А. И. Виноградов

БИНАРНЫЕ ЗАДАЧИ. СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД

К 60-летию решения тернарной проблемы Гольдбаха [1]

1. Введение

В 1937 году Иван Матвеевич Виноградов решил тернарную проблему Гольдбаха [1] – нашел асимптотику числа решений линейного уравнения в простых числах вида

$$P_1 + P_2 + P_3 = 2N + 1 \tag{0.1}$$

для любого целого $N \geqslant N_0$.

В этой работе мы получим аналогичный результат для бинарного уравнения Гольдбаха:

$$P_1 + P_2 = 2N \tag{0.2}$$

При переводе уравнений (0.1) и (0.2) на язык кругового метода видно, что этот метод не берет бинарную проблему (0.2) потому, что она не имеет третьей, понижающей суммы на малых дугах в отличии от тернарной проблемы (0.1).

В этой работе получено решение бинарного уравнения (0.2) с помощью спектрального подхода, где отсутствует само понятие понижающей суммы. Этот подход переводит бинарное уравнение (0.2) на язык распределения простых чисел в квадратичных полиномах

$$f(x) = ax^2 + bx + c \tag{0.3}$$

где $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Все полиномы (0.3) распадаются на два класса

1) не разложимые над Q;

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-00679) и международного фонда Сороса грант No. R2V000, С.-Петербург, Россия

2) разложимые над Q:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta), \quad \alpha, \beta \in Q.$$

Классическим представителем полиномов первого класса является полином

$$f_1(x) = x^2 + 1$$

для которого известна проблема распределения простых вида

$$p = x^2 + 1 \tag{0.4}$$

Классическим представителем полиномов второго класса является полином

$$f_2(x) = x^2 - 1,$$

для которого известна проблема распределения двоек простых вида

$$p_1 \cdot p_2 = x^2 - 1. \tag{0.5}$$

Из разложимости этого полинома

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

сразу следует, что распределение двоек простых (0.5) эквивалентно проблеме "близнецов", т.к. из уравнения (0.5) следуют равенства

$$p_1 = x - 1$$
$$p_2 = x + 1,$$

которые приводят к уравнению "близнецов" после исключения переменной x:

$$p_2 - p_1 = 2. \tag{0.6}$$

Точно так же из разложимости полинома

$$N^2 - x^2 = (N-x)(N+x)$$

следует, что распределение двоек простых в этом полиноме

$$p_1 p_2 = N^2 - x^2 \tag{0.7}$$

эквивалентно решению бинарного уравнения Гольдбаха (0.2).

Сравнивая уравнения (0.4), (0.5) и (0.7), мы видим, что распределение простых в квадратичных полиномах и классические бинарные проблемы – родственные задачи. Только в первом случае речь идет о не разложимых полиномах над Q, а во втором – о разложимых.

Продолжая эти рассуждения, можно получить аналогичное родство между произвольными сгустками простых и распределением простых и почти-простых в полиномах произвольной степени.

Чтобы перевести формулировки этих задач на спектральный язык, воспользуемся решетной леммой:

Лемма 1.0. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$ *и*

$$n = P_1^{\alpha_1} \dots P_\nu^{\alpha_\nu} -$$

– каноническое разложение числа n на простые множители, где $\nu = \omega(n)$ *– число различных простых делителей n.*

Тогда для любого положительного параметра $Y \geqslant 1$ *и целого* $k \geqslant 1$ *справедливо разрывное равенство Решета:*

$$\sum_{D/n} \mu(D) \log^k \left(\frac{Y}{D}\right) = \begin{cases} k! \cdot \prod\limits_{P/n} \log P, & \nu = k \\ 0, & \nu > k \end{cases} \tag{0.8}$$

Доказательство. Рассмотрим конечное Эйлеровское равенство:

$$Y^s \prod_{P/n} \left(1 - \frac{1}{P^s}\right) = \sum_{D/n} \mu(D) \left(\frac{Y}{D}\right)^s .$$

Дифференцируя его k раз по s и полагая затем $s = 0$, получаем равенство (0.8). Равенства (0.8) можно продолжить и на случаи $\nu \leqslant k - 1$, но они нам не потребуются в дальнейшем. Отметим, что равенство (0.8) является традиционным для случая $Y = 1$. Мы ввели произвольный параметр $Y \geqslant 1$ для того, чтобы можно было воспользоваться в дальнейшем разрывным интегральным оператором:

$$\frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\operatorname{Re} s > 0} \left(\frac{Y}{D}\right)^s \frac{ds}{s^{k+1}} = \begin{cases} \log^k \left(\frac{Y}{D}\right), & D \leqslant Y \\ 0, & D \geqslant Y \end{cases} \tag{0.9}$$

Если воспользоваться Леммой 1.0 для $k = 1$, тогда получается обобщение ψ-функции Чебышева на случай простых вида (0.4):

$$\psi_1(N) = \sum_{1 \leqslant x \leqslant N} \Lambda(x^2 + 1) = \sum_{x=1}^{N} \sum_{D/x^2+1} \mu(D) \log \left(\frac{Y}{D}\right) \tag{0.10}$$

где Λ – функция Мангольдта, $N \to \infty$ растущий целочисленный параметр.

