Е. В. Дамаскинский, М. А. Соколов

q–БОЗОНИЗАЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ КВАНТОВЫХ ГРУПП

1. Цель настоящей заметки – указать простой способ q-бозонизации ортогональных и симплектических квантовых групп [1]. Она является продолжением работ [2, 3] в которых были изучены свойства гауссова разложения квантовых групп и построена q-бозонная реализация генераторов группы $GL_q(n)$. Напомним, вкратце, терминологию работ [1–3].

Основным уравнением R-матричной формулировки теории квантовых групп является уравнение

$$RT_1T_2 = T_2T_1R. \tag{1}$$

Оно является краткой записью однородных квадратичных соотношений на n^2 генераторов t_{ij}, $(i, j = 1, 2, ..., n)$ квантовой группы. Элементы числовой $n^2 \times n^2$ матрицы R играют роль структурных постоянных. Обозначения $T_1 = T \otimes I$, $T_2 = I \otimes T$, где $T = (t_{ij})$ – $n \times n$-матрица генераторов квантовой группы, стандартны для R-матричного формализма [1]. В определение ортогональных и симплектических квантовых групп входит дополнительное условие [1]

$$TCT^tC^{-1} = 1 = CT^tC^{-1}T, \tag{2}$$

являющееся квантовым аналогом условий на матрицы классических ортогональных и симплектических групп. В соотношении (2) T^t – матрица, транспонированная к T, а C – числовая матрица, приведенная (как и соответствующие R-матрицы), например, в [1]. Гауссово разложение, впервые рассмотренное в [4], было детально изучено в [2, 3]. Это факторизация матрицы генераторов T вида

$$T = T_LT_DT_U = T_LT^{(+)} = T^{(-)}T_U. \tag{3}$$

В соотношении (3) $T_L = (l_{ik})$ – строго нижнетреугольная матрица (с единицами на главной диагонали $l_{kk} = 1$); $T_D = \mathrm{diag}(A_{kk})$; $T_U = (u_{ik})$ – строго верхнетреугольная $(u_{kk} = 1)$; $T^{(+)} = T_DT_U$ и $T^{(-)} = T_LT_D$.

Новые генераторы, вводимые такой факторизацией, также удовлетворяют квадратичным перестановочным соотношениям:

$$RT_1^{\pm}T_2^{\pm} = T_2^{\pm}T_1^{\pm}R \tag{4}$$

$$R_dT_1^{+}T_2^{-} = T_2^{-}T_1^{+}R_d \tag{5}$$

$$T_{L1}T_{U2} = T_{U2}T_{L1} \tag{6}$$

(другие соотношения, см. в [3]). В уравнении (5) R_d – диагональная часть R-матрицы $R_d = \mathrm{diag}R$. Особо отметим, следующую из (6), коммутативность генераторов l_{ik} и u_{jl}.

q-Бозонизацией квантовой группы называют реализацию генераторов группы операторами рождения и уничтожения деформированных осцилляторов [5], т.е. гомоморфизм алгебры функций $\mathrm{Fun}_q(G)$ в алгебру, порождаемую генераторами $\{a_i^\dagger, a_j, N_k\}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, N$ семейства N независимых q-осцилляторов. Эти операторы удовлетворяют соотношениям

$$a_i\, a_j^\dagger - q^{\delta_{i\,j}}\, a_j^\dagger\, a_i = \delta_{i\,j}\, q^{-N_i}, \tag{7}$$

$$N_i a_i^\dagger = a_i^\dagger(N_i + 1), \qquad N_i a_i = a_i(N_i - 1) \tag{8}$$

а остальные генераторы коммутируют.

Отметим, что иногда дополнительно требуют выполнения соотношений

$$a_i\, a_j^\dagger - q^{-\delta_{i\,j}}\, a_j^\dagger\, a_i = \delta_{i\,j} q^{N_i}. \tag{9}$$

Хорошо известно, что в этом случае алгебра осциллятора допускает только фоковские представления, тогда как без дополнительного предположения возможны представления отличные от представления Фока [6].

Для квантовых алгебр q-бозонизация была осуществлена в работе [7]. Для квантовых групп эта задача решена только для групп серии A_n, тогда как в случае ортогональных и симплектических квантовых групп она имеет только частичное решение для конкретных групп младшей размерности. Этот пробел заполняется данной работой.

