Н. А. Китанин

ФОРМ–ФАКТОРЫ МОДЕЛИ q–БОЗОНОВ В ПРЕДЕЛЕ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Введение

В этой работе будут получены детерминантные представления для форм-факторов модели q-бозонов на решетке. Вычисление форм-факторов является важным шагом на пути получения детерминантных представлений для температурных, зависящих от времени, корреляционных функций. Такие представления были получены для газа непроницаемых бозонов [6, 7] и для XXO магнетика [8]. Аналогичное представление мы рассчитываем получить для модели q-бозонов в пределе кристаллизации. Эта модель, введенная и решенная методом алгебраического анзатца Бете в работах [4, 5], является интересным решеточным обобщением модели одномерного Бозе-газа и в то же время квантовым аналогом классического уравнения Абловица–Ладика. Следует отметить, что предел кристаллизации в отличии от предела непроницаемых бозонов и XXO модели не является точкой свободных фермионов.

Модель q-бозонов

Модель q-бозонов была введена в работе [4]. Алгебра q-бозонов задается тремя операторами a, a^+, $N = N^+$

$$\begin{aligned} &[N, a^+] = a^+, \quad [N, a] = -a, \\ &aa^+ - qa^+a = q^{-N}, \quad q = e^{2\gamma}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Она возникает в теории квантовых групп как q-деформированная алгебра Гейзенберга–Вейля (см., например, [3]). Переходя к операторам $B^+ = a^+q^{-\frac{1}{2}N}$, $B = (B^+)^+$, получим алгебру с соотношениями

$$[N, B^+] = B^+, \quad [N, B] = -B, \quad [B, B^+] = q^{-2N}. \tag{1.2}$$

В пределе $q \to 1$ соотношения (1.2) переходят в обычные бозонные коммутационные соотношения.

Модель q-бозонов на решетке задается гамильтонианом

$$H_q = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(B_n^+\, B_{n+1} + B_n\, B_{n+1}^+ - 2N_n\right) \tag{1.3}$$

с периодическими граничными условиями $B_{n+M} = B_n$. Операторы B_n, B_n^+, N_n коммутируют в разных узлах и удовлетворяют (1.2) в одном узле.

Одним из интересных частных случаев (1.3) является предел кристаллизации ($q \to \infty$). Гамильтониан в пределе кристаллизации примет вид

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{M}\left(\psi_n^+\, \psi_{n+1} + \psi_n\, \psi_{n+1}^+ - 2N_n\right). \tag{1.4}$$

Операторы ψ_n^+, ψ_n, N_n коммутируют следующим образом

$$\left[N_i, \psi_j^+\right] = \psi_i^+\delta_{ij} \quad [N_i, \psi_j] = -\psi_i\delta_{ij} \quad \left[\psi_i, \psi_j^+\right] = \pi_i\delta_{ij},$$

где π_i – локальный вакуумный проектор

$$\pi_i = (|0\rangle\langle 0|)_i\,.$$

В работе [5] показано, что собственные состояния и собственные значения (1.3), (1.4) могут быть найдены методом алгебраического анзатца Бете (см., например, [1]). L-оператор модели имеет вид

$$L_n(\lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda} & \chi B_n^+ \\ \chi B_n & e^{-\lambda} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

где $\chi = (1 - q^{-2})^{\frac{1}{2}}$.

Коммутационные соотношения для этих L-операторов можно записать в стандартной форме

$$R(\lambda,\mu) L_n(\lambda) \otimes L_n(\mu) = L_n(\mu) \otimes L_n(\lambda) R(\lambda,\mu)$$

с R-матрицей

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} f(\lambda,\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\lambda,\mu) & 1 & 0 \\ 0 & q^{-2} & g(\lambda,\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\lambda,\mu) \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

где функция $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f(\lambda,\mu) &= e^{-2\gamma}\frac{\sinh(\lambda-\mu+2\gamma)}{\sinh(\lambda-\mu)}, \\ g(\lambda,\mu) &= e^{-2\gamma}\frac{\sinh 2\gamma}{\sinh(\lambda-\mu)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

В [5] доказано, что гамильтониан (1.3) коммутирует со следом матрицы монодромии $T(\lambda)$

$$T(\lambda) = T(\lambda) = L_M(\lambda)\dots L_1(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix}$$

при любом λ и следовательно собственные состояния модели могут быть получены как $\prod\limits_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle$ если набор $\{\lambda_j\}_1^N$ удовлетворяет уравнениям Бете

$$e^{2M\lambda_j} = \prod_{k\neq j}\frac{f(\lambda_k,\lambda_j)}{f(\lambda_j,\lambda_k)}. \tag{1.8}$$