Для суммы (0.10) мы получим ожидаемую асимптотику:

$$\psi_1(N) \sim c(f_1)N \tag{0.11}$$

где

$$c(f_1) = \prod_{P\equiv 3(4)} \left(1 - \frac{2}{P(P-1)}\right) \Big/ L(1, \chi_4).$$

В случае $k = 2$ получается обобщение ψ-функции Чебышева на простые "близнецы" (0.5):

$$\psi_2(N) = 2 \sum_{n_2 - n_1 = 2,\, n_1 \leqslant N} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2) =$$

$$= \sum_{2 \leqslant x \leqslant N} \sum_{D / x^2 - 1} \mu(D) \log^2 \left(\frac{Y}{D}\right) \tag{0.12}$$

Для этой суммы так же справедлива ожидаемая асимптотика:

$$\psi_2(N) \sim c(f_2)N \tag{0.13}$$

где

$$c(f_2) = 2 \prod_{P \neq 2} \left(1 - \frac{1}{(P-1)^2}\right).$$

Точно так же получается аналог суммы (0.12) для бинарного уравнения Гольдбаха (0.2):

$$G(N) = 2 \sum_{2N = n_1 + n_2} \Lambda(n_1)\Lambda(n_2) =$$

$$= \sum_{0 \leqslant |x| \leqslant N-1} \sum_{D / N^2 - x^2} \mu(D) \log^2 \left(\frac{Y}{D}\right). \tag{0.14}$$

Для этой суммы так же справедлива ожидаемая асимптотика:

$$G(N) \sim C(N)2N \tag{0.15}$$

где

$$C(N) = \prod_{P/2N} \left(1 + \frac{1}{P-1}\right) \prod_{P \nmid 2N} \left(1 - \frac{1}{(P-1)^2}\right)$$

Остатки в асимптотиках (0.11), (0.13) и (0.15) зависят от границы нулей классических L-рядов Дирихле [7] и их спектральных аналогов для собственных функций дискретного спектра в смысле Сельберга [2, 5]. Если для них справедлива Гипотеза Римана, тогда остатки в упомянутых асимптотиках имеют вид

$$N^{\frac{2}{3}+\varepsilon}$$

с некоторым $\varepsilon > 0$. В противном случае они имеют только логарифмическое понижение по сравнению с главным числом вида

$$\frac{N}{\log N}$$

§1. Суммы Рамануджана

Первым шагом на пути перевода трех сумм (0.10), (0.12) и (0.14) на спектральный язык является их перевод на язык сумм Рамануджана. Все три суммы переводстяся на этот язык одинаково. Поэтому подробно мы рассмотрим только перевод суммы (0.14).

Для того, чтобы сделать это, введем разрывной символ для сравнения:

$$\delta_D(m) = \begin{cases} 1, & m \equiv 0(D) \\ 0, & m \not\equiv 0(D) \end{cases} \tag{1.1}$$

где $m \in \mathbb{Z}$. С помощью символа (1.1) равенство Решета (0.14) можно переписать в новом виде:

$$G(N) = \sum_{\substack{m=N^2-x^2 \\ m>0}} \sum_{D=1}^{N^2} \delta_D(m)\mu(D)\log^2(Y/D) \tag{1.2}$$

разрывной символ (1.1) можно выразить на языке полной тригонометрической суммы:

$$\delta_D(m) = \frac{1}{D}\sum_{l=1}^{D} \exp\left(2\pi i \frac{l}{D}\, m\right), \tag{1.3}$$

которую в свою очередь легко свести к суммам Рамануджана по приведенным системам вычетов

$$\delta_D(m) = \frac{1}{D}\sum_{c/D} r_c(m), \tag{1.4}$$

где $r_c(m)$ – сумма Рамануджана:

$$r_c(m) = \sum_{(a,c)=1} \exp\left(2\pi i \frac{a}{c}\, m\right). \tag{1.5}$$

Подставляя (1.4) в (1.2) приведем это равенство к виду:

$$G(N) = \sum_{\substack{m=N^2-x^2\\ m>0}} \sum_{c\leqslant N^2} r_c(m)\mathcal{M}(Y) \tag{1.6}$$

