Е. Ш. Гутшабаш

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛМАЙЕРА И (2+0) ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1. Введение

В 1976 году К. Полмайер предложил преобразование, связывающее между собой решения нелинейной $O(3)$ сигма-модели и уравнения sin-Гордон [1]. Необходимо отметить, что в этой работе вся конструкция была получена без привлечения средств метода обратной задачи (МОЗР) (лаксова представления, решений Йоста и т.д.). В дальнейшем, в целом ряде работ преобразование Полмайера было распространено на более сложные случаи. Так, в [2, 3] рассматривались соответствия между нелинейной $O(N)$ сигма-моделью ($N \geqslant 3$) и обобщенными системами типа sin-Гордон, причем для некоторых из них были найдены представления Лакса, а также ряд законов сохранения. Другой поход для $O(3)$, кэлеровой, а также CP^N-модели развивался в [4], где получено уравнение второго порядка для "компонент лагранжиана" модели и изучены его частные решения, имеющие смысл инстантов (антиинстантотов). На языке МОЗР все эти связи означают наличие калибровочной эквивалентности (КЭ) между двумя интегрируемыми моделями (под интегрируемостью всюду в данной работе мы будем понимать существование условия нулевой кривизны).

В настоящее время понятие КЭ хорошо известно как для систем размерности $(1+1)$ (магнетик Гейзенберга и модель НШ с потенциалом типа притяжения [5]), так и для систем размерности $(2+1)$ (уравнение Дэви-Стюартсона и магнетика Ишимори [6]). В [7] эта эквивалентность установлена для полуплоскости ($y \geqslant 0$) для систем размерности $(2+0)$-уравнений эллиптического типа-двумерного, изотропного, стационарного ферромаг-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 99-01-00548).

нетика Гейзенберга ($O(3)\sigma$-модели) и уравнения -sh-Гордон (с двумерным оператором Лапласа в левой части). При этом оказалось, что она достигается только при наличии у магнетика нетривиального фона (классического вакуума) типа "спиральной" структуры. Как затем было показано в [8], наличие такого фона позволяет поставить содержательную задачу рассеяния для оператора ассоциированной линейной задачи – в системе появляется непрерывный спектр. Заметим, также, что КЭ, доказанная в [7] с использованием элементов МОЗР осуществляется между граничными задачами в целом, а не только непосредственно нелинейными уравнениями.

В данной работе предлагается еще одно, вообще говоря, более простое по сравнению с [2, 3] обобщение преобразования Полмайера, позволяющее генерировать широкий класс двумерных интегрируемых уравнений – как уже известных и изученных, так и новых, имеющих приложения в статистической физике двумерных систем. Кроме того, в каждом из полученных вариантов мы анализируем условия КЭ с "породившей" их сигма-моделью.

Содержание работы следующее. В п.2 предлагается обобщенное преобразование Полмайера, на основе которого получено некоторое вспомогательное интегрируемое уравнение эллиптического типа. В п.3 с помощью этого уравнения строится целая серия других уравнений и выясняются условия их КЭ с σ-моделью. Точные решения двух из рассмотренной серии уравнений найдены в п.4, а в п.5 производится сравнение изучаемой нами модели с эллиптической версией известной модели Гетманова, а также уравнением, предложенным А. В. Бицадзе.

2. Обобщенное преобразование Полмайера в эвклидовом пространстве

Рассмотрим $(2+0)$ $O(3)$ нелинейную сигма-модель на полуплоскости $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) : --\infty < x < +\infty, y \geqslant 0\}$:

$$\partial\bar{\partial}\vec{S} + (\partial\vec{S}\cdot\bar{\partial}\vec{S})\vec{S} = 0, \tag{1}$$

где $\vec{S}(x,y) = (S_1, S_2, S_3)$ – вещественнозначный вектор, $\vec{S}^{\,2} = 1$, $\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$, $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Модель (1) совпадает с эллиптической версией модели $\vec{n}$-поля [5] и является одним из вариантов киральных полей. Будем предполагать, что $\vec{S}(x,0)$, $\partial_y\vec{S}(x,0)$ – заданные гладкие функции, причем

$$\vec{S}(x,0) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} (\cos 2x, \sin 2x, 0), \tag{2}$$

т.е. вектор $\vec{S} = \vec{S}(x,y)$ ищется в классе функций, имеющих смысл спиральных структур [9]. Следуя [1], предположим, кроме того, что на $\mathbb{R}^2_+$ выполняются соотношения:

$$(\partial\vec{S})^2 = (\bar{\partial}\vec{S})^2 = 1, \tag{3}$$

откуда вытекают связи:

$$(\partial_x\vec{S})^2 - (\partial_y\vec{S})^2 = 4 \tag{4}$$

$$\partial_x\vec{S}\cdot\partial_y\vec{S} = 0, \tag{5}$$

причем совместность (4) и (5) с (1) нетрудно установить. Положим

$$f(z,\bar{z}) = \partial\vec{S}\cdot\bar{\partial}\vec{S}, \tag{6}$$

где $f(z,\bar{z})$ – гладкая вещественнозначная функция, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$\vec{S}\cdot\partial\bar{\partial}\vec{S} + f(z,\bar{z}) = 0 \tag{7}$$

Выполним теперь преобразование Полмайера, считая, что

$$\partial\partial\vec{S} = c_1\vec{S} + c_2\partial\vec{S} + c_3\bar{\partial}\vec{S}, \tag{8}$$