В пределе кристаллизации функции $f(\lambda,\mu)$, $g(\lambda,\mu)$ примут вид

$$\begin{aligned} f(\lambda,\mu) &= \frac{e^{2\lambda}}{e^{2\lambda}-e^{2\mu}}, \\ g(\lambda,\mu) &= \frac{e^{\lambda+\mu}}{e^{2\lambda}-e^{2\mu}}. \end{aligned}$$

Уравнения (1.8) в этом случае сильно упрощаются

$$\exp\{2(M+N)\lambda_j\} = (-1)^{(N-1)}\exp\left\{2\sum_{k=1}^{2}\lambda_k\right\}. \tag{1.9}$$

Эти уравнения можно решить точно. Мы запишем их решения, используя импульсы $p_j = -2i\lambda_j$

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{2\pi I_j + \sum\limits_{k=1}^{N} p_k}{M+N}, \quad N = 2n+1 \\ p_j &= \frac{2\pi I_j + \pi + \sum\limits_{k=1}^{N} p_k}{M+N}, \quad N = 2n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Нетрудно доказать, что таким образом строится полный набор собственных состояний модели.

2. Скалярные произведения

Для вычисления различных корреляторов в первую очередь необходимо получить представление для функций

$$\widetilde{S}\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)=\langle 0|C(\lambda_1^C)\dots C(\lambda_N^C)B(\lambda_N^B)\dots B(\lambda_1^B)|0\rangle. \qquad (2.1)$$

Используя коммутационные соотношения, задаваемые R-матрицей (1.6), представим $\widetilde{S}\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)$ в следующем виде

$$\widetilde{S}\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)=\sum_{AD}\prod_{\alpha=1}^{N}a(\lambda_\alpha^A)\prod_{\beta=1}^{N}d(\lambda_\beta^D)K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix}, \qquad (2.2)$$

где суммирование ведется по всем разбиениям множества $\{\lambda_j^B\}\cup\{\lambda_k^C\}$ на два подмножества

$$\{\lambda_j^B\}\cup\{\lambda_k^C\}=\{\lambda_\alpha^A\}\cup\{\lambda_\beta^D\}$$

таких, что $\operatorname{card}\{\lambda_j^B\}=\operatorname{card}\{\lambda_k^C\}=\operatorname{card}\{\lambda_\alpha^A\}=\operatorname{card}\{\lambda_\beta^D\}=N$, а $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$ – вакуумные собственные значения операторов $A(\lambda)$ и $D(\lambda)$.

Коэффициенты $K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix}$ тесно связаны со статсуммой, соответствующей неоднородной шестивершинной модели с граничными условиями "доменной стены" (см., например, [1]). Следует отметить, что эти коэффициенты определяются исключительно R-матрицей и не зависят от вида L-оператора. Шестивершинная модель, соответствующая R-матрице (1.6), задачется L-оператором

$$\widetilde{L}_{\alpha,k}(\lambda_\alpha,\nu_k)=$$
$$=\begin{pmatrix} e^{\gamma}a(\lambda_\alpha,\nu_k) & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{-\gamma}b(\lambda_\alpha,\nu_k) & c(\lambda_\alpha,\nu_k) & 0\\ 0 & c(\lambda_\alpha,\nu_k) & e^{\gamma}b(\lambda_\alpha,\nu_k) & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-\gamma}a(\lambda_\alpha,\nu_k)\end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

$$\begin{aligned} a(\lambda_\alpha,\nu_k)&=\sinh\left(\lambda_\alpha-\nu_k-\gamma\right),\\ b(\lambda_\alpha,\nu_k)&=\sinh\left(\lambda_\alpha-\nu_k+\gamma\right),\\ c(\lambda_\alpha,\nu_k)&=-\sinh 2\gamma.\end{aligned} \qquad (2.4)$$

Условия "доменной стены" состоят в том, что на на верхней и нижней границе все стрелки направлены внутрь. а на правой и левой границе – наружу.

Статсумма этой модели может быть вычислена методом, описанным в работе [2]. При этом обнаруживается, что она равна статсумме неоднородной шестивершинной модели, соответствующей тригонометрической R-матрице, вычисленной в [2]. В результате получим

$$Z_N =$$

$$(-1)^N \frac{\prod\limits_{\alpha=1}^{N}\prod\limits_{k=1}^{N} \sinh(\lambda_\alpha-\nu_k-\gamma)\sinh(\lambda_\alpha-\nu_k+\gamma)}{\prod\limits_{\alpha<\beta}\sinh(\lambda_\alpha-\lambda_\beta)\prod\limits_{k<l}\sinh(\nu_l-\nu_k)} \det{}_N\mathcal{M}, \tag{2.5}$$

где матрица $\mathcal{M}$ имеет вид

$$\mathcal{M}_{\alpha,k} = \frac{\sinh 2\gamma}{\sinh(\lambda_\alpha-\nu_k-\gamma)\sinh(\lambda_\alpha-\nu_k+\gamma)}. \tag{2.6}$$

Старший коэффициент $K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix}$ выражается через статсумму Z_N следующим образом:

$$K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix} =$$

$$= e^{-2\gamma N^2}\left(\prod_{j,k=1}^{N}\sinh(\lambda_j^B-\lambda_k^C)\right)^{-1} Z_N\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C+\gamma\}\right), \tag{2.7}$$

Доказательство этой формулы практически в точности повторяет приведенное в [1] доказательство аналогичной формулы для рациональной R-матрицы.