где

$$\mathcal{M}(Y) = \sum_{\substack{D\equiv 0(c)\\ D\leqslant N^2}} \frac{\mu(D)}{D} \log^2\left(\frac{Y}{D}\right). \tag{1.7}$$

Для преобразования суммы (1.7) заменим условие сравнимости $D \equiv O(c)$ равенством

$$D = cd, \quad d \in \mathbb{N}.$$

При этом, если $(c,d) > 1$, тогда $\mu(D) = \mu(cd) = 0$. Поэтому в сумме (1.7) можно считать выполненным условие взаимной простоты: $(c,d) = 1$ и переписать равенство (1.7) в новом виде

$$\mathcal{M}_c(Y) = \frac{\mu(c)}{c}\, V_c(Y), \tag{1.8}$$

где

$$V_c(Y) = \sum_{dc\leqslant N^2,\,(d,c)=1} \frac{\mu(d)}{d} \log^2\left(\frac{Y}{cd}\right). \tag{1.9}$$

Теперь воспользуемся произволом параметра Y и положим

$$Y = N^2. \tag{1.10}$$

В этом случае логарифмический множитель в сумме (1.9) вместе с ограничением $dc \leqslant N^2$ можно заменить разрывным интегральным оператором (0.9) при $k = 2$ и переписать сумму (1.9) в интегральном виде:

$$V_c(Y) = \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\, s>0} \left(\frac{Y}{c}\right)^s \prod_{P/c}\left(1 - \frac{1}{P^{1+s}}\right) \frac{ds}{s^3\cdot\zeta(1+s)}, \tag{1.11}$$

где $\zeta(1+s)$ – классическая дзета-функция Римана.

Подставляя (1.8) в (1.6) перепишем это равенство в новом виде:

$$G(N) = \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{c\leqslant N^2} \frac{\mu(c)}{c} r_c(m) V_c(Y). \tag{1.12}$$

Отметим, что правая часть (1.12) является дискретным аналогом кругового интеграла, разбитого точками Фарея. Роль дуги Фарея здесь играет множитель $\frac{1}{c}V_c(Y)$, который не зависит от приведенной системы вычетов суммы Рамануджана $r_c(m)$, в отличие от классических дуг Фарея, у которых такая зависимость есть.

В (1.12) так же можно ввести аналоги больших и малых дуг и получить главный член проблемы на больших дугах. Для этого следует разбить внутреннюю сумму по "c" на две части:

$$\sum_{1\leqslant c\leqslant N^2} (\cdot) = \sum_{1\leqslant c\leqslant N_1} (\cdot) + \sum_{N_1<c\leqslant N^2} (\cdot) \tag{1.13}$$

и определить параметр N_1 условием:

$$N_1 = N^{1-\varepsilon}, \tag{1.14}$$

где $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало, но фиксировано из интервала $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{3}$.

В связи с разбиением (1.13), правая часть (1.12) так же распадется на две части:

$$G(N) = G_1(N) + G_2(N), \tag{1.15}$$

где G_1 определяется первой суммой правой части (1.13), а G_2 – второй.

Для того, чтобы найти явный вид суммы G_1 для этого достаточно заметить, что сумма Рамануджана $r_c(N^2-x^2)$ периодична по x с периодом c. Поэтому справедливо равенство:

$$\sum_{0\leqslant|x|\leqslant N-1} r_c(N^2-x^2) = 2\left[\frac{N}{c}\right]\cdot\sum_{l=1} r(N^2-l^2) + \\ + 2\theta\sum_{l=1}^{c} |r_c(N^2-l^2)|, \tag{1.16}$$

где $|\theta| \leqslant 1$.

Для того, чтобы найти главный член правой части (1.16) достаточно заметить, что из явного вида суммы Рамануджана (1.5) следует разрывное равенство для ее среднего при бесквадратных c:

$$\frac{\mu(c)}{c}\sum_{l=1}^{c} r_c(N^2-l^2)=\begin{cases}\mu(c), & (c,2N)=1\\ 0, & (c,2N)>1.\end{cases} \tag{1.17}$$

Для оценки остатка в (1.16) следует вспомнить, что сумма Рамануджана (1.5) имеет явное арифметическое выражение:

$$r_c(m)=\sum_{\Delta/(c,m)}\mu\left(c/\Delta\right)\Delta. \tag{1.18}$$

Из этого равенства следует оценка:

$$|r_c(m)|\leqslant\sum_{\Delta/(c,m)}\Delta \tag{1.19}$$

Используя ее, получаем оценку среднего, т.е. остатка в (1.6):

$$\sum_{l=1}^{c}|r_c(N^2-l^2)|\leqslant c\tau_3(c), \tag{1.20}$$

где τ_3 – функция числа делителей с индексом 3.