где $c_i = c_i(z,\bar{z})$, $i = 1,3$ – некоторые комплекснозначные функции. Используя условия $\vec{S}^{\,2} = 1$, $\partial\vec{S}\cdot\vec{S} = \bar{\partial}\vec{S}\cdot\vec{S} = 0$, соотношения (3), (6)–(7), из (8) будем иметь:

$$\partial\partial\vec{S} = -\vec{S} - \frac{f\partial f}{1-f^2}\,\partial\vec{S} + \frac{\partial f}{1-f^2}\,\bar{\partial}\vec{S},$$

после чего, дифференцируя (6) по z, а затем по $\bar{z}$, получим следующее нелинейное уравнение эллиптического типа на функцию $f = f(z,\bar{z})$:

$$\partial\bar{\partial}f = 1 - f^2 - \frac{f\partial f\bar{\partial}f}{1-f^2} \tag{9}$$

Это уравнение является интегрируемым, что нетрудно проверить, рассмотрев переопределенную линейную матричную систему

$$\partial\psi(z,\bar z,\lambda) = A(z,\bar z,\lambda)\psi(z,\bar z,\lambda), \quad \bar\partial\psi(z,\bar z,\lambda) = B(z,\bar z,\lambda)\psi(z,\bar z,\lambda), \tag{10}$$

где $A, B \in \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C}), \lambda$ – спектральный параметр. Тогда (9) совпадает с условием совместности системы (10)-условием нулевой кривизны

$$\bar\partial A - \partial B + [A,B] = 0 \tag{11}$$

с матрицами A и B вида:

$$A = \frac{1}{2\lambda}\,i\lambda\sigma_3 + \frac{\partial f}{2\sqrt{f^2-1}}\,\sigma_1, \quad B = \frac{1}{2\lambda}if\sigma_3 + \frac{1}{2\lambda}\sqrt{f^2-1}\,\sigma_2 \tag{12}$$

Здесь σ_i, $i = 1,3$ – стандартные матрицы Паули, $|f| > 1$.

Уравнение (9) оказывается близким к эллиптическому варианту однокомпонентной модели Гетманова [10] (их сравнение производится ниже), а также в некотором смысле к модели Редже–Лунда [11] и ряде обобщений этих моделей [2, 3]. Тем не менее, подход, связанный с уравнением (9), является констуктивным, так как позволяет легко генерировать широкий класс физически интересных интегрируемых уравнений.

В дальнейшем будет полезным понятие "фазового" пространства нелинейного эллиптического уравнения, которое естественно ввести по аналогии с гиперболическим случаем [5]. Выполним это на примере уравнений (1) и (9).

Производящий функционал модели (1)–(2) имеет вид:

$$F^{(\vec S)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{0}^{+\infty} dy\,\left[\frac{1}{2}((\partial_x\vec S)^2 + (\partial_y\vec S)^2) + \frac{\varkappa_1}{2}(\vec S^{\,2}-1) + \varkappa_2\vec S\partial_y\vec S - 2\right], \tag{13}$$

где $\varkappa_j$, $j = 1,2$ – множители Лагранжа. Ее "фазовое" пространство $\mathcal{M}^{(\vec S)}$ образовано гладкими функциями $S_i(x,0)$, $\partial_y S_i(x,0)$, $i = 1,3$, а аналог гамильтоновых уравнений есть

$$\partial_y\vec S = \{H^{(\vec S)}, \vec S\}, \quad \partial_y(\partial_y\vec S) = \{H^{(\vec S)}, \partial_y\vec S\}, \tag{14}$$

причем "гамильтониан" модели задается следующим образом:

$$H^{(\vec{S})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}((\partial_y \vec{S})^2 - (\partial_x \vec{S}))^2 + 2 \right], \tag{15}$$

а "пуассонова" структура "фазового" пространства определяется ненулевыми фундаментальными скобками с учетом связей, входящих в (13) (см. [5]):

$$\{\partial_y S_a(x), S_b(x')\} = [\delta_{ab} - S_a(x) S_b(x)]\delta(x - x')$$
$$\{\partial_y S_a(x), \partial_y S_b(x')\} = -[\partial_y S_a(x) \cdot S_b(x) - \partial_y S_b(x) \cdot S_a(x)]\delta(x - x').$$

Тогда, если F и G – произвольные гладкие функционалы, то

$$\{F, G\} = \int dx \left\{ \left[\frac{\delta F}{\delta(\partial_y \vec{S})} \frac{\delta G}{\partial \vec{S}} - \frac{\delta F}{\delta \vec{S}} \frac{\delta G}{\delta(\delta_y \vec{S})} \right] + \right.$$
$$+ \left(\frac{\delta G}{\delta(\partial_y \vec{S})} \vec{S} \right) \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \vec{S}} \vec{S} \right) - \frac{\delta F}{\delta(\partial_y \vec{S})} (\partial_y \vec{S}) \right] +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\delta(\partial_y \vec{S})} \vec{S} \right) \left[\left(\frac{\delta G}{\delta(\partial_y \vec{S})} (\partial_y \vec{S}) \right) - \left(\frac{\delta G}{\delta \vec{S}} \vec{S} \right) \right] \right\}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (9), считая что $f(x,0)$, $\partial_y f(x,0)$ – заданные гладкие вещественнозначные функции, причем $f(x,0) \to 1$, $\partial_x f(x,0)$, $\partial_y f(x,0) \to 0$ при $|x| \to \infty$ так, что второй член в (9) на бесконечности обращается в нуль. Производящий функционал этого уравнения имеет вид

$$F^{(f)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{0}^{+\infty} dy \left[\frac{1}{2} \frac{(\partial_x f)^2 + (\partial_y f)^2}{f^2 - 1} + 4(1 - f) \right]. \tag{16}$$

"Фазовое" пространство $\mathcal{M}^{(f)}$ образовано функциями $q = \ln|f + \sqrt{f^2 - 1}|$ $(|f| > 1)$, $q = \arcsin f (|f| < 1)$ и $p = \partial_y f / \sqrt{|f^2 - 1|}$, а уравнения "движения" дают:

$$\partial_y q = \{H^{(f)}, q\}, \quad \partial_y(\partial_y q) = \{H^{(f)}, \partial_y q\}.$$

Здесь "гамильтониан" равен

$$H^{(f)} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} \frac{(\partial_x f)^2}{f^2 - 1} - 4(1 - f) \right\},$$

а "пуассонова" структура "фазового" пространства определяется фундаментальными скобками: $\{p(x), q(x')\} = \delta(x - x')$.