Остальные коэффициенты выражаются через старший коэффициент по формуле

$$K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix} =$$

$$\left(\prod_{j\in AC}\prod_{k\in DC} f\left(\lambda_j^{AC},\lambda_k^{DC}\right)\right)\times\left(\prod_{l\in AB}\prod_{m\in DB} f\left(\lambda_l^{AC},\lambda_k^{DB}\right)\right)\times \tag{2.8}$$

$$\times K_{n_0}\begin{pmatrix}\{\lambda^{AB}\} & \{\lambda^{DC}\}\\ \{\lambda^{AB}\} & \{\lambda^{DC}\}\end{pmatrix} K_{N-n_0}\begin{pmatrix}\{\lambda^{AC}\} & \{\lambda^{DB}\}\\ \{\lambda^{AC}\} & \{\lambda^{DB}\}\end{pmatrix}.$$

В пределе кристаллизации получаются довольно простые детерминантные представления для коэффициентов. Старший коэффициент в этом случае примет вид

$$K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\prod_{j<l}\left(e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_l^B}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda_m^C}-e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1}\times \tag{2.9}$$
$$\times\det{}_N\mathcal{K}\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right),$$

где матрица $\mathcal{K}$ задается следующим образом

$$\mathcal{K}_{jk}=\frac{\exp\left((2N-1)\lambda_k^C+\lambda_j^B\right)}{e^{2\lambda_k^C}-e^{2\lambda_j^B}}.$$

Для остальных коэффициентов получим

$$K_N\begin{pmatrix}\{\lambda^C\} & \{\lambda^B\}\\ \{\lambda^A\} & \{\lambda^D\}\end{pmatrix}=$$
$$=\left(\prod_{j<l}\left(e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_l^B}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda_m^C}-e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1}\times \tag{2.10}$$
$$\times(-1)^{([P]+[Q])}\det{}_{n_0}\mathcal{K}\left(\{\lambda^{DC}\},\{\lambda^{AB}\}\right)\times$$
$$\times\det{}_{N-n_0}\mathcal{K}\left(\{\lambda^{DB},\{\lambda^{AC}\}\right),$$

где P и Q – это перестановки $\{\lambda^B\}\to\{\lambda^{AB}\}\cup\{\lambda^{DB}\}$, $\{\lambda^C\}\to\{\lambda^{AC}\}\cup\{\lambda^{DC}\}$ соответственно.

В дальнейшем мы будем рассматривать скалярные произведения состояний нормированных специальным образом

$$S\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)=\left\langle 0|\prod_{k=1}^{N}\mathbf{C}(\lambda_k^C)\prod_{j=1}^{N}\mathbf{B}(\lambda_j^B)|0\right\rangle, \tag{2.11}$$

где

$$\mathbf{B}(\lambda_j^B)=\frac{B(\lambda_j^B)}{d(\lambda_j^B)},\quad \mathbf{C}(\lambda_j^C)=\frac{B(\lambda_j^C)}{d(\lambda_j^C)}.$$

Используя (2.2), (2.10), а также формулу для детерминанта суммы двух матриц, получим для скалярного произведения

$$S\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\} = = \left(\prod_{j<l}\left(e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_l^B}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda_m^C}-e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1}\times \times\det{}_N F\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right), \tag{2.12}$$

$$F_{jk} = \frac{r(\lambda_j^B)\exp\left((2N-1)\lambda_j^B+\lambda_k^C\right) - r(\lambda_k^C)\exp\left((2N-1)\lambda_k^C+\lambda_j^B\right)}{e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_k^C}}, \tag{2.13}$$

где $r(\lambda)=\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)}$. В модели Q-бозонов $r(\lambda)=e^{2\lambda M}$. Таким образом матрица F имеет вид

$$F_{jk} = \frac{\exp\left((2N+2M-1)\lambda_j^B+\lambda_k^C\right) - \exp\left((2N+2M-1)\lambda_k^C+\lambda_j^B\right)}{e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_k^C}}. \tag{2.14}$$

В случае когда наборы $\{\lambda^B\}$ и $\{\lambda^C\}$ совпадают и удовлетворяют уравнениям Бете (1.9), детерминант (2.12) нетрудно вычислить. Снова переходя к импульсам, получим для нормы бетевской волновой функции

$$\langle\psi(p_1,\ldots,p_N)|\psi(p_1,\ldots,p_N)\rangle = = \left(\prod_{j\neq k}\frac{1}{e^{ip_j}-e^{ip_k}}\right)e^{iP(N-1)}M(M+N)^{N-1}, \tag{2.15}$$

где $P=\sum_{j=1}^{N}p_j$.