Подставляя (1.17) и (1.19) в (1.16) и затем в определение суммы $G_1(N)$, получаем равенство

$$G_1(N)=2N\sum_{c\leqslant N_1,(c,2N)=1}\frac{\mu(c)}{c}V_c(Y)+O(N_1\log^4 N). \tag{1.21}$$

Используя интегральное представление (1.11) для суммы $V_c(Y)$ в правой части (1.21), получаем главный член проблемы на “больших дугах”:

$$G_1(N)=2c(N)\cdot N+\theta N\exp(-\sqrt{\log N}), \tag{1.22}$$

где $\theta\ll 1$, $c(N)$ – особый ряд из (0.15).

§2. Аналог малых дуг Фарея

Аналогом малых дуг кругового метода является сумма $G_2(N)$ в правой части (1.15). Из определения этой суммы получаем ее явный вид:

$$G_2(N) = \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{c>N_1}^{N^2} \frac{\mu(c)}{c} r_c(m) V_c(Y). \tag{2.1}$$

Оценивать эту сумму будем спектральным методом. Но прежде, чем переводить ее на этот язык следует обратить внимание, что сумма $V_c(Y)$ не гладко зависит от параметра c. По определению (1.9) она содержит арифметическое условие взаимной простоты $(c, d) = 1$, которое на спектральный язык не переводится. Поэтому на первом шаге мы избивимся от этого условия.

Для этого воспользуемся разрывной суммой

$$\sum_{\delta/(c,d)} \mu(\delta) = \begin{cases} 1, & (c,d) = 1 \\ 0, & (c,d) > 1. \end{cases}$$

Подставляя ее в (1.9) и меняя порядки суммирования получаем:

$$V_c(Y) = \sum_{\delta/c} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta} W_\delta\left(\frac{Y}{c}\right) \tag{2.2}$$

где

$$W_\delta(x) = \sum_{d\leqslant x, (d,\delta)=1} \frac{\mu(d)}{d} \log^2\left(\frac{x}{\delta d}\right)$$

Подставляя (2.2) в (2.1) и меняя порядки суммирования приведем G_2 к новому виду:

$$G_2(N) = \sum_{\delta\geqslant 1} \frac{\mu^2(\delta)}{\sigma} g_\delta(N), \tag{2.3}$$

где

$$g_\delta(N) = \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{\substack{c=N_1+1 \\ c\equiv o(\delta)}}^{N^2} \frac{\mu(c)}{c} r_c(m) W_\delta\left(\frac{Y}{c}\right). \tag{2.4}$$

В дальнейшем параметр суммирования $\delta \geqslant 1$ в (2.3) будет играть роль конгруэнц-модуля в группе $\Gamma_0(\delta)$ при переводе суммы $g_\delta(N)$ на спектральный язык. Следовательно, учесть интерференцию по этому параметру мы не сможем. Поэтому воспользуемся тем обстоятельством,что (2.3) быстро сходится по δ и ее “хвост” можно оценить элементарно, до перевода суммы $g_\delta(N)$ на спектральный язык. Для этого разобьем сумму (2.3) на две части:

$$G_2(N) = \left(\sum_{1 \leqslant \delta \leqslant D} + \sum_{\delta > D} \right) \frac{\mu^2(\delta)}{\delta} g_\delta(N), \tag{2.5}$$

где $D \geqslant 1$ – произвольный параметр, точным значением которого мы распорядимся в дальнейшем.

Часть суммы (2.5) с малыми $\delta \leqslant D$ будет основной, и к ней мы применим спектральную технику оценок.

Вторуя часть суммы (2.5), с большими $\delta > D$, мы оценим элементарно. Для этого нам потребуется оценка (1.19) и новая оценка вида

$$W_\delta \left(\frac{Y}{c} \right) \ll \log^3 N, \tag{2.6}$$

которая следует из определения (2.2) суммы $W_\delta(x)$ и условия (1.10) для параметра $Y = N^2$. Подставляя (1.19) в (2.4) и меняя порядки суммирования, получаем оценку:

$$g_\delta(N) \ll \log^3 N \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{\Delta/m} \Delta \sum_{c \equiv 0 \left(\frac{\delta\Delta}{k} \right) k=(\delta,\Delta)} \frac{1}{c}. \tag{2.7}$$

