\rangle := \psi_{n_0+1+n}$, $n = 0, 1, \dots$ $(n \geq 0)$ нормированные собственные состояния мы, повторив описанное выше построение, получим представление $\pi(\nu_0'|\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ алгебры деформированного осциллятора в виде

$$\begin{cases} a^{\dagger}|n\rangle = q^{\alpha\nu_0'/2}\left(F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n+1)\right)^{1/2}|n+1\rangle, & n \geq 0 \\ a|0\rangle = 0, \quad a|n\rangle = q^{\alpha\nu_0'/2}\left(F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n)\right)^{1/2}|n-1\rangle, & n > 0, \\ N|n >= (\nu_0' + n)|n\rangle & n \geq 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Эта серия неприводимых представлений квази-фоковского типа нумеруется вещественным числом ν_0', которое дает нижнюю границу спектра оператора N. При $\nu_0' = 0$ получаем q-представление Фока. Только в этом представлении одновременно с (2.1) выполняется дополнительное соотношение

$$aa^{\dagger} - q^{\alpha}a^{\dagger}a = q^{\gamma N + \beta}. \tag{3.9}$$

Согласно (3.9) для представлений $\pi(\nu_0'|\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ (3.8) оператор Казимира K (3.2) удовлетворяет неравенству

$$K = q^{-\gamma N}\left(F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N+I) - q^{\alpha}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N)\right) = q^{\beta}I > 0,$$

как это и должно быть, так как представление $\pi(\nu_0'|\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ не сингулярно[2].

Заметим также, что в рассматриваемом случае операторы $a^{\dagger}a$, $aa^{\dagger} \in \mathfrak{S}_1$, (т.е. ядерные), если $0 < q < 1$, $0 < \alpha < \gamma$, и если $0 < q < 1$, $0 = \alpha < \gamma$; а если $q > 1$, $\alpha < \gamma = 0$ то они ограничены.

Будем предполагать теперь, что выполнены неравенства

$$(\mathbf{B}) \qquad 0 < q < 1, \quad \lambda_0 > \frac{q^{\alpha(\nu_0 - 1)+\beta}}{1 - q^{\gamma-\alpha}}.$$

[2]Отметим, что критерий предложенный в [16] для случая базиса $\mathcal{W}^{1}_{-1,0}(q)$ может быть распространен на случай произвольного базиса $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ при нашем выборе K.

Рассмотрим сперва случай $\alpha > 0$. Тогда, согласно (3.4), $\lambda_n \to +\infty$ при $|n| \to \infty$. Следовательно, оператор $a^\dagger a$ при некотором значении n_0 имеет наименьшее собственное значение. Это означает, что приведенные выше рассуждения можно повторить, начиная со значений λ_{n_0}, ψ_{n_0} и $\nu_0 + n_0$ вместо λ_0, ψ_0 и ν_0, соответственно. В результате мы снова получим (3.4) с дополнительным условием $\lambda_n \geq \lambda_0$.

При $n > 0$ это неравенство дает $\lambda_0 < q^{\alpha\nu_0}(1-q^{n\gamma})^{-1}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n)$, а для $n < 0$ получаем $\lambda_0 > -q^{\alpha\nu_0}(q^{n\gamma}-1)^{-1}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n)$. Оба неравенства продолжают выполняться (при новых значениях λ_0, ν_0), если

$$-q^{\alpha\nu_0}\frac{F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(-1)}{q^{-\gamma}-1} < \lambda_0 < q^{\alpha\nu_0}\frac{F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(1)}{1-q^{\gamma}}. \tag{3.10}$$

Как и в [21], мы имеем в этом случае двупараметрическое семейство неэквивалентных неприводимых представлений $\pi(\nu_0, \lambda_0|\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta})$. На элементах ортогонального базиса

$$\{|n>=\psi_{n_0+n}|n \in \mathbb{Z}\}$$

элементы базиса $\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$ действуют по формулам

$$\begin{cases} a^\dagger\,|n>=\Big(q^{(n+1)\gamma}\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n+1)\Big)^{1/2}|n+1>, & \\ a\,|n>=\Big(q^{n\gamma}\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(n)\Big)^{1/2}|n-1>, & n \in \mathbb{Z}, \\ N\,|n>=(\nu_0+n)|n>. & \end{cases} \tag{3.11}$$

Неприводимые представления этого семейства $\pi(\nu_0, \lambda_0|\mathcal{W}^{\gamma}_{\alpha,\beta})$ сингулярны и исчезают в классическом пределе $q \to 1$. Для этих представлений[3]

$$K = q^{-\gamma N}\Big[\Big(q^{(N+I)\gamma}\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N+I)\Big) - q^{\alpha}\Big(q^{N\gamma}\lambda_0 + q^{\alpha\nu_0}F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N)\Big)\Big] = (q^{\gamma}-q^{\alpha})\left(\lambda_0 - \frac{q^{\alpha\nu_0+\beta}}{q^{\gamma}-q^{\alpha}}\right) < 0. \tag{3.12}$$

Отметим что сингулярность представления очевидна из того, что неравенства (3.10) становятся противоречивыми в классическом пределе $q \to 1$.

