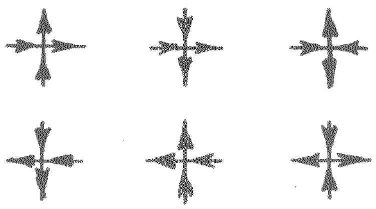
А. Г. Изергин, Е. Карьялайнен, Н. А. Китанин

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ СТАТСУММЫ ШЕСТИВЕРШИННОЙ МОДЕЛИ

Неоднородная шестивершинная модель была введена и решена в термодинамическом пределе, в случае периодических граничных условий Бакстером в работе [1]. Мы будем рассматривать статсумму шестивершинной модели на конечной квадратной решетке при других граничных условиях, которые обычно называют условиями доменной стенки. Эта статсумма была введена и исследована в работе [2], где для нее были получены рекуррентные соотношения. В работе [3] эти рекуррентные соотношения были решены; решение имеет вид определителя матрицы с размерностью, равной размерности решетки (см. также работу [4], где подробно изложены результаты работ [3, 2]).

Неоднородная шестивершинная модель формулируется следующим образом. В каждом узле возможны шесть конфигураций стрелок входящих и выходящих из узла, таких что число входящих и выходящих стрелок одинаково. Каждой конфигурации c соответствует статистический вес w_i, причем конфигурации получающиеся друг из друга оборотом всех стрелок имеют одинаковые веса



a $\qquad$ b $\qquad$ $c.$

a $\qquad$ b $\qquad$ $c.$

$$a \equiv w_1 = w_2, \quad b \equiv w_3 = w_4, \quad c \equiv w_5 = w_6. \tag{1}$$

Статсумма модели выражается через статистические веса a, b, c следующим образом

$$Z = \sum a^{n_a} b^{n_b} c^{n_c}, \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем возможным конфигурациям, а n_j – число узлов типа j.

Условия доменной стенки состоят в том, что на верхней и нижней границах все стрелки направлены внутрь, а на правой и левой – наружу.

В неоднородном случае статистические веса меняются от узла к узлу. Вводятся два множества спектральных параметров $\{\lambda_\alpha\}$ и $\{\nu_k\}$. Таким образом статистические веса в узле с координатами α и k (α – это номер строки, а k – номер столбца) зависят от пары спектральных параметров (λ_α, ν_k).

Статсумма неоднородной модели вычисляется при следующей параметризации

$$\begin{aligned} a(\lambda_\alpha, \nu_k) &= \mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k + i\eta) \\ b(\lambda_\alpha, \nu_k) &= \mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k - i\eta) \\ c(\lambda_\alpha, \nu_k) &= -i\sin(2\eta). \end{aligned} \tag{3}$$

В работах [2–4] для вычисления статсуммы применен квантовый метод обратной задачи. В результате как в однородном так и в неоднородном случае получено представление для статсуммы в виде детерминанта. В неоднородном случае статсумма выражается следующим образом

$$Z_N = (-1)^N \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{N} \prod\limits_{k=1}^{N} \mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k - i\eta)\mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k + i\eta)}{\prod\limits_{\alpha<\beta} \mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \lambda_b) \prod\limits_{k<1} \mathrm{sh}\,(\nu_l - \nu_k)} \det_N \mathcal{M}, \tag{4}$$

где матрица $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\mathcal{M}_{\alpha,k} = \frac{i\sin 2\eta}{\mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k - i\eta)\mathrm{sh}\,(\lambda_\alpha - \nu_k + i\eta)}. \tag{5}$$

В полностью однородном случае, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_N \equiv \lambda$ и $\nu_1 = \ldots = \nu_N \equiv \nu$, получено следующее выражение для статсуммы

$$Z_N = \frac{(i\sin 2\eta)^N \det \mathcal{H}}{\phi^{N^2}(x) \left[\prod\limits_{k=1}^{N-1} k!\right]^2}, \tag{6}$$

где введены следующие обозначения: $x = \lambda - \nu$,

$$\phi(x) = (\mathrm{sh}\,(x - i\eta)\mathrm{sh}\,(x + i\eta))^{-1},$$

а матрица $\mathcal{H}$ задается следующим образом

$$\mathcal{H}_{\alpha,k} = \frac{d^{\alpha+k-2}}{dx^{\alpha+k-2}}\,\phi(x). \tag{7}$$

Возможно также получить представление для статсуммы в частично однородном случае, когда совпадают только некоторые спектральные параметры. Сначала мы для примера приведем выражение для статсуммы в частном случае, когда $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n \equiv \lambda_1$, $\lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_N \equiv \lambda_2$ и $\nu_1 = \ldots = \nu_N \equiv \nu$. В этом случае для статсуммы получим

$$Z_N = \frac{(-i\sin 2\eta)^N \det_N \mathcal{F}}{\phi^{nN}(x_1)\phi^{(N-n)N}(x_2)\mathrm{sh}^{\,n(N-n)}(x_1 - x_2)\prod\limits_{\alpha=1}^{N-1}[\alpha!]\prod\limits_{\alpha=1}^{N-n-1}[\alpha!]}, \tag{8}$$