2. Используя свойства оператора перестановки $P\,:\, P^2 = \mathbb{I}$, $P\,A_1\,P = A_2$, (где A – любая матрица), перестановочные соотношения генераторов квантовой алгебры [1]

$$R^{(+)}\, L_1^{(\pm)}\, L_2^{(\pm)} = L_2^{(\pm)}\, L_1^{(\pm)}\, R^{(+)}, \qquad R^{(+)} = PRP,$$

можно записать в виде аналогичном соотношению (4):

$$R\left(L_1^{(\pm)}\right)^{-1}\left(L_2^{(\pm)}\right)^{-1}=\left(L_2^{(\pm)}\right)^{-1}\left(L_1^{(\pm)}\right)^{-1}R. \qquad (10)$$

Здесь мы учли, что матрицы $L^{(\pm)}$ для квантовых групп классических серий треугольны, а их диагональные элементы, по определению квантовых алгебр [1], – обратимы

$$\mathrm{diag}L^{(+)}\,\mathrm{diag}L^{(-)}=\mathbb{1}. \qquad (11)$$

Поэтому произвольный элемент матриц $\left(L^{(\pm)}\right)^{-1}$ может быть записан как полином по $l_{ij}^{(\pm)}$ при $i\neq j$ и величинам $\left(l_{ii}^{(\pm)}\right)^{-1}$ обратным диагональным элементам матриц $L^{(\pm)}$.

Так как дополнительные соотношения (2) справедливы и для генераторов квантовых алгебр, то имеем изоморфизм

$$T^{(\pm)}\simeq\left(L^{(\pm)}\right)^{-1}.$$

При этом изоморфизме элементам $t_{i,i+1}^{(+)}$, $t_{i+1,i}^{(-)}$ борелевских матриц $T^{(\pm)}$ соответствуют элементы $l_{i,i+1}^{(+)}$, $l_{i+1,i}^{(-)}$ матриц $L^{(\pm)}$, отвечающие простым корням недеформированной алгебры [1]:

$$t_{i,i+1}^{(+)}\leftrightarrow-\left(l_{ii}^{(+)}\right)^{-1}l_{i,i+1}^{(+)}\left(l_{i+1,i+1}^{(+)}\right)^{-1};$$

$$t_{i+1,i}^{(-)}\leftrightarrow-\left(l_{i+1,i+1}^{(-)}\right)^{-1}l_{i+1,i}^{(-)}\left(l_{ii}^{(-)}\right)^{-1}.$$

(кроме элементов $t_{n-1,n+1}^{(+)}$ и $t_{n+1,n-1}^{(-)}$, соответствующих $X_n^{(+)}$ и $X_n^{(-)}$ в алгебре серии D_n).

Следовательно, для q-бозонизации борелевских подалгебр достаточно воспользоваться реализацией [7] и найти элементы матриц $\left(L^{(\pm)}\right)^{-1}$ (напомним, что диагональные элементы $l_{ii}^{(\pm)}$ обратимы).

Поскольку элементы

$$(T_U)_{ij}=(t_{ii})^{-1}t_{ij}^{(+)} \qquad \text{и} \qquad (T_L)_{ji}=t_{ji}^{(-)}(t_{ii})^{-1} \qquad i\leq j,$$

коммутируют, то для q-бозонизации всей квантовой группы естественно использовать два независимых (взаимно коммутирующих) семейства q-осцилляторов, каждое из которых надо применять для бозонизации одной из борелевских подалгебр.

Из сказанного выше следует, что q-бозонизацию квантовой группы можно рассматривать как бозонизацию дуальной квантовой алгебры, которая, в силу свойств коммутативности (6) сводится к независимой бозонизации борелевских подалгебр. Таким образом эта задача более простая чем в случае квантовых алгебр и, очевидно, допускает большую свободу в выборе решений.

3. Потребуем, чтобы элементы $u_{i,\,i+1}$ и $l_{i+1,\,i}$ строго треугольных матриц T_U и T_L, соответствующие генераторам $X_i^{(\pm)}$ деформированных алгебр, удовлетворяли деформированным тождествам Серра [1] (здесь $i=1,2,...,n-1$ для серии A_{n-1}, $i=1,2,...,n$ для серии B_n и C_n, а в случае серии D_n генераторам $X_n^{(\pm)}$ соответствуют элементы $u_{n-1,\,n+1}$ и $l_{n+1,\,n-1}$).