Подчеркнем, что мы не ставим в данной работе задачу построения "гамильтонова" формализма для эллиптических уравнений – к сожалению, в этом случае у нас нет "наглядных" переменных типа действие-угол и все аналогии с гиперболическими уравнениями оказываются достаточно условными. Тем не менее, такие аналогии являются полезными при доказательстве КЭ моделей (см. ниже).

3. Генерация $(2+0)$ интегрируемых уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим несколько простейших вариантов выбора функции $f(z,\bar z)$, а также условия КЭ задач (1)–(2) и граничных задач, возникающих в результате этого выбора.

1. Положим $f(z,\bar z) = \operatorname{ch} u(z,\bar z)$; здесь и всюду в дальнейшем (если не оговорено противное) будем считать, что $u = u(z,\bar z)$ – гладкая вещественнозначная функция, определенная на $\mathbb{R}^2_+$ и, кроме того,

$$u(x,0) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{17}$$

Тогда из (9) получим уравнение

$$\partial\bar\partial u = -\operatorname{sh} u. \tag{18}$$

Оно возникает в теории двумерных систем Больцмана–Пуассона с отрицательными температурами [12], а также при некоторых редукциях модели Черна–Саймонса [13]. Уравнение (18) имеет и геометрический смысл, описывая вложение поверхности постоянной отрицательной кривизны в трехмерное эвклидово пространство [14]. В этой работе оно решалось методом конечнозонного интегрирования, а в [15], где рассчитывались стационарные конфигурации частиц в холодной плазме – с помощью специально выбранного анзаца.

Используя КЭ задач (1)–(2) и (18)–(17), доказанную в [7], а также (4), (6), имеем

$$(\partial_x \vec S)^2 = 4\operatorname{ch}^2\frac{u}{2}, \quad (\partial_y \vec S)^2 = 4\operatorname{sh}^2\frac{u}{2} \tag{19}$$

Эти соотношения связывают между собой "потенциалы" обеих граничных задач. Из них следует, что КЭ не налагает никаких ограничений на соответствующие "фазовые" пространства (при этом, разумеется, $f \geqslant 1$).

2. При $f(z,\bar z) = -\mathrm{ch}\, u$ получим

$$\partial\bar\partial u = \mathrm{sh}\, u \tag{20}$$

Это уравнение также описывает двумерную систему Больцмана–Пуассона, но при положительных температурных. С помощью МОЗР оно решалось в [16], а методом конечнозонного интегрирования – в [17]. "Солитонные" решения были найдены также в [18] методом Хироты.

Аналоги соотношений (19) дают:

$$(\partial_x \vec S) + (\partial_y \vec S)^2 = -4\mathrm{ch}\, u, \quad (\partial_x \vec S)^2 - (\partial_y \vec S)^2 = 4.$$

С учетом (2), (17) очевидно, что первое из этих равенств не выдерживает асимптотики при $y = 0$ и $|x| \to \infty$, и, таким образом, КЭ задач не имеет места (точные условия КЭ для (20), (17) будут сформулированы ниже).

3. При выборе $f(z,\bar z) = e^{\pm u}$ будем иметь уравнения:

$$\partial\bar\partial u = -2\mathrm{sh}\, u \pm \frac{\partial u \bar\partial u}{e^{\pm 2u} - 1}, \tag{21а,б}$$

а для формул связи решений получим:

$$(\partial_x \vec S) = 2(e^{\pm u} + 1), \quad (\partial_y \vec S)^2 = 2(e^{\pm u} - 1). \tag{22а,б}$$

Ясно, что КЭ достигается при $u \geqslant 0 (u \leqslant 0)$ для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$, т.е. для "половинок" "фазовых" пространств этих уравнений.

4. Полагая $f(z,\bar z) = \mp \cos u$ получим

$$\partial\bar\partial u = \pm \sin u \tag{23а,б}$$

Уравнение (23а) имеет многочисленные применения в физике магнетиков [19], теории стационарного эффекта Джозефсона [20] и ряде других проблем. Граничная задача для него на $\mathbb{R}^2$ обсуждалась в [21], а для $\mathbb{R}^2_+$ В. Д. Липовским и автором в [22], там же М. В. Бабичем были найдены конечнозонные решения этого уравнения, а М. А. Саллем – методом преобразования Дарбу – "солитонные". Уравнение (23б) применяется, например, в теории молекулярных пленок [23].

Рассмотрим вопрос о КЭ задач (23а,б), (17) и (1)–(2). Для этого заметим, что уравнение (1) можно переписать в терминах структурных констант алгебры Ли $su(2)$:

$$c_{ikl}S_k\partial\bar{\partial}S_l = 0, \tag{24}$$

где $c_{ikl} = \varepsilon_{ikl}$, ε_{ikl} – полностью антисимметричный тензор в $\mathbb{R}^3$. Случаи 1, 3 соответствовали, таким образом, модели магнетика с компактным многообразием. Для уравнений (23а,б) эта ситуация меняется и искомая КЭ достигается на некомпактном многообразии: $S \in su(1,1)$, где $su(1,1)$ – алгебра Ли группы $SU(1,1)/\mathbb{Z}_2$.