[3]при выводе соотношения (3.12) учтены условия $\lambda_0 > \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$, и $0 < q < 1$, которые означают что $\alpha < \gamma \Rightarrow q^{\alpha} > q^{\gamma}$.

В противоположном случае $\alpha \leq 0$ согласно (3.4) имеем $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to -\infty$ и

$$\lambda_n \to 0^+, \quad \text{если} \quad \alpha < 0; \qquad \lambda_n \to \frac{q^\beta}{1-q^\gamma}, \quad \text{если} \quad \alpha = 0,$$

при $n \to +\infty$. Тогда имеем снова представления $\pi(\nu_0, \lambda_0|\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta})$ (3.11) без ограничения (3.10). Неравенство (3.12) выполняется, так что эти представления тоже сингулярны.

Рассмотрим последний вариант

$$(\mathbf{C}) \qquad 0 < q < 1, \quad \lambda_0 = \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

для которого условие (3.4) дает

$$\lambda_n = \frac{q^{\alpha(\nu_0+n)+\beta}}{q^\alpha - q^\gamma}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Это означает что спектр оператора $a^\dagger a$ неограничен с обеих сторон. В неприводимых представлениях $\pi_S(\nu_0|\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta})$ этого однопараметрического семейства действие генераторов имеет вид

$$\begin{cases} a^\dagger\,|n>= q^{\frac{\alpha\nu_0+\beta+\alpha(n+1)}{2}}\,(q^\alpha - q^\gamma)^{-1/2}\,|n+1>, \\ a\,|n>= q^{\frac{\alpha\nu_0+\beta+\alpha n}{2}}\,(q^\alpha - q^\gamma)^{-1/2}\,|n-1>, \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ N\,|n>=(\nu_0+n)|n>. \end{cases} \tag{3.13}$$

Более того в представлениях $\pi_S(\nu_0|\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta})$ выполняется дополнительное соотношение

$$aa^\dagger - q^\alpha a^\dagger a = 0, \tag{3.14}$$

которое означает, что в таком представлении $K = 0$. Представления $\pi_S(\nu_0|\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta})$ сингулярны и называются странными [или специальными] так как в классическом пределе $q \to 1$ перестановочные соотношения (3.14) и (2.1) становятся противоречивыми.

3.2. Случай $\gamma \geq 0$, $\alpha > \gamma$. Обсудим теперь, вкратце, второй случай из (3.1). Как и выше (см. (3.7)) будем предполагать, что неравенства

$$(\mathbf{A}) \qquad 0 < q < 1 \quad \text{или} \quad q > 1, \quad \lambda_0 < \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

выполнены. По тем же причинам, что и в пункте 3.1 мы имеем несингулярные представления (3.8) с $K > 0$. Отметим, что в этом случае

$$\begin{array}{lll} \lambda_n \to 0^+, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to -\infty, & \text{если} & n \to -\infty \end{array} \text{ для } 0 < q < 1;$$

$$\begin{array}{lll} \lambda_n \to +\infty, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to 0^-, & \text{если} & n \to -\infty \end{array} \text{ для } q > 1.$$

Легко проверить что в случае $0 < q < 1$, операторы $a^\dagger a$ и $aa^\dagger$ ядерны (операторы класса $\mathfrak{S}_1$).

В следующем случае

$$(\mathbf{B}) \qquad q > 1, \quad \lambda_0 > \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

мы имеем представление (3.11). Действие оператора Казимира K на вектор $|n>$ дает

$$K|n>= (q^\alpha - q^\gamma)\Big(\tfrac{q^{\alpha\nu_0+\beta}}{q^\alpha-q^\gamma} - \lambda_0\Big)|n>$$

так что $K < 0$, так как в этом случае $(q^\alpha - q^\gamma) > 0$ и $\Big(\frac{q^{\alpha\nu_0+\beta}}{q^\alpha-q^\gamma} - \lambda_0\Big) < 0$. Таким образом эти представления сингулярны. Имеем

$$\begin{array}{lll} \lambda_n \to +\infty, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to 0^+, & \text{если} & n \to -\infty \end{array} \quad (q > 1).$$

Если учесть условие на λ_0 и заметить, что $\lambda_n \geq 0$ и $F^\gamma_{\alpha,\beta}(n) < 0$ если $n < 0$ то для таких представлений имеем

$$0 \leq \lambda_n \leq \lambda_0 \quad \text{если} \quad n < 0.$$

В последнем из возможных случаев

$$(\mathbf{C}) \qquad q > 1, \quad \lambda_0 = \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

при всех значениях $n \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\lambda_n = \frac{q^{\alpha(\nu_0+n)+\beta}}{q^\alpha - q^\gamma} \geq 0, \tag{3.15}$$

и

$$\begin{array}{lll} \lambda_n \to +\infty, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to 0^+, & \text{если} & n \to -\infty \end{array} \quad (q > 1).$$

Как и в случае 3.1 мы получаем представления специального типа (3.13) для которых $K = 0$, так что эти представления сингулярны и дополнительное соотношение (3.14) также выполнено. В представлениях этого типа оператор $a^\dagger a$ не имеет минимального собственного значения.