3. Матричные элементы $\exp\{\alpha Q(m)\}$

При рассмотрении корреляторов модели непроницаемых бозонов [7] и XXO модели [8] важную роль играет среднее значение оператора $\exp\{\alpha Q(m)\}$, где $Q(m)$ – это оператор числа частиц на отрезке длины m. В модели q-бозонов также можно получить детерминантное представление для матричных элементов этого оператора, но только используя дуальные поля (см., например, [1]). В пределе кристаллизации в качестве дуальных полей можно использовать канонические бозонные операторы.

Мы будем рассматривать матричные элементы вида

$$R_m\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)= \\ =\left\langle 0|\prod_{k=1}^{N}\mathbf{C}(\lambda_k^C)\exp\{\alpha Q(m)\}\prod_{j=1}^{N}\mathbf{B}(\lambda_j^B)|0\right\rangle. \tag{3.1}$$

Матрицу монодромии модели можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} &T(\lambda)=T_2(\lambda)T_1(\lambda)\\ &T_2(\lambda)=L_M(\lambda)\dots L_{m+1}(\lambda)=\begin{pmatrix}A_2(\lambda) & B_2(\lambda)\\ C_2(\lambda) & D_2(\lambda)\end{pmatrix}\\ &T_1(\lambda)=L_m(\lambda)\dots L_1(\lambda)=\begin{pmatrix}A_1(\lambda) & B_1(\lambda)\\ C_1(\lambda) & D_1(\lambda)\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Используя это разбиение, функцию (3.1) можно представить следующим образом

$$R_m\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)= \\ \sum_{\mathrm{I},\mathrm{II}} e^{\alpha n_1}\prod_{\mathrm{I}} r_2(\lambda_{\mathrm{I}}^B)_1\left\langle 0|\prod_{\mathrm{I}}\mathbf{C}_1(\lambda_{\mathrm{I}}^C)\prod_{\mathrm{I}}\mathbf{B}_1(\lambda_{\mathrm{I}}^B)|0\right\rangle_1\times \\ \times\prod_{\mathrm{II}} r_1(\lambda_{\mathrm{II}}^B)_2\left\langle 0|\prod_{\mathrm{II}}\mathbf{C}_2(\lambda_{\mathrm{II}}^C)\prod_{\mathrm{II}}\mathbf{B}_2(\lambda_{\mathrm{II}}^B)|0\right\rangle_2\times \\ \left(\prod_{\mathrm{I}}\prod_{\mathrm{II}}\frac{e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^B}}{e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^B}-e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^B}}\right)\left(\prod_{\mathrm{I}}\prod_{\mathrm{II}}\frac{e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^C}}{e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^C}-e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^C}}\right),$$

где сумма берется по всем разбиениям множеств $\{\lambda^B\}$ и $\{\lambda^C\}$ на два подмножества $\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}$, $\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\}$ и $\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}$, $\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}$ соответственно, таких что

$$\operatorname{card}\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}=\operatorname{card}\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}=n_1 \quad n_1=0,1,\dots,N \\ \operatorname{card}\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\}=\operatorname{card}\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}=N-n_1\equiv n_2.$$

Используя (2.12), получим

$$R_m\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)=\left(\prod_{j<1}\left(e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_l^B}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda_m^C}-e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1}\times$$
$$\sum_{\mathrm{I,II}}(-1)^{([P]+[Q])}\det{}_{n_1}U_1\left(\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}\right)\times$$
$$\times\det{}_{N-n_1}U_2\left(\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}\right), \qquad (3.3)$$

где P и Q – это перестановки $\{\lambda^B\}\to\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\}$, $\{\lambda^C\}\to\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}\cup\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}$ соответственно, а матрицы U_1 и U_2 имеют вид

$$U_{1_{jk}}=\frac{e^{\alpha}}{e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_k^C}}\times$$
$$\times\big(\exp((2N+2M-1)\lambda_j^B+\lambda_k^C)-$$
$$-\exp((2N+2M-2n_1-2m+1)\lambda_j^B+(2m+2n_1-1)\lambda_k^C)\big),$$
$$U_{2_{jk}}=\frac{1}{e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_k^C}}\times$$
$$\times\big(\exp((2N+2M-2m-2n_1-1)\lambda_j^B+((2m+2n_1+1)\lambda_k^C))-$$
$$-\exp((2N+2M-1)\lambda_k^C+\lambda_j^B)\big). \qquad (3.4)$$