Внутренняя сумма по $c \leqslant N^2$ в (2.7) имеет порядок не больше, чем величина

$$\frac{k}{\delta\Delta} \log N.$$

Поэтому оценка (2.7) приводится к виду:

$$g_\delta(N) \ll \frac{\log^4 N}{\delta} \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{\Delta/m} (\delta, \Delta). \tag{2.8}$$

Дальше воспользуемся равенством

$$k = (\delta, \Delta) = \sum_{r/(\delta,\Delta)} \varphi(r)$$

и подставим его в (2.8). После перемены порядков суммирования и усреднения оценки (2.8) по всем $\delta > D$ с весом $\mu^2(\delta)/\delta$ получаем:

$$\sum_{\delta>D} \frac{\mathcal{M}^2(\delta)}{\delta} g_\delta(N) \ll \log^4 N \sum_{r\geqslant 1} \varphi(r) \left(\sum_{\substack{\delta>D \\ \delta\equiv o(r)}} \frac{1}{\delta^2} \right) S_r(N), \tag{2.9}$$

где

$$S_r(N) = \sum_{m=N^2-x^2>0} \sum_{\substack{\Delta/m \\ \Delta\equiv o(r)}} 1.$$

Для средней суммы по δ в (2.9) справедлива оценка

$$\sum_{\delta\equiv o(r),\delta>D} \frac{1}{\delta^2} \ll \begin{cases} \frac{1}{rD}, & r < D \\ \frac{1}{r^2}, & r \geqslant D. \end{cases} \tag{2.10}$$

Кроме того, справедливы оценки:

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(r)}{r} < 1, \quad r \geqslant 1, \\ &\frac{\varphi(r)}{r^2} < \frac{1}{D}, \quad r \geqslant D. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Следствием оценок (2.10) и (2.11) является итоговая оценка:

$$\varphi(r) \sum_{\delta\equiv o(r),\delta>D} \frac{1}{\delta^2} \ll \frac{1}{D},$$

которая справедлива для любого $r \geqslant 1$.

Подставляя ее в (2.9), получаем:

$$\sum_{\delta>D} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta} g_\delta(N) \ll \frac{\log^4 N}{D} \sum_{r\geqslant 1} S_r(N). \tag{2.12}$$

Из определения суммы $S_r(N)$ в (2.9) следует новая оценка:

$$\sum_{r\geqslant 1} S_r(N) \ll \sum_{0\leqslant x\leqslant N-1} \tau_3(N^2 - x^2). \tag{2.13}$$

Сумму в правой части (2.13) можно оценить элементарно, методом работы [3]. Ее порядок равен величине

$$N \cdot \log^4 N.$$

Подставляя эту оценку в (2.12), получаем окончательную оценку:

$$\sum_{\delta > D} \frac{\mu^2(\delta)}{\delta} g_\delta(N) \ll N \frac{\log^7 N}{D}. \qquad (2.14)$$

Полагая

$$D = \log^{10} N. \qquad (2.15)$$

и подставляя оценку (2.14) в (2.5), получаем равенство

$$G_2(N) = \sum_{\delta_1 \leqslant D} \frac{\mu^2(\delta_1)}{\delta_1} g_{\delta_1}(N) + O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right). \qquad (2.16)$$

Тем самым мы свели оценку “малых дуг” к оценке суммы $g_{\delta_1}(N)$ с малыми $\delta_1 \leqslant D$. В окончательном равенстве (2.16) мы снабдим параметр δ_1 индексом 1, т.к. в дальнейшем появится еще один аналогичный параметр, которому мы придадим индекс 2, чтобы отличать их друг от друга.

§3. Суммы Клостермана

Самым тонким местом является согласованное объединение функции Мебиуса $\mu(c)$ и суммы Рамануджана $r_c(m)$ в (2.4) в единую функцию параметра c.

Чтобы сделать это, следует вспомнить, что у функции Мебиуса $\mu(c)$ так же есть представление на языке той же суммы Рамануджана со свободным параметром:

$$\mu(c) = r_c(d), \quad (d, c) = 1. \qquad (3.1)$$

Фактически это равенство (1.18), прочитанное в обратную сторону, которое справедливо для любого $d \in \mathbb{Z}$ с условием $(d, c) = 1$. Дальше следует воспользоваться определением суммы Рамануджана (1.5) и записать тождество:

$$r_c(m)\mu(c) = \sum_{(a,c)=1} e^{2\pi i \frac{a}{c} m} \mu(c). \qquad (3.2)$$

Хотя сама функция Мебиуса $\mu(c)$ никак не связана с вычетом $a \pmod c$ в правой части тождества (3.2), но ее представление (3.1) с произвольным d можно связать с вычетом a условием сравнимости:

$$a \cdot d \equiv 1(c). \qquad (3.3)$$

Поэтому, подставляя (3.1) в (3.2) с условием (3.3), приведем тождество (3.2) к новому виду:

$$r_c(m)\mu(c) = \sum_{ad\equiv 1(c)} e^{2\pi i \frac{a}{c} m} r_c(d). \tag{3.4}$$

