А. Новотны, П. Пенель, В. А. Солонников

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ОГРАНИЧЕННОГО ТЕЛА ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА

§1 Введение

Мы рассматриваем внешнюю стационарную задачу для уравнений изотермического движения вязкой сжимаемой жидкости, которая состоит в нахождении векторного поля скоростей $\vec{v}(x) = (v_1, v_2, v_3)$ и положительной плотности $\rho(x) = 1 + \sigma(x)$ ($x \in \Omega$, Ω – внешняя трехмерная область), удовлетворяющих уравнениям Навье–Стокса (см. [1])

$$\begin{gathered} -\mu\nabla^2\vec{v} - (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\vec{v} + \nabla\sigma + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} = \vec{F}(\sigma,\vec{v}), \\ \operatorname{div}\vec{v} + \operatorname{div}\big(\sigma(\vec{v}+\vec{v}_\infty)\big) = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

и краевым условиям

$$\vec{v}\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty, \quad \vec{v}(x)\to 0, \quad \sigma(x)\to 0 \quad (|x|\to\infty). \tag{1.2}$$

Здесь μ и λ – постоянные коэффициенты вязкости ($\mu > 0$, $\lambda + \frac{2}{3}\mu \geqslant 0$), $\vec{v}_\infty$ – постоянный вектор, направленный вдоль оси x_3: $\vec{v}_\infty = \mathrm{v}_\infty\vec{e}_3$, $\mathrm{v}_\infty = \mathrm{const} \neq 0$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$, и, наконец,

$$\vec{F}(\sigma,\vec{v}) = (1+\sigma)\vec{f} - \operatorname{div}\big((1+\sigma)\vec{v}\otimes\vec{v}\big) - \mathrm{v}_\infty\frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma\vec{v}),$$

где $\vec{f}$ – заданное векторное поле внешней силы.

В работе [1] была доказана разрешимость задачи (1.1), (1.2) в пространствах Соболева $W_p^l(\Omega)$; в настоящей работе эта задача исследуется в гельдеровских пространствах функций. Мы рассматриваем также линейную задачу

$$\begin{gathered} -\mu\nabla^2\vec{v} - (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\vec{v} + \nabla\sigma + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} = \vec{F}, \\ \operatorname{div}\vec{v} + \operatorname{div}\sigma(\vec{w}+\vec{v}_\infty) = 0, \\ \vec{v}\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty, \quad \vec{v}(x)\to 0, \quad \sigma(x)\to 0 \quad (|x|\to\infty) \end{gathered} \tag{1.3}$$

с заданными $\vec{w}(x)$ и $\vec{F}(x)$, используя, как и в [1], "метод разложения", согласно которому решение разыскивается в виде

$$\vec{v} = \vec{u} + \nabla\varphi, \tag{1.4}$$

где $\vec{u}$ – соленоидальное векторное поле с нулевой нормальной компонентой на $\partial\Omega$. Подставив (1.4) в (1.3) и введя подходящим образом "давление" $p(x)$, легко придти к следующим соотношениям:

$$\begin{gathered} -\mu\nabla^2\vec{u} + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3} + \nabla p = \vec{F}, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0 \\ \vec{u}\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty - \nabla\varphi\big|_{\partial\Omega}, \quad \vec{u} \to 0, \quad p \to 0 \quad (|x| \to \infty), \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\begin{gathered} \nabla^2\varphi = -\operatorname{div}\left(\sigma(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty \cdot \vec{n} = -\mathrm{v}_\infty n_3, \quad \nabla\varphi \to 0 \quad (|x| \to \infty), \end{gathered} \tag{1.6}$$

$$\begin{gathered} \sigma + (2\mu + \lambda)\operatorname{div}\sigma\left((\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right) = p - \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}, \\ \sigma \to 0 \quad (|x| \to \infty). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Анализ этих соотношений, проведенный в [1], позволил доказать разрешимость задачи (1.3) в соболевских пространствах. Чтобы сделать это в пространствах Гельдера, оказалось удобным ввести функцию

$$\overline{\sigma} = \sigma + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x_3},$$

что естественно приводит к замене (1.6) и (1.7) на

$$\begin{gathered} \overline{\sigma} + (2\mu + \lambda)\operatorname{div}\left(\overline{\sigma}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right) = p + (2\mu + \lambda)\mathrm{v}_\infty\operatorname{div}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right), \\ \overline{\sigma} \to 0 \quad (|x| \to \infty), \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} \nabla^2\varphi - \mathrm{v}_\infty^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} = -\operatorname{div}\left(\overline{\sigma}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right) + \mathrm{v}_\infty\left(\operatorname{div}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\vec{w}\right), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = -\mathrm{v}_\infty n_3, \quad \nabla\varphi \to 0 \quad (|x| \to \infty). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Переходим к формулировке результатов настоящей работы. Напомним, что пространства Гельдера $C^l(\Omega)$ определяются при любом нецелом $l > 0$ как пространства функций с конечной нормой

$$|u|_{C^l(\Omega)} = \sum_{|j|<l} \sup_{\Omega} |D^j u(x)| + [u]_{\Omega}^{(l)},$$

где

$$[u]_{\Omega}^{(l)} = \sum_{|j|=[l]} \sup_{x,y\in\Omega} |x-y|^{-l+[l]} |D^j u(x) - D^j u(y)|$$

$$j = (j_1, j_2, j_3), \quad |j| = j_1 + j_2 + j_3.$$

Мы вводим также весовые пространства $C^l_m(\Omega)$ и $C_m(\Omega)$, $m > 0$, с нормами

$$|u|_{C^l_m(\Omega)} = \sum_{|j|\leqslant l} |D^j u|_{m,\Omega} + [u]^{(l)}_{m,\Omega},$$