Матричные элементы U_1 и U_2 зависят от n_1, и следовательно формула для детерминанта суммы матриц в этом случае не работает. Однако, если ввести вспомогательные бозонные операторы, то эта зависимость исчезает. Введем четыре пары операторов ψ_j^+, ψ_j, $j=1,2,3,4$

$$[\psi_j\,\psi_k]=[\psi_j^+\,\psi_k^+]=0,\quad [\psi_j\,\psi_k^+]=\delta_{j,k},$$

действующих во вспомогательном пространстве Фока с вакуумом $|0)$

$$\psi_j|0)=0,\qquad (0|\psi_j^+=0.$$

Используя коммутационные соотношения между операторами ψ_j^+, ψ_j несложно доказать следующие равенства

$$\begin{aligned}\det{}_{n_1}U_1(\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\})&=(0|\det{}_{n_1}V_1(\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\})|0)\\ \det{}_{N-n_1}U_2(\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\})&=(0|\det{}_{N-n_1}V_2(\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\})|0),\end{aligned}\qquad (3.5)$$

где матрицы V_1 и V_2, зависящие от вспомогательных операторов, имеют вид

$$
\begin{aligned}
V_{1_{jk}} = {} & \frac{e^{\alpha}\exp(\psi_2^{+}+\psi_1)}{e^{2\lambda_j^B}-e^{2\lambda_k^C}}(\exp((2N+2M-1)\lambda_j^B+\lambda_k^C)- \\
& -\exp((2N+2M-2m+1)\lambda_j^B+ \\
& +(2m-1)\lambda_k^C+2(\lambda_k^C-\lambda_j^B)(\psi_1^{+}+\psi_2))
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
V_{2_{jk}} = {} & \frac{\exp(\psi_1^{+}+\psi_3)}{e^{2\lambda_k^C}-e^{2\lambda_j^B}}(\exp((2N+2M-1)\lambda_k^C+\lambda_j^B)- \\
& -\exp((2M-2m-1)\lambda_j^B+ \\
& +(2N+2m+1)\lambda_k^C+2(\lambda_j^B-\lambda_k^C)(\psi_3^{+}+\psi_4)).
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

После подстановки соотношений (3.5) в (3.3) можно применить формулу для детерминанта суммы

$$
\begin{aligned}
R_m(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}) = {} & \left(\prod_{j<l}\left(e^{2\lambda_m^C}-e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1}\times \\
& \times\left(0|\det{}_N V(\alpha,m,\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\})|0\right),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где

$$
V_{jk}(\alpha,m)=V_{jk}+V_{2_{jk}}.
$$

В некоторых частных случаях, применяя формулу (3.8), можно получить соотношения, позволяющие избавляться от вспомогательных операторов. Используя очевидное равенство $R_m(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\})\,|_{\alpha=0}=S(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\})$, получим

$$
(0|\det{}_N V(0,m,\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\})|0)=\det{}_N F(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}),
\tag{3.9}
$$

где матрица F задается формулой (2.14). Это соотношение играет важную роль при вычислении форм-факторов.

4. Форм-фактор

Здесь будут вычислены матричные элементы операторов ϕ_m и ϕ_m^{+} в базисе нормированных бетевских состояний.

Начнем с того, что рассмотрим функцию

$$
G\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right)=\left\langle 0|\prod_{k=1}^{N-1}\mathbf{C}(\lambda_k^C)\phi_M\prod_{j=1}^{N}\mathbf{B}(\lambda_j^B)|0\right\rangle.
\tag{4.1}
$$

Используя разбиение (3.2) с $m = M-1$ и учитывая что в этом случае $B_2 = \phi_M^{+}$, $C_2 = \phi_M$ получим представление

$$
\begin{gathered}
G\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right) = \\
\sum_{\mathrm{I},\mathrm{II}} \prod_{\mathrm{I}} r_2(\lambda_{\mathrm{I}}^B) \left\langle 0| \prod_{\mathrm{I}} \mathbf{C}_1(\lambda_{\mathrm{I}}^C) \prod_{\mathrm{I}} \mathbf{B}_1(\lambda_1^B)|0 \right\rangle_1 \times \\
\times \prod_{\mathrm{II}} r_1(\lambda_{\mathrm{II}}^C) \prod_{\mathrm{II}} \frac{1}{d_2(\lambda_{\mathrm{II}}^B)} \prod_{\mathrm{II}} \frac{1}{d_2(\lambda_{\mathrm{II}}^C)} \times \\
\left(\prod_{\mathrm{I}} \prod_{\mathrm{II}} \frac{e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^B}}{e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^B} - e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^B}} \right) \left(\prod_{\mathrm{I}} \prod_{\mathrm{II}} \frac{e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^C}}{e^{2\lambda_{\mathrm{II}}^C} - e^{2\lambda_{\mathrm{I}}^C}} \right),
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