Отметим, что аналогичный случай рассматривался в [24]в связи с установлением соответствия одномерного изотропного магнетика Ландау–Лифшица и вариантами уравнения НШ в теории неидеального бозе-газа, в [25] при доказательстве КЭ уравнений Дэви–Стюартсона и “некомпактной” версии модели магнетика Ишимори и др., а несколько иная ситуация с использованием некомпактной группы была изучена в [26] для модифицированной киральной модели в $\mathbb{R}^{2,1}$.

Положим

$$S = \begin{pmatrix} iS^3 & S^1 - iS^2 \\ S^1 + iS^2 & -iS^3 \end{pmatrix}, \quad S^2 = I. \tag{25}$$

Из условия $\det S = -1$ и (25) имеем:

$$(S^1)^2 + (S^2)^2 - (S^3)^2 = 1,$$

что геометрически означает, что конец вектора $\vec{S}$ скользит по поверхности однополостного гиперболоида (в отличие от единичной сферы в “компактном” случае). Матрица S разлагается по базисным элементам алгебры $su(1,1) : S = S^i\pi_i$, причем $\pi_\alpha\pi_\beta = \eta_{\alpha\beta} + ic^\gamma_{\alpha\beta}\pi_\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3$, $\eta = \{\eta_{\alpha\beta}\} = \mathrm{diag}\,(1,1,-1)$ – метрика Киллинга, $c^\gamma_{\alpha\beta}$ – структурные константы алгебры Ли $su(1,1)$, а коммутационные соотношения имеют вид: $[\pi_\alpha, \pi_\beta] = 2ic^\gamma_{\alpha\beta}\pi_\gamma$.

Из (4), (6) для уравнения (23а) находим $(\det(\partial_x S)^2 = -(\partial_x\vec{S})^2$, $\det(\partial_y S)^2 = -(\partial\vec{S})^2)$:

$$(\partial_x S^1)^2 + (\partial_x S^2)^2 - (\partial_x S^3)^2 = 4\sin^2\frac{u}{2}$$
$$(\partial_y S^1)^2 + (\partial_y S^2)^2 - (\partial_y S^3)^2 = -4\cos^2\frac{u}{2},$$

а из требования сохранения асимптотики получаем, что КЭ с (1)–(2) достигается при условии $u(x,0)\to\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$; при этом ограничения на пространстве $\mathcal{M}^{(\vec{S})}$ соответствующей $O(1,2)\sigma$-модели имеют вид системы дифференциальных неравенств:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (\partial_x S^1)^2+(\partial_x S^2)^2-(\partial_x S^3)^2\leqslant 4\\ -4 &\leqslant (\partial_y S^1)^2+(\partial_y S^2)^2-(\partial_y S^3)^2\leqslant 0 \end{aligned}$$

Аналогично для уравнения (23б) имеем формулы связи решений:

$$\begin{aligned} (\partial_x S^1)^2+(\partial S^2)^2-(\partial_x S^3)^2 &= 4\cos^2\frac{u}{2}\\ (\partial_y S^1)+(\partial_y S^2)^2-(\partial_y S^3)^2 &= -4\sin^2\frac{u}{2} \end{aligned}$$

и те же самые ограничения на "фазовые" переменные $O(1,2)\sigma$-модели (здесь $u(x,0)\underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow}0\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$).

5. При $f(z,\bar z)=-e^{\pm u}$ из (9) следует:

$$\partial\bar\partial u=2\mathrm{sh}\,u\pm\frac{\partial u\bar\partial u}{e^{\pm 2u}-1}. \tag{26а,б}$$

Соответствующие формулы связи есть:

$$(\partial_x\vec{S})^2=2(1-e^{\pm u}),\quad (\partial_y\vec{S})^2=-2(1+e^{\pm u})$$

Полагая $S\in su(1,1)$, будем считать, что

$$S=\begin{pmatrix} S^3 & i(S^1-iS^2)\\ i(S^1+iS^2) & -S^3\end{pmatrix}, \tag{27}$$

т.е. многообразием здесь является двухполостной гиперболоид, а метрика Киллинга есть $\eta_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}\,(-1,-1,1)$. Тогда КЭ оказывается справедливой в классе функций, удовлетворяющих условию:

$$\vec{S}(0,y)\underset{|y|\to\infty}{\longrightarrow}(\cos 2y,\sin 2y,0) \tag{28}$$

и $u(x,y)\leqslant 0$ $(u(x,y)\geqslant 0)$ для $0\leqslant x<+\infty$, $u(0,y)\underset{|y|\to+\infty}{\longrightarrow}0$; при этом на пространстве $\mathcal{M}^{(\vec{S})}O(2,1)\sigma$-модели должны выполняться ограничения:

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant (\partial_x S^3)-(\partial_x S^1)^2-(\partial_x S^2)^2\leqslant 2\\ -2 &\leqslant (\partial_y S^1)^2+(\partial_y S^2)^2-(\partial_y S^3)\leqslant 4 \end{aligned}$$

Представляло бы значительный интерес найти применение уравнениям (21а,б) и (26а,б), рассматривая их как обобщение уравнений Больцмана–Пуассона (при положительных температурах – для (26а,б) и отрицательных – для (21а,б)) на случай, например, кулоновской квантово-классической системы, а также осуществить их квантование. Мы не исключаем и другие возможные приложения этих уравнений в физике и геометрии (некоторый регулярный метод получения $(2+0)$ уравнений в дифференциальной геометрии поверхностей дан в [27]).