После чего подставим в (3.4) явный вид $r_c(d)$ из равенства(1.5) и, поменяв порядки суммирования, получим равенство:

$$r_c(m)\mu(c) = \sum_{\substack{n=1\\(n,c)=1}}^{c} S_c(m,n), \tag{3.5}$$

где $S_c(m,n)$ – сумма Клостермана модуля c и параметров (m,n):

$$S_c(m,n) = \sum_{ad\equiv 1(c)} e^{2\pi i \frac{am+dn}{c}}. \tag{3.6}$$

Равенство (3.5) является основной идеей этой работы “в чистом виде”. Но в такой форме суммы Клостермана (3.6) не очень удобны для перевода их среднего на спектральный язык, т.к. параметр n зависит от c.

Современная техника перевода среднего сумм Клостермана на спектральный язык [4, 5], хорошо работает только в том случае, если оба параметра (m,n) не зависят от модуля c.

В случае (3.6) параметр $m = N^2 - x^2 > 0$ действительно не зависит от c. Поэтому нам следует освободить от такой зависимости и параметр n.

Это можно сделать, если воспользоваться свойствами тэта-функции Харди–Литтлвуда [6]:

$$\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)\exp(nz), \tag{3.7}$$

где

$$z = -\varepsilon + 2\pi i \frac{d}{c}, \quad (d,c) = 1$$

$\Lambda(n)$ – функция Мангольдта, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое, но фиксированное число. Его точным значением мы распорядимся в дальнейшем.

Для тэта-функции (3.7) есть классическое представление Харди–Литтлвуда [6] через нули всех L-рядов Дирихле модуля c, которое мы приведем здесь в виде леммы:

Лемма 1.3 Харди–Литтлвуд [6]. *Для тэта-функции (3.7) справедливо представление:*

$$\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right)=\frac{\mu(c)}{\varepsilon\,\varphi(c)}-\frac{1}{\varphi(c)}\sum_{c=c_0c_1}\mu(c_0)\sum_{\chi_1}\chi_1\left(-\frac{d}{c_0}\right)\times$$
$$\times\,\overline{\tau_{\chi_1}}F_{\chi_1}(\varepsilon)+\theta\tau(c)\log^2\left(\frac{c}{\varepsilon}\right),\quad(3.8)$$

где $c_0\geqslant 1$ *пробегает все делители* c *с условием* $(c_0,c_1)=1$; χ_1 *– пробегает все примитивные характеры* $\pmod{c_1}$, *если* $c_1>1$ *и* $\chi_1\equiv 1$, *если* $c_1=1$; τ_{χ_1} *– сумма Гаусса характера* χ_1; $\tau(c)$ *– число делителей* c;

$$F_{\chi_1}(\varepsilon)=\sum_{\rho_1}\Gamma(\rho_1)\varepsilon^{-\rho_1},$$

ρ_1 *пробегает все нули ряда Дирихле* $L(s,\chi_1)$ *из критической полосы;* $\theta\ll 1$; *величина* $\frac{1}{c_0}$ *в аргументе характера* χ_1 *понимается как обратный групповой элемент* $\pmod{c_1}$.

Суть сложного равенства Харди–Литтлвуда (3.8) становится понятной, если принять Р.Г.Р. В этом случае в правой части (3.8) можно пренебрегать всеми слагаемыми кроме первого, и, в результате, получается простое приближенное равенство:

$$\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right)\cong\frac{\mu(c)}{\varepsilon\varphi(c)},\quad(3.9)$$

которое тем точнее, чем меньше ε, т.е. чем длинее сумма Харди–Литтлвуда $\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right)$. Из (3.9) получаем приближенное равенство для функции Мебиуса:

$$\mu(c)\cong\varepsilon\varphi(c)\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right).\quad(3.10)$$

Оно как раз и осуществляет перевод $\mu(c)$ на язык суммы (3.7), где параметр суммирования n уже не зависит от c.

Для того, чтобы придать равенству (3.10) строгий смысл надо обернуть равенство (3.8) относительно первого слагаемого правой части и воспользоваться оценкой

$$F_{\chi_1}(\varepsilon)\ll\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\log N,\quad(3.11)$$

которая следует из Р.Г.Р.