где сумма берется по всем разбиениям множеств $\{\lambda^B\}$ и $\{\lambda^C\}$ на два подмножества $\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\}$, $\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\}$ и $\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}$, $\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\}$ соответственно, таких что

$$
\begin{gathered}
\mathrm{card}\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\} = \mathrm{card}\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\} = n_1 \quad n_1 = 0, 1, \ldots, N-1 \\
\mathrm{card}\{\lambda_{\mathrm{II}}^B\} = \mathrm{card}\{\lambda_{\mathrm{II}}^C\} + 1 = N - n_1 \equiv n_2.
\end{gathered}
$$

Используя (2.12), получим

$$
\begin{gathered}
G\left(\{\lambda_j^B\},\{\lambda_k^C\}\right) = \left(\prod_{j<1} \left(e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_l^B}\right) \prod_{k<m} \left(e^{2\lambda_m^C} - e^{2\lambda_k^C}\right) \right)^{-1} \times \\
\exp\left(\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^B + \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k^c \right) \sum_{\mathrm{I},\mathrm{II}} (-1)^{([P]+[Q])} \prod_{\mathrm{II}} \exp(2(M+n_1-1)\lambda_{\mathrm{II}}^C) \times \\
\prod_{j<l} \left(e^{2\lambda_{\mathrm{II}_j}^B} - e^{2\lambda_{\mathrm{II}_l}^B}\right) \prod_{m<k} \left(e^{2\lambda_{\mathrm{II}_k}^C} - e^{2\lambda_{\mathrm{II}_m}^C}\right) \det{}_{n_1} H_1\left(\{\lambda_{\mathrm{I}}^B\},\{\lambda_{\mathrm{I}}^C\}\right),
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

где

$$
\begin{gathered}
H_{1_{jk}} = \frac{1}{e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_k^C}} - \big(\exp(2(N+M-1)\lambda_j^B) - \\
- \exp(2(N-n_1+1)\lambda_j^B + 2(M+n_1-2)\lambda_k^C) \big).
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Некоторые сомножители в правой части формулы (4.3) можно записать как детерминанты

$$\prod_{j<l}\left(e^{2\lambda^B_{\mathrm{II}_j}}-e^{2\lambda^B_{\mathrm{II}_l}}\right)=\det{}_{N-n_1}h(\lambda^B_{\mathrm{II}})$$
$$\prod_{m<k}\left(e^{2\lambda^C_{\mathrm{II}_k}}-e^{2\lambda^C_{\mathrm{II}_m}}\right)=\det{}_{N-n_1}\widetilde{h}\left(\lambda^C_{\mathrm{II}}\right),$$

где матрицы h и $\widetilde{h}$ задаются формулами

$$\begin{aligned} h_{jk}&=e^{2(k-1)\lambda^B_j} & \widetilde{h}_{1k}&=\widetilde{h}_{k1}=\delta_{1k},\\ \widetilde{h}_{jk}&=e^{2(N-n_1-j-2)\lambda^C_{k-1}} & j&>1,\ k>1. \end{aligned}$$

Перемножая эти матрицы и подставляя результат в (4.3), получим

$$\begin{gathered} G\left(\{\lambda^B_j\},\{\lambda^C_k\}\right)=\left(\prod_{j<1}\left(e^{2\lambda^B_j}-e^{2\lambda^B_l}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda^C_m}-e^{2\lambda^C_k}\right)\right)^{-1}\times\\ \exp\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda^B_j+\sum_{k=1}^{N-1}\lambda^c_k\right)\sum_{\mathrm{I,II}}(-1)^{([P]+[Q])}\det{}_{n_1}H_1\left(\{\lambda^B_{\mathrm{I}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{I}}\}\right)\times\\ \det{}_{N-n_1}H_2\left(\{\lambda^B_{\mathrm{II}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{II}}\}\right) \end{gathered} \tag{4.5}$$

с матрицей H_2, имеющей вид

$$\begin{gathered} H_{2_{j1}}=1\\ H_{2_{j1}}=\frac{1}{e^{2\lambda^B_j}-e^{2\lambda^C_{k-1}}}\big(\exp(2(n_1+M-1)\lambda^C_{k-1}+2(N-n_1)\lambda^B_j))-\\ -\exp\left(2\lambda^B_j+2(M+N-2)\lambda^C_{k-1})\lambda^C_{k-1}\right)\quad k>1. \end{gathered} \tag{4.6}$$