где $x_1 = \lambda_1 - \nu$, $x_2 = \lambda_2 - \nu$, а матрица $\mathcal{F}$ задается следующим образом

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha,k} &= \frac{d^{\alpha+k-2}}{dx_1^{\alpha+k-2}}\,\phi(x_1), \quad \alpha \leqslant n \\ \mathcal{F}_{\alpha,k} &= \frac{d^{\alpha+k-n}}{dx_2^{\alpha+k-2-n}}\,\phi(x_2), \quad a > n \end{aligned} \tag{9}$$

В наиболее общем частично однородном случае статсумма модели вычисляется по формуле

$$\begin{gathered} Z_N(n_1,\ldots,n_K,m_1,\ldots,M_L,\lambda_1,\ldots,\lambda_K,\nu_1,\ldots,\nu_L) = \\ = (-i\sin 2\eta)^N \prod_{k=1}^{K}\prod_{l=1}^{L}\phi^{-n_k m_l}(\lambda_k - \nu_l)\prod_{k_1\neq k_2}\mathrm{sh}^{\,-n_{k_1}n_{k_2}}(\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2})\times \\ \times\prod_{l_1\neq l_2}\mathrm{sh}^{\,-n_{l_1}n_{l_2}}(\nu_{l_1} - \nu_{l_2})\prod_{k=1}^{K}\left[\prod_{\alpha=1}^{n_k-1}\alpha!\right]^{-1}\prod_{l=1}^{L}\left[\prod_{\beta=1}^{m_l-1}\beta!\right]^{-1}\det_N\mathcal{F}, \end{gathered} \tag{10}$$

где выполнены следующие условия на n_i и m_j

$$\sum_{k=1}^{K} n_k = \sum_{l=1}^{L} m_l = N,$$

а матрица $\mathcal{F}$ задается следующим образом: если a попадает в промежуток $\sum_{k=0}^{k'} n_k < a \leqslant \sum_{k=0}^{k'+1} n_k$, а b попадает в промежуток $\sum_{l=0}^{l'} < b \leqslant \sum_{l=0}^{l'+1} m_l$ ($n_0 = m_0 = 0$, k' и l' принимают значения от 0 до $K-1$ и $L-1$ соответственно), то матричные элементы $\mathcal{F}_{a,b}$ имеют вид

$$\mathcal{F}_{a,b} = (-1)^{b-m'} \frac{\partial^{a-n'}}{\partial \lambda_{k'}^{a-n'}} \frac{\partial^{b-m'}}{\partial \nu_{l'}^{b-m'}} \phi(\lambda_{k'} - \nu_{l'}) \tag{11}$$

где

$$n' = \sum_{k=0}^{k'} n_k, \qquad m' = \sum_{l=0}^{l'} m_l$$

1. Однородный случай и уравнение Тоды

Результаты, касающиеся однородного случая, были недавно опубликованы [6]. Аналогичные результаты были ранее получены для другой модели в работе [5]. Они основываются на свойстве детерминантов матриц типа (7), которое было доказано еще в прошлом веке в работе [7]. Введем обозначение

$$S(N.x) = \det_N \mathcal{M}.$$

Упомянутое свойство функции $S(N,x)$ состоит в том, что она удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \ln S(N,x) = \frac{S(N+1,x)S(N-1,x)}{S(N,x)}. \tag{12}$$

Нетрудно заметить, что функция

$$\sigma(N,x) = \ln \frac{S(N+1,x)}{S(N,x)}$$

удовлетворяет уравнению Тоды

$$\frac{d^2}{dx^2} \sigma(N,x) = \exp(\sigma(N+1,x) - \sigma(N,x)) - \exp(\sigma(N,x) - \sigma(N-1,x)). \tag{13}$$

Следует отметить, что роль времени в уравнении Тоды, в нашем случае играет спектральный параметр шестивершинной модели.