В результате получаем равенство:

$$r_c(m)\frac{\mu(c)}{c} = \varepsilon\frac{\varphi(c)}{c}\sum_{ad\equiv 1(c)} e^{2\pi i\frac{a}{c}m}\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right) + O(\sqrt{\varepsilon}\,c\,\log N). \qquad (3.12)$$

Равенство (3.12) следует из Р.Г.Р., если

$$\varepsilon \ll c^{-2}N^{-8}.$$

Отметим, что принятие Р.Г.Р. не принципиально, ее можно обойти с помощью "большого решета" [7], но при этом значительно возрастает число выкладок. Поэтому на первом этапе, для простоты, мы будем пользоваться Р.Г.Р. и ее следствиями – оценкой (3.11) и равенством (3.12).

Подставляя в первое слагаемое правой части (3.12) явный вид суммы (3.7) и меняя порядки суммирования, получаем равенство:

$$\sum_{ad\equiv 1(c)} e^{2\pi i\frac{a}{c}m}\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\Lambda(n)S_c(m,n)e^{-\varepsilon n}. \qquad (3.13)$$

В правой части (3.13) мы получаем суммы Клостермана $S_c(m,n)$, чьи параметры (m,n) уже не зависят от модуля c.

Единственным препятствием для перевода среднего по c для (3.12) на спектральный язык является арифметическая функция

$$\frac{\varphi(c)}{c} = \sum_{\delta/c}\frac{\mu(\delta)}{\delta}, \qquad (3.14)$$

которая стоит в качестве коэффициента в правой части (3.12) и которая на спектральный язык не переводится.

Это аналог того препятствия, которое у нас уже встречалось в §2 и которое мы устранили, разделив сумму (2.5) на две части; с малыми $\delta_1 \leqslant D$ и большими $\delta_1 > D$.

Здесь мы поступим точно также и разделим сумму (3.14) на две части:

$$\frac{\varphi(c)}{c} = \sum_{\delta_2/c,\delta_2\leqslant D}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2} + \varphi_D(c), \qquad (3.15)$$

где

$$\varphi_D(c) = \sum_{\delta_2/c\,\delta_2>D}\frac{\mu(\delta_2)}{\delta_2}. \qquad (3.16)$$

Здесь мы ввели индекс 2 у делителей δ_2 для того, чтобы отличить их от делителей первой серии δ_1 из §2, т.к. в дальнейшем они будут встречаться вместе. Об этом было упомянуто в §2.

Подставляя (3.15) в (3.12), мы разделим первое слагаемое на две части и первую часть с малыми $\delta_2 \leqslant D$ оставим без изменений. Во второй части:

$$\varepsilon\varphi_D(c) \sum_{ad\equiv 1(c)} e^{2\pi i \frac{a}{c} m} \theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right), \tag{3.17}$$

мы снова воспользуемся разложением Харди–Литтлвуда (3.8) для $\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right)$ и приведем (3.17) к виду:

$$\varphi_D(c)\frac{\mu(c)}{\varphi(c)} r_c(m) + O(\sqrt{\varepsilon} c \log N). \tag{3.18}$$

Снова пользуясь оценкой (1.19) и новыми оценками вида:

$$\varphi(c) \gg \frac{c}{\log\log N}, \quad c \leqslant N^2$$

и

$$\varphi_D(c) \leqslant f_D(c) = \sum_{\delta_2/c,\, \delta_2>D} \frac{\mu^2(\delta_2)}{\delta_2}, \tag{3.19}$$

получим, что (3.18) имеет порядок величины

$$\frac{\log\log N}{c} f_D(c) \sum_{\Delta/(m,c)} \Delta.$$

Дальнейшая оценка части суммы $g_{\delta_1}(N)$ из (2.16), отвечающей величине (3.17), аналогична уже полученной оценке (2.14), хотя и немного сложнее из-за появления параметра $\delta_1 \leqslant D$. Но это усложнение не существенно, поэтому мы опустим подробные вычисления и сразу выпишем представление (2.16) на языке суммы (3.13), отвечающей главной части коэффициента (3.15) – суммы с малыми делителями $\delta_2 \leqslant D$:

$$G_2(N) = \sum_{\delta_1\leqslant D} \sum_{\delta_2\leqslant D} \frac{\mu^2(\delta_1)\mu(\delta_2)}{\delta_1\delta_2} g_{\delta_1\delta_2}(N) + O\left(\frac{N}{\log N}\right), \tag{3.20}$$

где

$$g_{\delta_1\delta_2}(N) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \sum_{m=N^2-x^2>0} V\begin{pmatrix} m, & n \\ \delta_1, & \delta_2 \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

$$V\begin{pmatrix} m, & n \\ \delta_1, & \delta_2 \end{pmatrix} = \sum_{c=N_1}^{N^2} \varepsilon S_c(m,n) e^{-\varepsilon,n} W_{\delta_1}(Y/c) \tag{3.22}$$
$$c \equiv O(\delta), \quad \delta = \frac{\delta_1\delta_2}{k}, \quad k = (\delta_1, \delta_2).$$

Сумму сумм Клостермана (3.22) уже можно переводить на спектральный язык по формулам суммирования [5] для $\Gamma_0(\delta)$.