Положим $T_D = T_D^{(-)} T_D^{(+)}$, так что

$$T_{D1}^{(+)} T_{L2} = T_{L2} T_{D1}^{(+)} \quad \text{и} \quad T_{D1}^{(-)} T_{U2} = T_{U2} T_{D1}^{(-)},$$

и определим $M^{(+)} = T_D^{(+)}\, T_U$ и $M^{(-)} = T^L\, T_D^{(-)}$. Тогда имеет место соотношение [4]

$$M_1^{(+)}\, M_2^{(-)} = M_2^{(-)}\, M_1^{(+)}. \tag{12}$$

Перестановочные соотношения в борелевских подгруппах будут выполнены если потребовать справедливость соотношений

$$[m_{i\,i}^{(\pm)},\, m_{j\,j}^{(\pm)}] = 0;$$

$$m_{i\,i}^{(+)},\, m_{j,\,j+1}^{(+)} = q^{d(\delta_{i\,j}-\delta_{i,\,j+1}}\, m_{j,\,j+1}^{(+)}\, m_{i\,i}^{(+)}; \tag{13}$$

$$m_{i\,i}^{(-)},\, m_{j+1,\,j}^{(-)} = q^{d(\delta_{i\,j}-\delta_{i,\,j+1}}\, m_{j,\,j+1}^{(-)}\, m_{i\,i}^{(-)};$$

В этих формулах $i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,n-1$ для серий A_{n-1} и D_n, $j=1,2,...,n$ для серий B_n и C_n; $d=2$ в серии C_n, а для остальных $d=1$. Кроме того для серии D_n дополнительно имеем

$$m_{k\,k}^{(+)},\, m_{n-1,\,n+1}^{(+)} = q m_{n-1,\,n+1}^{(+)}\, m_{k\,k}^{(+)};$$

$$m_{k\,k}^{(-)},\, m_{n+1,\,n-1}^{(-)} = q m_{n+1,\,n-1}^{(-)}\, m_{k\,k}^{(-)}; \quad (k=n-1,n) \tag{14}$$

4. Пусть $\{a_i^\dagger\, a_j\, N_k\}$ и $\{b_i^\dagger\, b_j\, M_k\}$, $i=1,2,....n$ – два независимых семейства q-осцилляторов. q-Бозонизация квантовых групп описывается формулами

$$GL_q(n)\ :\ \begin{cases} m^{(+)}_{i\,i} \mapsto q^{M_i}, & i=1,...,n \\ m^{(+)}_{i\,i+1} \mapsto \frac{\lambda}{q} q^{M_i} b^\dagger_i b_{i+1}, & i=1,...,n-1 \\ m^{(-)}_{i\,i} \mapsto q^{-N_i}, & i=1,...,n \\ m^{(-)}_{i+1\,i} \mapsto q\lambda a^\dagger_{i+1} a_i q^{-N_i}, & i=1,...,n-1 \end{cases} \tag{15}$$

В случае остальных групп к соотношениям (15) нужно добавить соответственно соотношения

$$SO_q(2n+1)\ :\ m^{(+)}_{n\,n+1} \mapsto \alpha q^{M_n} b^\dagger_n, \quad m^{(-)}_{n+1\,n} \mapsto \beta a_n q^{-N_n};$$

$$Sp_q(2n)\ :\ m^{(+)}_{n\,n+1} \mapsto \gamma q^{M_n} \left(b^\dagger_n\right)^2, \quad m^{(-)}_{n+1\,n} \mapsto \delta (a_n)^2 q^{-N_n};$$

$$SO_q(2n)\ :\ m^{(+)}_{n-1\,n+1} \mapsto \mu q^{M_{n-1}-M_n} b^\dagger_n b^\dagger_{n-1},$$
$$m^{(-)}_{n+1\,n-1} \mapsto \nu a_n\, a_{n-1}\, q^{N_n - N_{n-1}}.$$

В этих формулах $\alpha,...,\nu$ – произвольные постоянные. Коэффициенты в записи генераторов $m^{(+)}_{i,\,i+1}$ и $m^{(-)}_{i+1,\,i}$, $i \le (n-1)$, выбраны так, что при формальном отождествлении операторов $a^\dagger_i \equiv b^\dagger_i$ и $a_j \equiv b_j$ воспроизводится q-бозонизация алгебры $sl_q(n)$. Для получения q-бозонизации квантовой группы $SL_q(n)$ достаточно все элементы $m^{(\pm)}_{i,\,i}$ и $m^{(\pm)}_{i,\,j}$ с $|i-j|=1$ домножить на $q^{<N>}$ при $i>j$ и на $q^{-<M>}$ при $i \leqslant j$, где $<N>= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n N_i$