3.3. Случай $\gamma \le 0, \quad \alpha < \gamma$**.** Сперва будем предполагать, что выполнены неравенства

$$(\mathbf{A}) \qquad q > 1 \quad \text{или} \quad 0 < q < 1,\ \lambda_0 < \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}.$$

В этом случае $K > 0$ и мы имеем несингулярные представления (3.8). В этих представлениях имеем

$$\begin{matrix} \lambda_n \to 0^+, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to -\infty, & \text{если} & n \to -\infty \end{matrix} \quad \text{для} \quad q > 1;$$

$$\begin{matrix} \lambda_n \to +\infty, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to 0^-, & \text{если} & n \to -\infty \end{matrix} \quad \text{для} \quad 0 < q < 1.$$

Как и в случае 3.2 (A) (но теперь при $q > 1$) операторы $a^\dagger a$ и $aa^\dagger$ ядерные (класса $\mathfrak{S}_1$).

Если выполнены неравенства

$$(\mathbf{B}) \qquad 0 < q < 1, \qquad \lambda_0 > \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

то $K < 0$, представления имеют вид (3.11) и сингулярны.

В третьем возможном случае, предполагается что выполнены неравенства

$$(\mathbf{C}) \qquad 0 < q < 1, \qquad \lambda_0 = \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}.$$

Тогда неравенство (3.15) справедливо при всех $n \in \mathbb{Z}$. В этом случае $K = 0$, представления сингулярны и имеют вид (3.13). Дополнительное соотношение (3.14) также выполнено. Операторы $a^\dagger a$ не имеют минимального собственного значения и

$$\begin{matrix} \lambda_n \to +\infty, & \text{если} & n \to +\infty \\ \lambda_n \to 0^+, & \text{если} & n \to -\infty \end{matrix} \quad (0 < q < 1).$$

3.4. Случай $\gamma \leq 0, \quad \alpha > \gamma$..

$$(\mathbf{A}) \qquad 0 < q < 1 \quad \text{или} \quad q > 1,\ \lambda_0 < \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}.$$

В этом случае $K > 0$ и мы имеем несингулярные представления (3.8). Отметим, что теперь

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \to +\infty, && \text{если } n \to +\infty \text{ для } \begin{cases} 0 < q < 1, & \text{или} \\ q > 1 & \text{и } \alpha > 0; \end{cases} \\
&\lambda_n \to 0^+, && \text{если } n \to +\infty \text{ для } q > 1 \text{ или } \alpha < 0; \\
&\lambda_n \to q^{\alpha\nu_0+\beta}, && \text{если } n \to +\infty \text{ для } q > 1 \text{ и } \alpha = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_n \to 0^-, && \text{если } n \to +\infty \text{ для } 0 < q < 1 \text{ и } \alpha < 0; \\
&\lambda_n \to -\infty, && \text{если } n \to -\infty \text{ для } \begin{cases} 0 < q < 1, & \text{и } \alpha > 0, \\ \text{или} & q > 1; \end{cases} \\
&\lambda_n \to -q^{\alpha\nu_0+\beta}, && \text{если } n \to -\infty \text{ для } 0 < q < 1 \text{ и } \alpha = 0;
\end{aligned}$$

Итак, если $q > 1$ и $\alpha < 0$, то операторы $a^\dagger a$ и $aa^\dagger$ ядерны (класса $\mathfrak{S}_1$), и для $q > 1$ и $\alpha = 0$ эти операторы ограничены.

Случаи

$$(\mathbf{B}) \qquad q > 1, \quad \lambda_0 > \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}$$

и

$$(\mathbf{C}) \qquad q > 1, \quad \lambda_0 = \frac{q^{\alpha(\nu_0-1)+\beta}}{1-q^{\gamma-\alpha}}.$$

полностью аналогичны случаям 3.1 (B) и 3.1 (C).

3.5. $\alpha = \gamma$.

Для всех значений $0 < q < \infty$ имеем только несингулярные представления типа (3.8) с $K>0$. В этих представлениях

$$\lambda_n \to 0^+, \quad \text{если } n\to+\infty \text{ для } \begin{cases} 0<q<1, \ \gamma>0, \text{ или} \\ q>1, \ \gamma<0; \end{cases}$$
$$\lambda_n \to +\infty, \ \text{если } n\to+\infty \text{ для } \begin{cases} q>1, \ \gamma>0, \text{ или} \\ 0<q<1, \ \gamma\le 0; \end{cases}$$

$$\lambda_n \to -\infty, \ \text{если } n\to-\infty \text{ для } \begin{cases} 0<q<1, \ \gamma>0, \text{ или} \\ q>1, \ \gamma\le 0; \end{cases}$$
$$\lambda_n \to 0^-, \quad \text{если } n\to-\infty \text{ для } \begin{cases} q>1, \ \gamma>0, \text{ или} \\ 0<q<1, \ \gamma<0 \end{cases}$$

Таким образом в случаях $0<q<1, \gamma>0$ или $q>1, \gamma<0$ мы имеем ядерные (класса $\mathfrak{S}_1$) операторы $a^\dagger a$ и $a\,a^\dagger$.

Замечания. 1. Отметим изменение спектральных свойств операторов $a^\dagger a$ (и $a\,a^\dagger$) для некоторых конкретных выборов базисов $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$, алгебры деформированного осциллятора указанных в параграфе 2, при переходе значения параметра деформации q классической точки $q=1$.