6. При $f(z,\bar z)=\pm\sin u$ из (9) будем иметь уравнения:

$$\partial\bar\partial u=\pm\cos u. \tag{29а,б}$$

Как и все рассмотренные выше, они являются интегрируемыми. Их физические приложения автору не известны, за исключением, пожалуй, возможности рассматривать их как модели специально выбранных стационарных полей течений в динамике идеальной несжимаемой жидкости [28].

Формулы связи решений для уравнения (29а) дают:

$$(\partial_x\vec S)^2=2(1+\sin u),\quad (\partial_y\vec S)^2=-2(1-\sin u),$$

а КЭ с задачей (1)–(2) достигается при $S\in su(1,1)$, (25), асимптотике (2) и ограничениях на $\mathcal{M}^{(\vec S)}$ вида:

$$0\leqslant(\partial_xS^1)^2+(\partial_xS^2)^2-(\partial_xS^3)^2\leqslant 4$$
$$0\leqslant(\partial_yS^3)^2-(\partial_yS^1)^2-(\partial_yS^2)^2\leqslant 4,$$

причем $u(x,0)\to\frac{\pi}{2}\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)$, $|x|\to\infty$.

2а. Возвращаясь к случаю 2., будем считать, что $S\in su(1,1)$, а также справедливы соотношения (27), (28) и $u(0,y)\to 0$, $|y|\to\infty$. Тогда КЭ будет достигаться для $O(2,1)$ σ-модели, заданной в правой полуплоскости и при выполнении ограничений

$$(\partial_xS^1)^2+(\partial_xS^2)^2-(\partial_xS^3)^2\geqslant 0$$
$$(\partial_yS^1)^2+(\partial_yS^2)^2-(\partial_yS^3)^2\geqslant 4$$

Очевидно, что эту серию интегрируемых уравнений можно продолжить и далее, получив их бесконечный набор. При этом “фазовые” пространства σ-моделей будут разбиваться на непересекающиеся области, каждой из которых соответствует своя интегрируемая система с определенным представлением нулевой кривизны.

4. Некоторые точные решения

В этом параграфе мы построим точные решения уравнения (26а) и покажем, как из них можно получить некоторые решения (20).

Перепишем уравнение (26а) в несколько более общем виде:

$$\partial\bar{\partial}u = \gamma \operatorname{sh}\beta u + \beta\frac{\partial u\bar{\partial}u}{e^{2\beta u}-1}, \tag{30}$$

где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ – постоянные. В качестве метода интегрирования (30) будем использовать преобразование Дарбу. Для этого удобно перейти к другой, по сравнению с (12), калибровке соответствующих матриц A и B:

$$\begin{gathered}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{\beta e^{\beta u}\partial u}{\sqrt{e^{2\beta u}-1}} & \frac{i\lambda\gamma}{2} \\ \frac{i\lambda\gamma}{2} & \frac{\beta e^{\beta u}\partial u}{\sqrt{e^{2\beta u}-1}}\end{pmatrix}, \\ B = \frac{1}{2\lambda}\begin{pmatrix} 0 & i\beta(-e^{\beta u}+\sqrt{e^{2\beta u}-1}) \\ -i\beta(-e^{\beta u}+\sqrt{e^{2\beta u}-1}) & 0\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{31}$$

Пусть $\psi = \psi(z, \bar{z}, \lambda) \in \operatorname{Mat}(2, \mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, $\psi_1 = (\varphi, \chi)^T$. Тогда функции φ, χ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned}\partial\varphi &= -\frac{\beta e^{\beta u}\partial u}{2\sqrt{e^{2\beta u}-1}}\,\varphi + \frac{i\lambda\gamma}{4}\,\chi \\ \partial\chi &= \frac{i\lambda\gamma}{4}\varphi + \frac{\beta e^{\beta u}\partial u}{2\sqrt{e^{2\beta u-1}}}\,\chi.\end{aligned} \tag{32}$$

Пусть u – затравочное решение – некоторое фиксированное решение (30). Проверим дарбу-ковариантность (32): $u \to u[1]$, $\varphi \to \varphi[1]$, $\chi \to \chi[1]$, где $u[1]$ – значение искомого потенциала, соответствующее значению параметра $\lambda = \lambda_1$, $\varphi[1] = \partial\varphi - \sigma\varphi$, $\chi[1] = \partial\chi - \tau\chi$, $\sigma = \partial\varphi_1/\varphi_1$, $\tau = \partial\chi_1/\chi_1$, а φ_1, χ_1 – решения (32) при $\lambda = \lambda_1$; при этом $\varphi[1] = \frac{i}{4}[\lambda\chi - \lambda_1(\chi_1/\varphi_1)\varphi]$, $\chi[1] = \frac{i}{4}[\lambda\varphi - \lambda_1(\varphi_1/\chi_1)\chi]$. Подставляя выражения для $\varphi[1]$, $\chi[1]$, содержащие зависимость от σ и τ, в (32), найдем следующую формулу для дарбу-“одевания”:

$$u[1] = \frac{1}{\beta}\ln\frac{(e^{\beta u}+\sqrt{e^{2\beta u}-1})\left(\frac{\varphi_1}{\chi_1}\right)^4+1}{2[e^{\beta u}+\sqrt{e^{2\beta u}-1}]\left(\frac{\varphi_1}{\chi_1}\right)^2} \tag{33}$$

Для определения явной зависимости φ_1, χ_1 от x, y, перепишем в этих переменных систему (32), полагая $u = 0$, $\lambda = \lambda_1$. Тогда

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(Ae^{\varkappa_1} + \frac{C}{A}e^{-\varkappa_1}\right), \quad \chi_1(x,y) = \frac{1}{2}\left(Ae^{\varkappa_1} - \frac{C}{A}e^{-\varkappa_1}\right), \tag{34}$$