Приведем краткое доказательство формулы (12). Рассмотрим набор из N произвольных не обращающихся в ноль гладких функций $\phi_1, \dots, \phi_N$. Введем обозначение

$$W_N(\phi_1, \dots, \phi_N) \equiv \det_N \mathcal{W}$$

$$\mathcal{W}_{j,k} = \frac{d^j}{dx^j}\,\phi_k(x).$$

Нетрудно доказать, что выполняется следующее рекуррентное соотношение

$$W_N(\phi_1, \dots, \phi_N) = \phi_1^N W_{N-1}\left(\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)', \dots \left(\frac{\phi_N}{\phi_1}\right)'\right). \qquad (14)$$

Продолжая эту процедуру, получим для W_N

$$W_N(\phi_1, \phi_N) = \phi_1^N \prod_{j=2}^{N} U_j^{N-j+1}(\phi_1, \dots, \phi_j), \qquad (15)$$

где

$$U_1(\phi) = \phi,$$

$$U_j(\phi_1, \phi_j) = \left[\frac{U_{j-1}(\phi_1, \dots, \phi_{j-2}, \phi_j)}{U_{j-1}(\phi_1, \dots, \phi_{j-2}, \phi_{j-1})}\right]'. \qquad (16)$$

Из (15) видно, что функция U_{N+1} может быть выражена через вронскианы W следующим образом

$$U_{N+1}(u_1, \dots, u_{N+1}) = \frac{W_{N+1}(u_1, \dots, u_{N+1}) W_{N-1}(u_1, \dots, u_{N-1})}{[W_N(u_1, \dots, u_N)]^2}. \qquad (17)$$

Вычислим теперь вторую логарифмическую производную функции W_N

$$\frac{d^2}{dx^2}\ln W_N(\phi_1, \dots, \phi_N) = \frac{d}{dx}\sum_{j=1}^{N}\frac{W_N(\phi_1, \dots, \hat{\phi}_j, \dots, \phi_N, \phi_j')}{W_N(\phi_1, \dots, \hat{\phi}_j, \dots, \phi_N, \phi_j)}, \qquad (18)$$

где $\hat{\phi}_j$ обозначает отсутствующий столбец ϕ_j. Воспользовавшись формулой (17) получим

$$\frac{d^2}{dx^3}\ln W_N(\phi_1,\dots,\phi_N)=$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{N} W_{N+1}(\phi_1,\dots,\phi_j,\phi_j',\dots,\phi_N)W_{N-1}(\phi_1,\dots,\hat{\phi}_j,\dots,\phi_N)}{[W_N(\phi_1,\dots,\phi_N)]^2} \tag{19}$$

Если теперь мы предположим, что

$$\phi_k(x)=\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\phi(x),$$

то все слагаемые в (19), кроме последнего, будут равны нулю и мы получим уравнение (12).

2. Неоднородный случай и уравнение Хироты

Рассмотрим теперь статсумму в неоднородном случае и воспользуемся так называемой формулой Якоби для детерминантов (см., например, [9]). Пусть $u_1,\dots,u_N$ произвольный набор функций заданных на решетке. Рассмотрим детерминант

$$W_n(u_1,\dots,u_n;l+1)=\epsilon_{k_1}u_1(l+k_1)\dots u_n(l+k_n). \tag{20}$$

Этот детерминант можно переписать в следующем виде

$$W_n(u_1,\dots,u_n;l)=\epsilon_{k_1\dots k_n}D^{k_n-1}u_1(l)\dots D^{k_1-1}u_n(l), \tag{21}$$

где

$$Df(k)=f(k+1)-f(k). \tag{22}$$

После несложных преобразований получим рекуррентное соотношение

$$W_n(u_1,\dots,u_n;l+1)=\left[\prod_{k=1}^{n}u_1(l+k)\right]W_{n-1}\left(D\frac{u_2}{u_1},\dots,D\frac{u_n}{u_1};l+1\right). \tag{23}$$

Продолжная эту процедуру, получим для W_n

$$W_n(u_1,\dots,u_n;l+1)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n-j+1}U_j(u_1,\dots,u_j;l+k), \tag{24}$$

где
$$U_1(u) = u$$
$$U_j(u_1,\dots,u_j;l+k) = D\frac{U_{j-1}(u_1,\dots,u_{j-2},u_j,l+k)}{U_{j-1}(u_1,\dots,u_{j-2},u_{j-1};l+k)}. \tag{25}$$

Из выражения (24) следуют следующие два равенства
$$U_{n+1}(u_1,\dots,u_{n+1};l+1) = \\ = \frac{W_{n+1}(u_1,\dots,u_{n+1};l+1)W_{n-1}(u_1,\dots,u_{n-1};l+2)}{W_n(u_1,\dots,u_n;l+1)W_n(u_1,\dots,u_n;l+2)} \tag{26}$$
$$\frac{W_n(u_2,\dots,u_{n+1};l+1)}{W_n(u_1,\dots,u_n;l+1)} = (-1)^{n-1}\frac{U_n(u_2,\dots,u_{n+1};l+1)}{U_n(u_2,\dots,u_n,u_1;l+1)}. \tag{27}$$