В случае $\mathcal{W}^1_{1,0}(q)$ операторы $a^\dagger a$, $a\,a^\dagger$ ядерны (т.е. класса $\mathfrak{S}_1$), если $0<q<1$ (см. случай 3.5). Однако, при $q\ge 1$ собственные значения λ_n оператора $a^\dagger a$ стремятся к бесконечности ($\lambda_n\to+\infty$) при $n\to+\infty$. То же верно для оператора $a\,a^\dagger$ ($\mu_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$).

Для базиса $\mathcal{W}^1_{0,0}(q)$ при $0<q<1$ и $\lambda_0<\frac{1}{1-q}$ (см. случай (A) в пункте 3.1) операторы $a^\dagger a$ и $a\,a^\dagger$ ограничены и их норма растет как $(1-q)^{-1}$ при $q\to 1^-$. При $q\ge 1$ имеем $\lambda_n\to+\infty$ и $\mu_n\to+\infty$, если $n\to+\infty$.

При выборе базиса $\mathcal{W}^1_{-1,0}(q)$ качественные изменения спектральных свойств операторов $a^\dagger a$ (и $a\,a^\dagger$) при переходе через точку $q=1$ отсутствуют.

В базисе $\mathcal{W}^0_{-2,0}(q)$ рассматриваемые операторы ограничены при $q>1$ и их норма растет как $(q-1)^{-1}$ при $q\to 1^+$ и если $0<q<1$ и $\lambda_0<\frac{q^{-2(\nu_0-1)}}{1-q}$, то $\lambda_n\to+\infty$ и $\mu_n\to+\infty$ при $n\to+\infty$.

Указанные особенности в спектральных свойствах могут оказаться полезными при попытках рассмотрения конкретных физических моделей.

2. Как уже отмечалось выше, некоторые авторы требуют одновременно с выполнением основных соотношений

$$a\,a^\dagger - q^\gamma a^\dagger\,a = q^{\alpha N+\beta} \tag{3.16}$$

выполнения дополнительных соотношений имеющих в общем случае вид

$$a\,a^\dagger - q^{\widetilde{\gamma}} a^\dagger\,a = q^{\widetilde{\alpha} N+\widetilde{\beta}}. \tag{3.17}$$

Поскольку из равенства $\gamma = \widetilde{\gamma}$, следует $\alpha = \widetilde{\alpha}$, то мы можем без потери общности ограничиться в дальнейшем рассмотрением случая $\gamma \neq \widetilde{\gamma}$.

Если оба соотношения (3.16) и (3.17) выполнены, то

$$a^\dagger a = (q^{-\gamma} - q^{-\widetilde{\gamma}})^{-1}(q^{\alpha N+\beta-\gamma-\widetilde{\gamma}} - q^{\widetilde{\alpha}N+\widetilde{\beta}-\gamma-\widetilde{\gamma}})$$
$$aa^\dagger = (q^{-\gamma} - q^{-\widetilde{\gamma}})^{-1}(q^{\alpha N+\beta-\gamma} - q^{\widetilde{\alpha}N+\widetilde{\beta}-\widetilde{\gamma}})$$

и

$$K = q^{-\gamma N}(aa^\dagger - q^\alpha a^\dagger a) =$$
$$q^{-\gamma N}(q^{-\gamma} - q^{-\widetilde{\gamma}})^{-1}\big(q^{\alpha N+\beta-\gamma}(1-q^{\alpha-\widetilde{\gamma}}) - q^{\widetilde{\alpha}N+\widetilde{\beta}-\widetilde{\gamma}}(1-q^{\alpha-\gamma})\big).$$

Тогда можно показать что несингулярные представления имеются только в двух случаях:

1) Случай симметричный относительно замены $q \leftrightarrow q^{-1}$ при которой соотношение (3.17) получается из (3.16) (так что $\alpha = -\widetilde{\alpha}$, $\gamma = -\widetilde{\gamma}$ и $\beta = -\widetilde{\beta}$).

2) Случай, когда соотношение (3.17) получается из (3.16) заменой $\alpha \leftrightarrow \gamma$ ($\alpha = \widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\alpha} = \gamma$).

В остальных случаях (когда $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$, $\gamma \neq \widetilde{\gamma}$) представления алгебры в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ в которых справедливо соотношение (3.17) отсутствуют.

4. Структура алгебры Хопфа

Несложно показать, что для алгебры деформированного осциллятора $\mathcal{A}(q)$ в базисе $\mathcal{W}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ при $\alpha \neq \gamma$ структуру биалгебры (и тем более алгебры Хопфа) ввести невозможно. Действительно, предположим, что наряду с алгебраической структурой, определяемой соотношениями (2.1) и (2.2) в $\mathcal{A}(q)$ заданы копроизведение Δ: $\mathcal{A}(q) \to \mathcal{A}(q) \otimes \mathcal{A}(q)$ и коединица ϵ: $\mathcal{A}(q) \to \mathcal{C}$. Обозначим

$\epsilon(a) = \epsilon_-$, $\epsilon(a^\dagger) = \epsilon_+$ и $\epsilon(N) = \epsilon_0$. Тогда, так как $q \neq 1$ и $\epsilon_0 \neq \infty$, из соотношений (2.1) и (2.2) получим

$$\epsilon_+ = \epsilon_- = 0 \Rightarrow \epsilon_-\epsilon_+ = 0,$$

$$\epsilon_+\epsilon_-(1 - q^\gamma) = q^{\alpha\epsilon_0+\beta} \Rightarrow \epsilon_-\epsilon_+ = \frac{q^{\alpha\epsilon_0+\beta}}{1-q} \neq 0.$$

Так как эти соотношения противоречивы, то наше предположение о существовании Δ и ϵ, а значит структуры биалгебры на $\mathcal{A}(q)$ неверно.