где $\varkappa_1 = \frac{i}{2}\left(\frac{\lambda_1\gamma}{2} - \frac{\beta}{\lambda_1}\right)x - \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1\gamma}{2} + \frac{\beta}{\lambda_1}\right)y$, A, C – произвольные постоянные. Очевидно, что вещественность $u[1]$ будет обеспечена, если $A, C \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Из (33) с учетом (34) найдем "односолитонное" решение в виде:

$$u[1] = \frac{1}{\beta}\ln\frac{2 + \operatorname{sh}^2[2(\varkappa + \ln\delta)]}{\operatorname{sh}^2[2(\varkappa + \ln\delta)]}, \tag{35}$$

где $\varkappa = -\sqrt{\frac{\beta\gamma}{2}}(x\sin\theta + y\cos\theta)$, $\delta = \ln\frac{A}{\sqrt{C}}$, $A, C > 0$. Таким образом, ответ представляет собой непериодическую функцию и описывает пространственное распределение "потенциала" на $\mathbb{R}^2_+$ с характерными размерами $\sim (\sin\theta)^{-1}$ по x и $\sim (\cos\theta)^{-1}$ по y. Заметим также, что решение (35) является сингулярным на прямой $\varkappa + \ln\delta = 0$.

Перейдем к двукратному дарбу-"одеванию". Снова полагая затравочное решение равным нулю, из (33) будем иметь:

$$u[2] = \frac{1}{\beta}\ln\frac{1 + M^4}{2M^2}, \quad M = \frac{\lambda_2\varphi_1\chi_2 - \lambda_1\chi_1\varphi_2}{\lambda_2\varphi_2\chi_1 - \lambda_1\chi_2\varphi_1}. \tag{36}$$

Пусть вначале $\lambda_k = \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma}}e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$. Тогда $\varphi_k = A_k e^{\varkappa_k} + iB_k e^{-\varkappa_k}$, где $\varkappa_k = \overline{\varkappa_k}$, $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, а требование вещественности $u[2]$ приводит к условию $\varphi_k = \overline{\chi_k}$. Тогда (36) дает "двухсолитонное" решение

$$u[2] = \frac{1}{\beta}\ln\left\{2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\theta + v^2}{\operatorname{tg}^2\theta - v^2}\right)^2 - 1\right\}, \tag{37}$$

где $\theta = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$, $v = \operatorname{sh}(\varkappa_1 - \varkappa_2 + \delta_1)/\operatorname{sh}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \delta_2)$, $\varkappa_k = -\sqrt{\frac{\beta\gamma}{2}}(x\sin\theta_k + y\cos\theta_k)$, $k = 1, 2, \delta_1 = \frac{1}{2}\ln|B_2A_1/(B_1A_2)|$, $\delta_2 = \frac{1}{2}\ln|A_1B_1A_2B_2|$, δ_1, δ_2 – произвольные постоянные.

Решения (35) и (37) представляют собой аналоги соответственно одно- и двухкинкового ответов уравнения sin-Гордон в пространстве Минковского [5]. Отметим, что, кроме того, при

$\gamma = 0$ они становятся константами, не удовлетворяющими (17), т.е. в чисто "квантовом" варианте (в отсутствии в (30) первого члена) они не применимы.

Пусть теперь значения λ_1, λ_2 связаны соотношением $\lambda_1\bar{\lambda}_2 = \frac{2\beta}{\gamma}$. Тогда $\varkappa(\lambda_1) = \bar{\varkappa}(\lambda_2)$ и требование вещественности приводит к равенствам: $\varphi_1 = \bar{\varphi}_2$, $\chi_1 = \bar{\chi}_2$, где $\varphi_k = A_k e^{\varkappa_k} + B_k e^{-\varkappa_k}$, $\chi_k = A_k e^{\varkappa_k} - B_k e^{-\varkappa_k}$, $A_k, B_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$. Подставляя их в (37), найдем что

$$u_B[2] =$$
$$= \frac{1}{\beta} \ln \left\{ 2 \left[\frac{(|\lambda_1|^2 - c)^2 \operatorname{sh}^2[2(\varkappa_{1_R} + \delta_1)] - (|\lambda_1|^2 + c) \sin^2[2(\varkappa_{1_I} + \delta_2)]}{(|\lambda_1|^2 - c)^2 \operatorname{sh}^2[2(\varkappa_{1_R} + \delta_1)] + (|\lambda_1|^2 + c)^2 \sin^2[2(\varkappa_{1_I} + \delta_2)]} \right]^2 - 1 \right\}, \tag{38}$$

где $c = \frac{2\beta}{\gamma}$, δ_1, δ_2 – произвольные постоянные, $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i\theta}$, $\varkappa_1 = \varkappa_{1_R} + i\varkappa_{1_I}$,

$$\varkappa_{1_R} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{2}|\lambda_1| + \frac{\beta}{|\lambda_1|}\right)(x \sin\theta_1 + y\cos\theta_1),$$
$$\varkappa_{1_I} = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{2}|\lambda_1| - \frac{\beta}{|\lambda_1|}\right)(x \cos\theta_1 - y\sin\theta_1).$$

Решение (38) является аналогом решения типа "бризер" для уравнения sin-Гордон в размерности (1 + 1) [5]. Очевидно, что оно остается справедливым и при $\gamma = 0$.