Из формул (25) и (27) видно, что функция $U_{n+1}(u_1,\dots,u_{n+1};l+1)$ может быть записана как разность D отношений двух детерминантов W_n. Следовательно, выполняется следующее разностное уравнение
$$W_{n,k+1,l+1}W_{n,k,l} - W_{n,k+1,l}W_{n,k,l+1} = W_{n+1,k,l}W_{n-1,k+1,l+1}, \tag{28}$$
где
$$W_{n,k,l} = W_n(u_k,\dots,u_{k+n-1};l). \tag{29}$$

Выражение (28) и есть тождество Якоби для детерминантов. Если теперь мы подставим $u_k(\alpha) = \phi(\lambda_\alpha - \nu_k)$, то получим уравнение для статсуммы (точнее для ее детерминантной части) в неоднородном случае.

Важно отметить также, что уравнение (28) является одной из возможных форм записи уравнения Хироты [8]. Связь уравнения Хироты с квантовым методом обратной задачи была продемонстрирована в работе [10]. Здесь мы получили еще один пример, связывающий уравнение Хироты с квантовыми моделями.

3. Частично однородный случай

В частично однородном случае также возможно построить уравнения для статсуммы, но в отличие от двух предыдущих примеров эти уравнения уже не будут интегрируемыми.

Рассмотрим сначала частный случай, когда статсумма выражается по формуле (8). Используя формулу (19) нетрудно показать, что функция
$$S_2(n,N) = \det_N \mathcal{F}$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1+\frac{\partial}{\partial x_2}}\right)^2 \ln S_2(n,N,x_1,x_2)=$$

$$=\frac{S_2(n+1,N+1,x_1,x_2)S_2(n-1,N-1,x_1,x_2)}{S_2(n,N,x_1,x_2)^2}+ \\ +\frac{S_2(n,N+1,x_1,x_2)S_2(n,N-1,x_1,x_2)}{S_2(n,N,x_1,x_2)^2} \tag{30}$$

В наиболее общем частично однородном случае выполняются следующие уравнения для функции $R(n_1,\dots,n_K,m_1,\dots,m_L,\{\lambda_k\},\{\nu_l\})\equiv \det_N\mathcal{F}$, (где матрица $\mathcal{F}$ задана по формуле (11)):

$$R(n_1,\dots,n_K,m_1,\dots,m_L,\{\lambda_k\},\{\nu_l\})\times$$

$$\times\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}-\sum_{l=1}^{L}\frac{\partial}{\partial\nu_1}\right)^2 R(n_1,\dots,n_K,m_1,\dots,m_L,\{\lambda_k\},\{\nu_l\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}R(n_1,\dots,n_k+1,\dots,n_K,m_1,\dots,m_l+1,\dots,m_L,\{\lambda_k\},\{\nu_l\})\times$$

$$\times R(n_1,\dots,n_k-1,\dots,n_K,m_1,\dots,m_l-1,\dots,m_L,\{\lambda_k\},\{\nu_l\}). \tag{31}$$

Доказательство этого факта основывается также на формуле (19). Эти уравнения, являясь в некотором смысле $K+L+1$-мерным обобщением уравнения Тоды, в отличии от него неинтегрируемы.

Мы признательны Л. Д. Фаддееву за обсуждения. Эта работа поддержана грантом Международного Научного Фонда N R3C300, а также Российским фондом фундаментальных исследований (проект N 95–01–00476а).

Литература

1. R. J. Baxter, — Phil. Trans. R. Soc. **289** (1978), 315–346.
2. V. E. Korepin, — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.
3. А. Г. Изергин, — ДАН СССР **297** (1987), 331–333.

4. A. G. Izergin, D. A. Coker, V. E. Korepin, — J. Phys. A.: Math. Gen. **25** (1992), 4315–4334.
5. H. Ay-Yang, J. H. H. Perk-Physica.
6. K. Sogo, — J. Phys. Soc. Japan **62** (1993), 1887–1894.
7. J. J. Sylvester, — Compt. Rend. Acad. Sc. **54** (1862), 129, 170.
8. R. Hirota, — J. Phys. Soc. Japan **50** (1982), 4116.
9. Ф. Р Гантмахер, *Теория матриц*. М, Наука, 1967.
10. I. Krichever, O. Lipan, P. Weigmann A. Zabrodin, — Preprint hepth/9604080 (1996).

Isergin A. G., Karjalainen E., Kitanine N. A. Integrable equations for the partition function of the six vertex model.

The partition function of the six vertex model with the domain wall boundary condition is considered in the homogeneous and inhomogeneous cases. The determinant representation allows to show that the partition function is a solution of the Toda equation in the homogeneous case and solution of the Hirota equation in the inhomogeneous case.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 1 марта 1996 г.

Институт теоретической физики
Университет г. Хельсинки

С.-Петербургский государственный
университет