Однако, известно, что при некоторых (существенных) модификациях алгебры $\mathcal{A}(q)$ структура алгебры Хопфа может быть введена (см. например [27]). В этом параграфе мы опишем три примера модифицированных алгебр допускающих структуру алгебры Хопфа.

1). Из соотношения

$$a\,a^\dagger - q^\gamma a^\dagger\, a = q^{\alpha N+\beta} \qquad \alpha \neq 0,\ \gamma \neq 0, \tag{4.1}$$

и его $q \leftrightarrow q^{-1}$ партнера

$$a\,a^\dagger - q^{-\gamma} a^\dagger\, a = q^{-\alpha N-\beta}.$$

получаем

$$a\,a^\dagger = F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma} + 1; q^{-\gamma});$$
$$a^\dagger\, a = F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma}; q^{-\gamma}).$$

и

$$[a, a^\dagger] = F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma} + 1; q^{-\gamma}) - F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma}; q^{-\gamma}).$$

Рассмотрим алгебру $\widehat{\mathcal{W}}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$, определяемую этим соотношением и (2.2). Применяя ту же аргументацию, что и выше, можно показать что алгебра $\widehat{\mathcal{W}}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ имеет только несингулярные представления. Тогда копроизведение Δ, коединица ε и антипод S в $\widehat{\mathcal{W}}^\gamma_{\alpha,\beta}(q)$ можно определить формулами

$$\begin{gathered}\Delta(a^\dagger) = c_1 a^\dagger \otimes q^{\alpha_1 N} + c_2 q^{\alpha_2 N} \otimes a^\dagger;\\ \Delta(a) = c_3 a \otimes q^{\alpha_3 N} + c_4 q^{\alpha_4 N} \otimes a;\\ \Delta(N) = c_5 N \otimes \mathbf{1} + c_6 \mathbf{1} \otimes N + \gamma_1 \mathbf{1} \otimes 1; \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes 1;\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\varepsilon(a^\dagger) = c_7; \quad \varepsilon(a) = c_8; \quad \varepsilon(N) = c_9; \quad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1;$$
$$S(a^\dagger) = -c_{10} a^\dagger; \quad S(a) = -c_{11} a; \quad S(N) = -c_{12} N + c_{13}\mathbf{1}; \quad S(\mathbf{1}) = 1;$$

Постоянные c_i, α_k и γ_1 легко находятся из условий согласования

$$\begin{gathered}(\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(h) = (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta(h),\\ (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta(h) = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = h,\\ m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta(h) = m(S \otimes \mathrm{id})\Delta(h) = \varepsilon(h)\mathbf{1},\end{gathered} \tag{4.3}$$

для всех $h \in \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ рассматриваемая алгебра Хопфа а $m : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes H$ – умножение в $\mathcal{H}$. Из (4.2), (4.3) и (2.2) получаем

$$\begin{gathered} c_1 = q^{\alpha_1 \gamma_1}; \quad c_2 = q^{\alpha_2 \gamma_1}; \quad c_3 = q^{\alpha_3 \gamma_1}; \quad c_4 = q^{\alpha_4 \gamma_1};\\ c_5 = c_6 = 1; \quad c_7 = c_8 = 0; \quad c_9 = -\gamma_1; \quad c_{10} = q^{\alpha_1};\\ c_{11} = q^{-\alpha_3}; \quad c_{12} = 1; \quad c_{13} = -2\gamma_1; \quad \alpha_2 = -\alpha_1; \quad \alpha_4 = -\alpha_3.\end{gathered}$$

Более того Δ и ε являются гомоморфизмами а S антигомоморфизмом. В частности из условия

$$\Delta(a)\Delta(a^\dagger) - \Delta(a^\dagger)\Delta(a) =$$

$$= \Delta\big(F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma} + 1; q^{-\gamma}) - F^1_{-1,0}(-\frac{\alpha}{\gamma}N - \frac{\beta}{\gamma}; q^{-\gamma})\big).$$

следует

$$q^{\alpha_1} = q^{\alpha_3}; \qquad \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha; \qquad q^{2\alpha\gamma_1} = -q^{2\beta-\gamma}. \tag{4.4}$$

Для вещественных q (4.4) это означает

$$\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{\alpha}{2}; \qquad \gamma_1 = \frac{2\beta - \gamma}{2\alpha} - i\frac{(2k+1)\pi}{2\alpha \ln q},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{4.5}$$