Используя теперь соотношение $u = \ln \operatorname{ch} v$, где u и v произвольные решения уравнений (30) и (20) соответственно, а также (35), получим "однокинковое" решение уравнения sh-Гордон ($\beta = 1$, $\gamma = 2$):

$$v(x, y) = \ln \operatorname{cth}^2[x \sin\theta + y\cos\theta + \delta].$$

Так же, как и (35) оно является сингулярным. Аналогично можно найти и "двухкинковое" решение этого уравнения:

$$v(x, y) = 2 \ln \frac{\operatorname{tg}\theta \operatorname{ch}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \delta_2) + \operatorname{sh}(\varkappa_1 - \varkappa_2 + \delta_1)}{\operatorname{tg}\theta \operatorname{ch}(\varkappa_1 + \varkappa_2 + \delta_2) - \operatorname{sh}(\varkappa_1 - \varkappa_2 + \delta_1)}.$$

Решение же типа "бризер" этим способом получить нельзя: рассмотренная замена в этом случае не работает и уравнение sh-Гордон надо решать независимо.

5. Связь с моделью Гетманова и уравнением Бицадзе

В [10] была предложена релятивистски-инвариантная модель теории поля, которая в эллиптическом варианте и однокомпонентном случае имеет вид:

$$\partial\bar{\partial}w = -w(1-w^2) - \frac{w\partial w\bar{\partial}w}{1-w^2}, \quad w = \bar{w}. \tag{39}$$

Уравнение (39) будем называть эллиптической моделью Гетманова (близкое к этому уравнение недавно было рассмотрено в [29] для комплекснозначной функции). Известно, что в гиперболическом варианте эта модель КЭ уравнению sin-Гордон в пространстве Минковского [10]. Решение (39) легко связать с решением уравнения (9): $f = 1 - 2w^2$. Это позволяет, в частности, из (16) получить плотность производящего функционала для (39): $\hat{F}^{(g)} = 8(\partial w\bar{\partial}w/(w^2-1) + w^2)$.

В [30] А. В. Бицадзе предложил рассмотреть класс систем квазилинейных уравнений, порождаемых плотностью производящего функционала вида

$$\hat{F}^{(B)} = \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(u_1,\ldots,u_n)\nabla u_i \nabla u_j,$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $g^{ij} = g^{ji}$ – известные функции, $i,j = 1,\ldots,m$, и в ряде случаев нашел частные решения. Построенные им системы имеют приложения в теории ферромагнетизма и гравитации и оказываются близкими к рассмотренным в данной работе. Поэтому остановимся на связи результатов Бицадзе и полученных выше.

В скалярном варианте уравнения Бицадзе сводятся к следующему [30]:

$$\Delta u = -\frac{\partial_u g(u)}{2g(u)}(\nabla u)^2. \tag{40}$$

Сравнив (40) с (30) при $\gamma = 0$, $\beta = 1$, найдем, что последнему соответствует выбор функции g в форме: $g(u) = e^{2u}/(e^{2u}-1)$. Сопоставляя теперь (40) с (9), легко найти условие на функцию g, приводящее их друг другу и при котором уравнение Бицадзе будет заведомо интегрируемым:

$$g(u) = \exp\left\{2\int^{u}\left[\frac{u}{1-u^2} - 4\frac{1-u^2}{(\nabla u)^2}\right]du\right\}.$$

Рассмотрим теперь интегрируемость (40) при произвольной гладкой функции g, положив $\tilde{F}(u) = \frac{1}{2}\partial_u \ln g$ (считая для простоты $g > 0$). Для этого воспользуемся условием нулевой кривизны (11), выбрав матрицы A и B в виде:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} G(u)\partial u & 0 \\ 0 & -G(u)\partial u \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{P(u)}{2\lambda} \\ -\frac{Q(u)}{2\lambda} & 0 \end{pmatrix}, \tag{41}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, $u = u(z, \bar{z})$, а функции G, P и Q определяются с помощью соотношений

$$\bar{\partial} \ln G = \tilde{F}(u)\bar{\partial}u, \quad \partial \ln P = G(u)\partial u, \quad \partial \ln Q = -G(u)\partial u. \tag{42}$$

Таким образом, интегрируемость уравнения (40) доказана. В специальном частном случае выбора функции $g(u)$: $g(u) = (e^u - 1)^2$, для которого в [30] найдено частное решение, зависящее от произвольной гармонической функции, в (41), (42) будем иметь: $G(u) = e^u - 1$, $P(u) = \exp[\exp(u) - 1]$, $Q(u) = (P(x))^{-1}$.

Аналогично этому, рассматривая уравнение (30) при $\gamma = 0$, $\beta > 0$, нетрудно видеть, что подстановками $u = (1/\beta)\ln\cos u_1$ ($u \leqslant 0$) и $u = (1/\beta)\ln \operatorname{ch} u_2$ ($u \geqslant 0$) оно линеаризуется и приводится к уравнениям Лапласа $\partial\bar{\partial}u_1 = \partial\bar{\partial}u_2 = 0$.

6. Заключение

Ключевую роль во всех построениях работы играли нормировка вектора $\vec{S}$ и равенства (2). Отказ от первого из этих требований приводит к обобщениям модели (1). Такое обобщение было выполнено в [31] для случая $\vec{S}^{\,2} = \alpha(x, y)$, где $\alpha(x, y)$ – произвольная функция координат, которая может зависеть также от дополнительного параметра, например, от температуры. В случае $\partial\bar{\partial}\alpha = 0$ получающееся уравнение оказывается интегрируемым и соответствует σ-модели в искривленном пространстве. Выбор иной (по сравнению с (2)) асимптотики (классического вакуума) приводит и к иному соответствию моделей (см. [32]). Условие же (3) не является жестким [33]: если $P_0 = \partial S \cdot S^{-1}$, $Q_0 = \bar{\partial} S \cdot S^{-1}$, $\det P_0 = p^2(z)$, $\det Q_0 = q^2(\bar{z})$ (p, q – произвольные функции), то подстановки $P_0(z, \bar{z}) = p(z)P_1(z_1, \bar{z}_1)$, $Q_0(z, \bar{z}) = q(\bar{z})Q_1(z_1, \bar{z}_1)$,

$$z_1 = \int dz p(z), \quad \bar{z}_1 = \int d\bar{z} q(\bar{z})$$

не меняют вида условий (3).