§4. Спектральный параметр

Перевод на спектральный язык суммы (3.22) осуществляется на языке спектрального параметра

$$x = \frac{4\pi\sqrt{mn}}{c}, \tag{4.1}$$

который впервые был введен в работе [4].

Для того, чтобы перевести сумму (3.22) на язык этого параметра, воспользуемся произвольностью параметра ε в сумме Харди–Литтлвуда $\theta_\varepsilon\left(\frac{d}{c}\right)$ из Леммы 1.3 и определим его равенством

$$\varepsilon = \frac{4\pi^2 m}{4Xc^2}, \tag{4.2}$$

где $m = N^2 - x^2 > 0$ – параметр суммирования из (3.21),$X \geqslant N^{10}$ – произвольный фиксированный параметр.

При таком выборе параметра ε выполняется условие $\varepsilon \ll c^{-2}N^{-8}$, при котором было получено равенство (3.12). Это следует из верхней оценки $m \leqslant N^2$.

Используя явный вид спектрального параметра x из (4.1) и определяющее равенство (4.2) для ε, получаем новое равенство:

$$\varepsilon n = \frac{x^2}{4X}. \tag{4.3}$$

Поэтому экспоненциальный вес в сумме (3.22) можно выразить на языке спектрального параметра:

$$\exp(-\varepsilon n) = \exp\left(-\frac{x^2}{4X}\right). \tag{4.4}$$

Кроме того, умножая числитель и знаменатель правой части (4.2) на $\sqrt{n}$, переведем определяющее равенство для ε на язык спектрального параметра (4.1):

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{n}}\,\frac{x}{c}. \tag{4.5}$$

Аргумент (Y/c) функции $W_{\delta_1}(Y/c)$ из (3.22) так же можно получить на языке спектрального параметра (4.1):

$$Y/c = \frac{Yx}{4\pi\sqrt{mn}}. \tag{4.6}$$

С учетом всех перечисленных равенств сумму (3.22) можно перевести на язык спектрального параметра x:

$$V\begin{pmatrix} m, & n \\ \delta_1, & \delta_2 \end{pmatrix} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{m}{n}} \sum_{\substack{c=N_1 \\ c\equiv o(\delta)}}^{N^2} \frac{S_c(m,n)}{c}\times$$

$$\times\, x\exp\left(-\frac{x^2}{x}\right) W_{\delta_1}\left(\frac{Y\cdot x}{4\pi\sqrt{mn}}\right). \tag{4.7}$$

Перевод суммы (4.7) на спектральный язык и оценка “малых дуг” будут приведены во второй части этой работы.

Литература

1. И. М. Виноградов, *Представление нечетного числа суммой трех простых чисел.* — Докл. Акад. Наук СССР **15** (1937), 291–294.
2. A. Selberg, *Discontinuous groups and harmonic analysis.* — Proc. Intern. Congress Mathem. (1962), 177–189, Stockholm.
3. А. И. Виноградов, Ю. В. Линник, *Оценка суммы числа делителей в коротком отрезке арифметической прогрессии.* — УМН **12, No. 4** (1957), 277–280.
4. Н. В. Кузнецов, *Гипотеза Петерсона для параболических форм веса нуль и гипотеза Линника.* — Матем. Сборник **111, No. 3** (1980), 333–383.
5. J.-M. Deshouillers, H. Jwaniec, *Kloostermann sums and Fourier coefficients of cusp forms.* — Invent. Math. **70,** No. **2** (1982), 219–288.
6. G. H. Hardy, J. E. Littlwood, *Some problems of partitio numerorum V. A further contribution to the study of Goldbach's problem.* — Proc. London Math. Soc. **22** (1994), 46–58.
7. H. L. Montgomery, *Topics in multiplicative number theory.* — L.N.M No. 227 (1971), Berlin, Springer Verlag.

Vinogradov A. I. Binary problems. A spectral approach.

This is the first part of the work on the Goldbach binary problem. Here an arithmetic analog of the Heisenberg noncommutativity for the Möbius function is introduced. With the help of this analog the binary problem is translated into the language of the mean for Klosterman sums. In the second part this mean will be translated into the language of spectral estimates that yield a solution of the binary problem.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 23 апреля 1996 г.