что фиксирует все постоянные в (4.2). Таким образом имеем следующее определение структуры алгебры Хопфа в рассматриваемом случае

$$\Delta(a^\dagger) = a^\dagger \otimes q^{\alpha(N+\gamma_1)/2} + q^{-\alpha(N+\gamma_1)/2} \otimes a^\dagger;$$
$$\Delta(a) = a \otimes q^{\alpha(N+\gamma_1)/2} + q^{-\alpha(N+\gamma_1)/2} \otimes a;$$

$$\Delta(N) = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N + \gamma_1 \mathbf{1} \otimes 1; \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes 1;$$
$$\varepsilon(a^\dagger) = 0 = \varepsilon(a); \quad \varepsilon(N) = -\gamma_1; \quad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1;$$
$$S(a^\dagger) = -q^{\alpha/2} a^\dagger; \quad S(a) = -q^{-\alpha/2} a; \quad S(N) = -N - 2\gamma_1 \mathbf{1}; \quad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}; \tag{4.6}$$

2). Рассмотрим модифицированную алгебру $\widetilde{\mathcal{W}}^{\gamma}_{-\gamma,\,\beta}(q)$ порождаемую соотношениями (2.2) и

$$[a, a^\dagger] = F^{\gamma}_{-\gamma,\beta}(N+1; q) - F^{\gamma}_{-\gamma,\beta}(N; q). \tag{4.7}$$

Повторяя вычисления мы получим соотношения (4.6) с α замененной на $(-\gamma)$ и $\gamma_1 = \frac{1}{2} + i\frac{(2k+1)\pi}{2\gamma \ln q}$, $k \in \mathbb{Z}$. Отметим, что соотношения (4.7) следуют из пары соотношений коммутации

$$aa^\dagger - q^{\gamma} a^\dagger a = q^{-\gamma N + \beta}, \quad aa^\dagger - q^{-\gamma} a^\dagger a = q^{\gamma N + \beta}$$

и не обязаны выполняться в исходной (не модифицированной алгебре).

3) Существует еще один способ введения структуры алгебры Хопфа в алгебре деформированного осциллятора. Именно можно рассмотретьдополнительное соотношение

$$aa^\dagger - q^{\alpha} a^\dagger a = q^{\gamma N + \beta}, \qquad \alpha \neq \gamma,$$

наряду с (4.1). Из этих двух соотношений следует, что

$$[a, a^\dagger] = F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N+1; q) - F^{\gamma}_{\alpha,\beta}(N; q), \qquad \alpha \neq \gamma. \tag{4.8}$$

Отметим, что при $\alpha = -\gamma$ из (4.8) следует соотношение (4.7).

Легко проверить, что алгебра определяемая соотношениями (4.8) и (2.2) имеет только несингулярные представления для $\alpha\gamma < 0$. Однако для получения достаточно простой структуры алгебры Хопфа удобно рассмотреть несколько модифицированный вариант соотношения (4.8). Именно, определим

$$q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}} aa^\dagger - q^{\frac{\alpha+\gamma}{4}} a^\dagger a = F^{\gamma}_{\alpha,\beta - \frac{\alpha+\gamma}{4}}(N + I; q) - F^{\gamma}_{\alpha,\beta + \frac{\alpha+\gamma}{4}}(N; q), \quad \alpha \neq \gamma. \tag{4.9}$$

Равенство (4.9) можно получить следующим образом. Введем операторы

$$b = q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N} a, \qquad b^{+} = q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N} a^{\dagger}.$$

Тогда соотношения (4.8) и (2.2) можно записать в виде

$$\begin{gathered} bb^{+} - q^{-\frac{\alpha-\gamma}{4}} bb^{+} = q^{\frac{\alpha-\gamma}{4}N+\beta'}, \\ [N, b] = -b, \quad [N, b^{+}] = b^{+}, \quad \beta' = \beta - \tfrac{\alpha+\gamma}{4}. \end{gathered}$$

Из этого соотношения и его партнера получаем

$$[b, b^{+}] = F^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}}_{\frac{\alpha-\gamma}{2},\beta'}(N+I; q) - F^{-\frac{\alpha-\gamma}{2}}_{\frac{\alpha-\gamma}{2},\beta'}(N; q). \tag{4.10}$$

Возвращаясь к генераторам a и $a^{\dagger}$ мы получим (4.9).

Алгебру $\widetilde{\mathcal{W}}^{\gamma}_{\alpha,\beta}(q)$, определяемую равенствами (4.9) и (2.2) можно снабдить структурой алгебры Хопфа положив

$$\begin{gathered} \Delta(a^{\dagger}) = a^{\dagger} \otimes q^{\frac{\alpha(N+\gamma_1)}{2}} + q^{\frac{\gamma(N+\gamma_1)}{2}} \otimes a^{\dagger}, \\ \Delta(a) = a \otimes q^{\frac{\alpha(N+\gamma_1)}{2}} + q^{\frac{\gamma(N+\gamma_1)}{2}} \otimes a, \\ \Delta(N) = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N + \gamma_1 \mathbf{1} \otimes 1; \qquad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes 1; \end{gathered}$$

$$\varepsilon(a^{\dagger}) = \varepsilon(a) = 0; \quad \varepsilon(N) = -\gamma_1; \quad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1;$$

$$\begin{gathered} S(a) = -q^{-\frac{\alpha-\gamma}{4} - \gamma_1\frac{\alpha+\gamma}{2}} q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N} a q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N}, \\ S(a^{\dagger}) = -q^{\frac{\alpha-\gamma}{4} - \gamma_1\frac{\alpha+\gamma}{2}} q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N} a^{\dagger} q^{-\frac{\alpha+\gamma}{4}N}, \\ S(N) = -N - 2\gamma_1 \mathbf{1}; \qquad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1}; \end{gathered}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} - i\frac{(2k+1)\pi}{(\alpha-\gamma)\ln q}.$$

Все аксиомы алгебры Хопфа выполнены при таких определениях.