5. Для придания большей наглядности описанной выше схеме q-бозонизации, рассмотрим, в качестве примера, случай группы $Sp_q(2n)$. Обозначим $Q^N = q^{-N} + \lambda a^\dagger a$ (в случае когда q-осцилляторы удовлетворяют дополнительному соотношению имеем $Q^N = q^N$). Пусть далее

$$N^k_i = \begin{cases} \sum_{l=i}^k N_l & i \le k \\ 0 & i > k \end{cases}; \quad Q^{N^k_i} = \prod_{l=i}^k Q^{N_l};$$

$$\bar\theta(i) = \begin{cases} 1, & i \ge 0; \\ 0, & i < 0. \end{cases}$$

Мы будем использовать, также, стандартные соглашения $i' = 2n+1-i$, $\quad \lambda = (q-q^{-1})$. В этих обозначениях имеем

$$m^{(+)}_{i\,i} = q^{M_i}, \quad (i \le n); \quad m^{(+)}_{i\,i} = q^{-M'_i}, \quad (i \ge (n+1));$$

$$m_{i\,j}^{(+)} = \frac{\lambda}{q}\, q^{M_i}\, Q^{M_{i+1}^{j-1}}\, b_i^\dagger\, b_j, \quad (i < j \le n);$$

$$m_{i\,j}^{(+)} = -\lambda\, q^{i-j}\, q^{-M_{(j-1)'}^{i'}}\, b_{j'}^\dagger\, b_{i'}, \quad ((n+1) \le i < j \le 2n);$$

$$m_{i\,j}^{(+)} = \lambda\, q^{n+2-j+\bar\theta(j'-i)}\, q^{M_i} Q^{M_{(i+1)}^{n}}\, q^{-M_{(j-1)'}^{n}}\, b_{j'}^\dagger\, b_i^\dagger, \quad i \le n,\ j \ge (n+1);$$

$$m_{i\,i}^{(-)} = q^{-N_i}, \quad (i \le n); \quad m_{i\,i}^{(-)} = q^{N_{i'}}, \quad (i \ge (n+1)\,);$$

$$m_{i\,j}^{(-)} = -q\lambda a_i^\dagger\, a_j\, q^{N_j^{i-1}}, \quad (j < i \le n);$$

$$m_{i\,j}^{(-)} = \lambda\, q^{i-j}\, a_{i'}\, a_{j'}^\dagger\, Q^{N_{(i-1)'}^{(j+1)'}}\, q^{N_{j'}}, \quad (i > j \ge (n+1));$$

$$m_{i\,j}^{(-)} = \lambda\, q^{i-n-2+\bar\theta(i'-j)}\, a_{i'}\, a_j Q^{N_{(i-1)'}^{n} - N_j^n}, \quad 1 \le j \le i \le 2n;$$

Отметим, что в наших обозначениях эти формулы при $i, j \le n$ описывают q-бозонизацию квантовой группы $GL_q(n)$.

Благодарности.

Авторы признательны П. П. Кулишу и В. Д. Ляховскому за полезные обсуждения.

Работа выполнялась при частичной поддержке РФФИ (грант 95-01-00569-а).

Литература

1. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, — Алгебра и Анализ **1** (1989), 178–206.
2. E. V. Damaskinsky and M. A. Sokolov, *Some remarks on the Gauss decomposition of the quantum group $GL_q(n)$ with application to q-bosonization.* — J. Phys. A. **28** (1995), 3725–3732.
3. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, М. А. Соколов, *Разложения Гаусса квантовых групп и супергрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **224** (1995), 155–177.
4. L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtajan, *Quantum groups.* Braid group, Knot theory and Statistical Mechanics, C.N.Yang, M.-L.Ge (Eds.), World Sci. (1989), 97–110.
5. Е. В. Дамаскинский, П. П. Кулиш, *Деформированные осцилляторы и их приложения.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **189** (1991), 37–74.
6. П. П. Кулиш, — ТМФ **86, No. 1,** (1991), 158–160G. Rideau , *Lett. Math. Phys.*, **24**, 147–153 (1992) .
7. T. Hayashi, — Commun. Math. Phys. **127** (1990), 129–144.

Damaskinsky E. V., Sokolov M. A. q-Bosonization of orthogonal and symplectic quantum groups.

On the basis of the Gauss decomposition q-bosonization procedure is developed for orthogonal and symplectic quantum groups

Военный инженерный строительный институт

Поступило 1 октября 1996 г.

С.-Петербургский институт машиностроения