Чтобы можно было использовать формулу для детерминанта суммы матриц снова введем четыре вспомогательных поля. Нетрудно проверить, что выполняются следующие равенства

$$\begin{gathered} \det{}_{n_1}H_1(\{\lambda^B_{\mathrm{I}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{I}}\})=(0|\det{}_{n_1}\mathcal{G}_1(\{\lambda^B_{\mathrm{I}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{I}}\})|0)\\ \det{}_{N-n_1}H_2(\{\lambda^B_{\mathrm{II}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{II}}\})=(0|\det{}_{N-n_1}\mathcal{G}_2(\{\lambda^B_{\mathrm{II}}\},\{\lambda^C_{\mathrm{II}}\})|0), \end{gathered} \tag{4.7}$$

где матрицы в правых имеют вид

$$
\begin{gathered}
\mathcal{G}_{1_{jk}} = \frac{\exp(\psi_2^+ + \psi_1)}{e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_k^C}}(\exp(2(N+2M-1)\lambda_j^B) - \\
-\exp(2(N+1)\lambda_j^B + \\
+2(M-2)\lambda_k^C + 2(\lambda_k^C - \lambda_j^B)(\psi_1^+ + \psi_2))
\end{gathered} \tag{4.8}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathcal{G}_{2_{j1}} = 1 \\
\mathcal{G}_{2_{jk}} = \frac{\exp(\psi_1^+ + \psi_3)}{e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_{k-1}^C}} \exp(2(N+M-1)\lambda_{k-1}^C + \\
+2(\lambda_j^B - \lambda_{k-1}^C)(\psi_3^+ + \psi_4)) - \\
-\exp(2\lambda_j^B + +2(N+N-2)\lambda_{k-1}^C) \quad k > 1.
\end{gathered} \tag{4.9}
$$

Теперь можно применить формулу для детерминанта суммы

$$
\begin{gathered}
G\left(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_k^C\}\right) = \left(\prod_{j<1}\left(e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_l^B}\right)\prod_{k<m}\left(e^{2\lambda_m^C} - e^{2\lambda_k^C}\right)\right)^{-1} \times \\
\exp\left(\sum_{j=1}^{N}\lambda_j^B + \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k^c\right)\left(0|\det{}_N \mathcal{G}\left(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}\right)|0\right) \\
\mathcal{G}_{j1} = 1, \quad \mathcal{G}_{jk} = \mathcal{G}_{1_{j,k-1}} + \mathcal{G}_{2_{jk}} \quad k > 1.
\end{gathered} \tag{4.10}
$$

Разложим детерминант в правой части (4.10) по первой строке

$$
\begin{gathered}
\left(0|\det{}_N \mathcal{G}\left(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}\right)|0\right) = \sum_{l=1}^{N}\exp\left(\sum_{j\neq 1}\lambda_j^B - \sum_{k=1}^{N-1}\lambda_k^C\right) \times \\
(-1)^l \left(0|\det{}_{N-1} V(0, M-1\right., \\
\{\lambda_1^B, \ldots, \lambda_{l-1}^B, \lambda_{j+1}^B, \ldots, \lambda_N^B\}\{\lambda^C\})|0),
\end{gathered} \tag{4.11}
$$

где матрица C задана формулой (3.8). Используя соотношения (3.9), можно представить $G\left(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_k^C\}\right)$, не используя вспомогательных операторов.

$$
\begin{gathered}
\left(0|\det{}_N \mathcal{G}\left(\{\lambda^B\}, \{\lambda^C\}\right)|0\right) = \det{}_N H(\{\lambda_j^B\}, \{\lambda_k^C\}) \\
H_{j1} = 1 \\
H_{jk} = \frac{1}{e^{2\lambda_j^B} - e^{2\lambda_{k-1}^C}}\left(\exp(2(N+M-1)\lambda_j^B) - \right. \\
\left. -\exp(2\lambda_j^B + 2(M+N-2)\lambda_{k-1}^C)\right) \quad k > 1.
\end{gathered} \tag{4.12}
$$

В случае, когда $\{\lambda_j^B\}$, $\{\lambda_k^C\}$ являются решениями уравнений Бете (1.9), матричные элементы H можно записать следующим образом

$$H_{jk} = -\frac{e^{i(P-p_j)} + e^{i(Q-q_{k-1}+p_j)}}{e^{ip_j} - e^{iq_{k-1}}}, \quad k > 1, \tag{4.13}$$

где

$$p_j = -2i\lambda_j^B, \quad q_k = -2i\lambda_k^C, \quad P = \sum_{j=1}^{N} p_j, \quad Q = \sum_{k=1}^{N-1} q_k.$$