Замечание. Подчеркнем, что все структуры алгебры Хопфа введенные выше на модифицированной алгебре деформированного осциллятора "сингулярны" в том смысле, что они не выдерживают переход к классическому пределу снятия деформации $q \to 1$. Действительно из (4.5) следует, что $\mathrm{Im}\gamma_1 \to \infty$ при $q \to 1$. Это объясняется тем, что недеформированная алгебра порождаемая соотношениями

$$[a, a^\dagger] = 1, \qquad [N, a] = -a, \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger,$$

не имеет структуры алгебры Хопфа и для ее получения даже на классическом уровне следует рассмотреть несколько более общие соотношения

$$[a, a^\dagger] = E, \qquad [N, a] = -a, \qquad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \qquad [E, all] = 0, \tag{4.11}$$

где E – элемент центра. В этом случае структура алгебры Хопфа определяется стандартно

$$\begin{gathered}
\Delta(a^\dagger) = a^\dagger \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a^\dagger; \quad \Delta(a) = a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a;\\
\Delta(N) = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N; \quad \Delta(E) = E \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes E; \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes 1;\\
\varepsilon(a^\dagger) = \varepsilon(a) = \varepsilon(N) = \varepsilon(E) = 0; \quad \varepsilon(\mathbf{1}) = \mathbf{1};\\
S(a^\dagger) = -a^\dagger; \quad S(a) = -a; \quad S(N) = -N; \quad S(E) = -E; \quad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1};
\end{gathered} \tag{4.12}$$

4) Как следует из результатов пункта 3.5 алгебра $\mathcal{W}^\alpha_{\alpha,\beta}(q)$, имеет только несингулярные представления и следует ожидать, что структура алгебры Хопфа может быть введена. Как и в классическом случае ($q = 1$) рассмотренном в последнем замечании ситуация может быть улучшена при небольшой модификации исходных соотношений коммутации в соответствии с

$$aa^\dagger - q^\alpha a^\dagger a = q^{\alpha N} E, \quad [N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [E, all] = 0.$$

Для получения структуры алгебры Хопфа в этой модифицированной алгебре деформированного осциллятора, определим операторы

$$b^+ = q^{-s\,(N-1)} a^\dagger, \qquad b = q^{-r\,N} a, \qquad r + s = \alpha.$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям идентичным (4.11), а структура алгебры Хопфа определяется операциями подобными (4.12). Имеем $(r + s = \alpha)$:

$$\begin{gathered}
\Delta(a) = \Delta(q^{r\,N})\Delta(b) = (q^{r\,N} \otimes q^{r\,N})(b \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes b) =\\
= q^{r\,N} b \otimes q^{r\,N} + q^{r\,N} \otimes q^{r\,N} b = a \otimes q^{r\,N} + q^{r\,N} \otimes a;\\
\Delta(a^\dagger) = a^\dagger \otimes q^{s\,N} + q^{s\,N} \otimes a^\dagger;\\
\Delta(N) = N \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes N; \quad \Delta(E) = E \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes E; \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes 1;
\end{gathered}$$

$$\varepsilon(a^\dagger) = \varepsilon(a) = \varepsilon(N) = \varepsilon(E) = 0; \quad \varepsilon(\mathbf{1}) = 1;$$
$$S(a^\dagger) = -q^{-s\,N} a^\dagger q^{-s\,N}; \quad S(a) = -q^{-r\,N} a q^{-rN};$$
$$S(N) = -N; \quad S(E) = -E; \quad S(\mathbf{1}) = \mathbf{1};$$

5. Заключительные замечания

Хотя рассмотрение универсальной $\mathcal{R}$-матрицы выходит за рамки нашего изложения отметим, что во всех, описанных выше, вариантах алгебры Хопфа для деформированного осциллятора $\mathcal{R}$ может быть определена более или менее стандартным образом. Следовательно все рассмотренные выше алгебры Хопфа квазитреугольны. В качестве простой иллюстрации приведем пример универсальной $\mathcal{R}$-матрицы для алгебры Хопфа $\widetilde{\mathcal{W}}^{\gamma}_{-\gamma,\beta}(q)$:

$$\mathcal{R} = q^{-\gamma[N\otimes N+\gamma_1\Delta(N)]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i)^n(1+q^\gamma)^n}{[n]_{q^{\gamma/2}}!} q^{-\gamma\frac{n(n+1)}{4}-n\beta} (a^\dagger)^n q^{-\gamma\frac{nN}{2}} \otimes q^{\gamma\frac{nN}{2}} a^n, \tag{5.1}$$

где $\gamma_1 = \frac{1}{2} + i\frac{(2k+1)\pi}{2\gamma\ln q}$. Если в этом выражении положить $\gamma = -1, \beta = 0$ мы получим универсальную $\mathcal{R}$-матрицу из работы [3] (см. также более ранний результат [22]).