Если, наконец, предположить, что функция $f(z,\bar z)$ может быть комплекснозначной, а уравнение (9) переписать в несколько более общем виде

$$\partial\bar\partial f = \delta(1-f^2) - \frac{f\partial f\bar\partial f}{1-f^2},$$

где $\delta = i$, то полагая $f(z,\bar z) = \pm i\operatorname{sh} u(z,\bar z)$, получим уравнения $\pm$ch-Гордон:

$$\partial\bar\partial u = \pm\operatorname{ch} u,$$

которые, очевидно, также являются интегрируемыми.

Отметим, что связь уравнений sin- и sh-Гордон с помощью преобразования Беклунда обсуждалась в [34].

Установленные в работе варианты КЭ ряда моделей на полуплоскости с моделью (1)–(2), строго говоря, нуждаются в более аккуратном математическом доказательстве, включая демонстрацию переходов от этих моделей к σ-модели. В каждом конкретном случае это может быть осуществлено с помощью соответствующих ассоциированных линейных задач и построении матриц калибровочного преобразования.

Исследование КЭ, подобное предложенному в данной работе, по-видимому, можно перенести и на случай гиперболических уравнений.

Автор благодарен Л. М. Баскину, В. Д. Липовскому, В. Н. Попову, М. А. Саллю и А. В. Широкову за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

1. K. Pohlmeyer, — Commun. Mat. Phys. **46** (1976 No. 3), 207.
2. H. Eichenherr, K. Pohimeyer, — Phys. Lett. **89B** (1979), 76.
3. K. Pohlmeyer, K.-H. Rehren, — J. Math. Phys. **20** (1976), 2628.
4. М. Г. Цейтлин, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 2.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **101** (1980), 196.
5. Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М, Наука, 1986.
6. В. Д. Липовский, А. В. Широков, *Функц. анализ и его прилож.*. т. 23, No. 3, 1989, с. 65.
7. Е. Ш. Гутшабаш, — Вестник ЛГУ, сер. физика, химия (1990, No. 4), 84.
8. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, — ТМФ **104, No. 3** (1992), 258; Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, ТМФ, **104**, No. 3 (1995), 513.

9. Дж. Смарт, *Эффективное поле в теории магнетизма.* М, Мир, 1968.
10. Б. С. Гетманов, — Письма в ЖЭТФ **25, No. 2** (1977), 132.
11. F. Lund, T. Regge, — Phys. Rev. **14D** (1976), 1524.
12. G. Jouce, D. Montgomeri, — J. Plasma Phys. **10,** No. **1** (1973), 107.
13. R. Jackiw, So-Young-Pi, — Progr. Theor. Phys. Suppl. **107** (1992), 1.
14. А. И. Бобенко, — УМН **46, No. 4** (1991), 3.
15. Ю. Б. Мовсесянц, — ЖЭТФ **91, No. 2** (1986), 493.
16. В. Д. Липовский, С. С. Никуличев, — Вестник ЛГУ, сер. физика, химия No. 4 (1989), 61.
17. М. В. Бабич, — Алгебра и анализ **2, No. 3** (1990), 63.
18. Ю. А. Марков, — ТМФ **91, No. 1** (1992), 129.
19. А. Б. Борисов, Г. Г. Талуц, А. П. Танкеев Г. В. Безматерных,, — В сб.: "Современные проблемы теории магнетизма" (1986), Киев, Наукова думка.
20. А. Бароне, Дж. Патерно, *Эффект Джозефсона.* — Физика и применение (1984), М, Мир.
21. A. B. Borisov, — Phys. Lett., **A143,1,2** (1990), 52.
22. М. В. Бабич, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, А. В. Рыбин, М. А. Салль, А. О. Смирнов, *Высокотемпературная сверхпроводимость.* — Межвед. сб.. № 3 (1991), Л.
23. Yu. B. Gaididei, A. S. Trofimov, — Preprint ITP-88-38E (1988), Kiev.
24. О. Л. Пашаев, С. А. Сергеенков, — Препринт ОИЯИ, No. Р2-85-481 (1985), Дубна.
25. R. Leo, L. Martina, G. Soliani, — J. Math. Phys. **33** (1992), 1515.
26. А. Д. Попов, — ЯФ **55, No. 12** (1992), 3371.
27. Э. Г. Позняк, А. Г. Попов, — Докл. Акад. наук **332, No. 4** (1993), 418.
28. О. В. Капцов, — Докл. Акад. наук СССР **298** (1988), 597.
29. I. V. Barashenkov, B. S. Getmanov, — J. Math. Phys. **34, 7** (1993), 3054.
30. А. В. Бицадзе, *Уравнения математической физики.* М, Наука, 1982.
31. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский, *Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **199** (1992), 71.
32. L. Martina, O. Pashaev, G. Soliani, — Phys. Rev. B. **48, 21** (1993), 87–91.
33. V. E. Vekslerchik, — Phys. A. **27, 18** (1994), 6299–6313.
34. A. B. Borisov, V. V. Kiselyev, — Physica D. **31** (1988), 49–64.

Gutshabash E. Sh. The transformation of Pohlmeyer and $(2+0)$ integrable equations of statistical physics.

Using the transformation of Pohlmeyer in euclidean space it obtained the equation, which provide the possibility to construct the wide class of two-dimensional elliptical integrable systems. The question on a gauge equivalence of this systems with nonlinear sigma-model and Getmanov and Bitzadze models is investigated. The exact solution of some equations are constructed.

С.-Петербургский государственный университет

Поступило 1 марта 1996 г.