Чтобы получить представление для матричных элементов ϕ_M в базисе нормированных бетевских состояний воспользуемся формулой для нормы (1.9). Если воспользоваться тем, что $\{\lambda_j^B\}$, $\{\lambda_k^C\}$ являются решениями уравнений Бете и применить нужное число раз, оператор сдвига (см. [1]) можно получить представление для матричных элементов ϕ_m при любом m

$$G_N(m,\{p\},\{q\}) = M^{-1}(M+N)^{-N+\frac{3}{2}} Z e^{-im\Theta} \left(\frac{M+N}{M+N-1}\right)^{\frac{N}{2}-1} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{\partial}{\partial x}\right) \det{}_{N-1}\left(D_1 - xD_2\right)|_{x=0}. \tag{4.14}$$

Здесь мы воспользовались более удобной записью для определителя матрицы H. Константа Z, $|Z| = 1$ зависит от P, Q и M, мы не приводим здесь ее явного вида, т.к. при вычислении коррелятора она исчезает. В формуле (4.14) введено также обозначение $\Theta = Q - P$. Матрицы D_1 и D_2 определены следующим образом

$$D_{1_{jk}} = e^{\frac{i}{2}p_j} \left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\Theta - p_j)}{\tan\frac{1}{2}(p_j - q_k)} + \sin\frac{1}{2}(\Theta - p_j)\right) \tag{4.15}$$

$$D_{2_{jk}} = e^{\frac{i}{2}p_N} \left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\Theta - p_N)}{\tan\frac{1}{2}(p_N - q_k)} + \sin\frac{1}{2}(\Theta - p_N)\right). \tag{4.16}$$

Нетрудно вычислить также матичные элементы оператора ϕ_m^+. Для этого воспользуемся очевидным соотношением

$$G_N^{(+)}(m,\{p\},\{q\}) = G^*_{N+1}(m,\{q\},\{p\}),$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В результате получим

$$G_N^{(+)}(m,\{p\},\{q\}) = M^{-1}(M+N)^{-N+\frac{1}{2}}\left(\frac{M+N+1}{M+N}\right)^{\frac{N}{2}} Z^* e^{im\Theta}\times$$
$$\times\left(1+\frac{\partial}{\partial x}\right)\det{}_N\left(D_1^{(+)} - xD_2^{(+)}\right)|_{x=0}\,, \qquad (4.17)$$

где $\mathrm{card}\{p\} = \mathrm{card}\{q\} - 1 = N$, а матрицы $D_1^{(+)}$ и $D_2^{(+)}$ определены следующим образом

$$D_{1_{jk}}^{(+)} = e^{\frac{i}{2}q_k}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\Theta - q_k)}{\tan\frac{1}{2}(q_k - p_j)} + \sin\frac{1}{2}(\Theta - q_k)\right) \qquad (4.18)$$

$$D_{2_{jk}}^{(+)} = e^{-\frac{i}{2}q_{N+1}}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}(\Theta - q_{N+1})}{\tan\frac{1}{2}(q_{N+1} - p_j)} + \sin\frac{1}{2}(\Theta - q_{N+1})\right). \qquad (4.19)$$

Таким образом получено представление для форм-факторов модели q-бозонов в пределе кристаллизации. Формула (4.14)–(4.18) во многом напоминают формулы для форм-факторов XXO модели, полученные в [8] и, соответственно, могут быть использованы для получения детерминантных представлений для зависяших от времени корреляторов.

Автор благодарен А. Г. Изергину и Н. М. Боголюбову за полезные обсуждения и предоставленные оттиски.

Эта работа была поддержана грантом Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект No. 95–01–00476a).

В конце работы должен быть реферат: автор, название работы и текст реферата на английском языке.

Литература

1. V. E. Korepin, A. G. Izergin, and N. M. Bogolyubov, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
2. A. G. Izergin, D. A. Coker, and V. E. Korepin, Preprint ITP–SB–91–46 (1991).
3. N. M. Bogolyubov and R. K. Bullough, — Journ. Phys. **A 25** (1992), 4057.
4. R. K. Bullough, N. M. Bogolyubov, and G. D. Pang, — Phys. Rev. **B 47** (1993), 11495.
5. R. K. Bullough, N. M. Bogolyubov, G. D. Pang, and J. Timonen, Chaos, Solutions and Fractals, ed. M. Lakshmanan. vol. 5, 1995, pp. 2639.
6. A. Lenard, — L. Math. Phys. **5** (1964), 930–943.

7. A. R. Its, A. G. Izergin, and V. E. Korepin, — Comm. Math. Phys. **120** (1990), 205–222.
8. F. Colomo, A. G. Izergin, V. E. Korepin, and V. Tognetti, — Teor. Mat. Fiz. **94** (1993), 19–51.

Kitanine N. A. Form factors of the q-boson model in the crystallozation limit.

The determinant representations for the form factors of the q-boson hopping model are obtained using the algebraic Bethe anzatz. This result proves to be very similar to the representation for the form factors of the XXO model

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН

Поступило 13 июля 1996 г.