Благодарности. Авторы признательны П. П. Кулишу и В. Д. Ляховскому за неоднократные обсуждение ряда вопросов относящихся к теме настоящей работы. В. В. Борзов благодарит за гостеприимство сотрудников Стокгольмского Королевского Технологического Института.

Данная работа выполнялась при поддержке РФФИ (грант No. 95-01-00569-а).

Литература

1. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, — Зап. Науч. Семин. ЛОМИ **189** (1991), 39–74.
2. W.-S. Chung, K.-S. Chung, S.-T. Nam, C.-I. Um, — Phys. Lett. A **183,** No. 5/6 (1993), 363–370.
3. L. Pitner, P. Uray, — J. Math. Phys. **36,** No. 2 (1995), 944–966.
4. A. A. Andrianov, F. Cannata, J.-P. Dedonder, M. V. Ioffe, — Phys. Lett. A. **217,** No. 1 (1996), 7–14.
5. P. P. Kulish, *Quantum algebras, q-deformed oscillators and related topics. In: Quantum group and quantum integrable systems.* Nankai Lectures on Mathematical Physics, Ge M-L ed., World Scientific 1992; pp. 99–131 , 1991.

6. E. Celeghini, R. Giachetti, E. Sorace, M. Tarlini, — Lect. Notes in Math. **1510** (1992), 221–244.
7. V. V. Borsov, E. V. Damaskinsky, S. B. Yegorov, q-alg/9509022, — Preprint TRITA-MAT-95-MA-20 (September 1995).
8. M. Arik, D. D. Coon, — J. Math. Phys. **17,** No. 4 (1976), 524–527.
9. В. В. Курышкин, — Деп. ВИНИТИ 3937-76 (1976).
10. L. C. Biedenharn, — J. Phys. A. **22,** No. 18L (1989), 873–878.
11. A. J. Macfarlane, — J. Phys. A. **22,** No. 21 (1989), 4581–4588.
12. J. Cigler, — Mn. Math. **88,** No. 1 (1979), 87–105.
13. П. П. Кулиш, — ТМФ **86,** Но. 1 (1991), 158–160.
14. W. Pusz, S. L. Woronowicz, — Repts. Math. Phys. **27,** No. 2 (1992), 231–257.
15. W. Pusz, — Repts. Math. Phys. **27,** No. 3 (1992), 349–360.
16. M. Chaichian, H. Grosse, P. Prešnajder, — J. Phys. A. **27,** No. 6 (1994), 2045–2051.
17. M. Chaichian, R. Gonzales Felipe, P. Prešnajder, — J. Phys. A. **28,** No. 8 (1995), 2247–2253.
18. R. Jagannathan, R. Sridhar, R. Vasudevan S. Chaturvedi, M. Krishnakumari, P. Shanta, V. Srinivasan,, — J. Phys. A. **25,** No. 23 (1992), 6429–6453.
19. J. Schwinger, *Angular momentum.* — Report NYO-3071, U. S. Atomic Energy Commission, Oak Ridge, 1952 (unpubl),.
20. P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, — J. Phys. A. **23,** No. 9L (1990), 415–419.
21. G. Rideau, — Lett. Math. Phys. **24** (1992), 147–153.
22. H. Yan, — J. Phys. A. **23,** No. 22L (1990), 1155–1160.
23. Ph. Feinsilver, — Rocky Mountain J. Math. **12,** No. 1 (1982), 171–183.
24. Ph. Feinsilver, — Mn. Math. **104,** No. 2 (1987), 89–108.
25. M. Chaichian, P. P. Kulish, — Phys. Lett. B **234,** No. 1 (1990), 72–80.
26. M. Chaichian, P. P. Kulish, Proc. 14th Johns Hopkins 1990 Workshop on Current Problems in Particle Theory, Debrecen, Ed. Domokos G., e.a., Singapure World Scientific 1991; Physics, Ge M-L ed., World Scientific 1992;, — Preprint CERN-TH 5969/90.
27. C. H. Oh, K. Singh, — J. Phys. A. **27,** No. 17 (1994), 5907–5918.

Borzov V.V., Damaskinsky E.V., Yegorov S.B. Representations of the deformed oscillator algebra under different choices of generators.

We discuss from unique position different variants of the commutation relations of the algebra of the q-deformed boson oscillator related to the different choices of generators. We consider the generalised form of the commutation relations which include as particular cases all of the most popular variants of such relations. By more or less standard way we describe the methods of construction and classification of the representations of the q-deformed oscillator algebra under different choices of generators. We also discuss the possibility of introduction the Hopf algebra structure in this algebra. The possibility of construction of the universal $\mathcal{R}$-matrix for considered algebra are also briefly discussed.

С.-Петербургский Университет Телекоммуникаций

Военный Инженерный Строительный Институт

С.-Петербургский Технический Университет

Поступило 8 октября 1996 г.