где

$$|v|_{m,\Omega} = \sup_{\Omega} (1+|x|)^m |v(x)| \equiv |u|_{C_m(\Omega)},$$

$$[v]^{(l)}_{m,\Omega} = \sum_{|j|=[l]} \sup_{\Omega} (1+|x|)^m [D^j u]^{(l-[l])}_{K(x)},$$

$K(x) = \{y \in \Omega : |x-y| < 1\}$. Кроме того, при $l = \alpha \in (0,1)$ мы определяем $\widetilde{C}^{\alpha}_m(\Omega)$ как пространство функций с нормой

$$|u|_{\widetilde{C}^{\alpha}_m(\Omega)} = \sup_{\Omega} \frac{(1+|x|)^m}{1+\log(1+|x|)} |u(x)| + [u]^{(\alpha)}_{m,\Omega}.$$

Теми же символами $C^{\alpha}_m(\Omega)$, $\widetilde{C}^{\alpha}_m(\Omega)$ обозначаются пространства векторно- и тензорно-значных функций u и под нормой вектора (или тензора) понимается максимум норм всех его компонент. В частности, часто будут встречаться нормы производных порядка r, $D^r u = \{D^j u\}_{|j|=r}$:

$$\|D^r u\| = \max_{|j|=r} \|D^j u\|; \quad \|\nabla u\| \equiv \|Du\|.$$

Обозначим через $X_\alpha(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$ пространство векторных полей $\vec{u}(x) = (u_1, u_2, u_3)$ с нормой

$$|\vec{u}|_{X_\alpha(\Omega)} = |\vec{u}|_{1,\Omega} + |D\vec{u}|_{3/2,\Omega} + |D^2\vec{u}|_{C^{\alpha}_{7/4}(\Omega)}$$

а через $Y_\alpha(\Omega)$ – пространство функций $\varphi(x)$, $x\in\Omega$, удовлетворяющих условию $\varphi(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и имеющих конечную норму

$$|\varphi|_{Y_\alpha(\Omega)} = |D\varphi|_{C^\alpha_{2-\varepsilon_1}(\Omega)} + |D^2\varphi|_{C^\alpha_{2-\varepsilon_2}(\Omega)} + |D^3\varphi|_{C^\alpha_2(\Omega)},$$

где $\varepsilon_i\in(0,1/4)$, $\varepsilon_2<\varepsilon_1$. Наконец, определим $Z_\alpha(\Omega)$ как пространство тензоров $\mathcal{F}=(F_{ik})_{i,k=1,2,3}$ с конечной нормой

$$|\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} = |\mathcal{F}|_{2,\Omega} + |D\mathcal{F}|_{C^\alpha_{5/2}(\Omega)}.$$

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Теорема 1.1. *Пусть $\vec{w}\in X_\alpha(\Omega)$ и пусть*

$$|\vec{w}\,|_{X_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty| \leqslant \delta$$

с некоторым достаточно малым $\delta>0$. Тогда при любом

$$\vec{F} = \vec{f} + \operatorname{div}\mathcal{F},$$

где $\vec{f}\in C^\alpha(\Omega)$ – векторное поле с компактным носителем, $\mathcal{F}\in Z_\alpha(\Omega)$ и $\operatorname{div}\mathcal{F} = (\sum\limits_{j=1}^{3}\frac{\partial F_{jk}}{\partial x_j})_{k=1,2,3}$, задача (1.3) имеет единственное решение $(\vec{v},\,\sigma)$ со следующими свойствами: $\vec{v}\in X_\alpha(\Omega)$, $\sigma\in C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)$, $\nabla\sigma\in C^\alpha_2(\Omega)$, $\varepsilon\in(0,1/4)$. Оно удовлетворяет неравенству

$$|\vec{v}\,|_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\nabla\sigma|_{C^\alpha_2(\Omega)} \leqslant \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right). \quad (1.10)$$

Теорема 1.2. *Пусть $\vec{f}\in C^\alpha(\Omega)$ – векторное поле с компактным носителем, причем*

$$|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty| \leqslant r$$

с некоторым достаточно малым $r>0$. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение $(\vec{v},\sigma)$ такого же класса, как в теореме 1.1, и

$$|\vec{v}\,|_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\nabla\sigma|_{C^\alpha_2(\Omega)} \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right). \quad (1.11)$$

Замечание 1. Теоремы 1.1 и 1.2 верны также при условии достаточно быстрого убывания $\vec{f}$ на бесконечности, например, $\vec{f} \in C^{\alpha}_{m}(\Omega)$, $m > 3$. В этом случае можно представить $\vec{f}$ в виде

$$\vec{f} = \vec{f}' + \nabla \mathcal{F}',$$

где $\vec{f}'$ – финитное векторное поле класса $C^{\alpha}(\Omega)$, а $\mathcal{F}' \in Z_{\alpha}(\Omega)$. Можно положить $\vec{f}' = \zeta \vec{f}$, $\zeta \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, $\zeta(x) = 1$ при $|x| \leqslant R_0$, $\zeta(x) = 0$ при $|x| \geqslant R_0 + 1$, выбрав R_0 так, чтобы область $|x| \geqslant R_0$ содержалась в Ω, и определить $\mathcal{F}'$ формулой

$$\mathcal{F}' = (F'_{ik})_{i,k=1,2,3},$$
$$F'_{ik} = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}(1 - \zeta(y)) f_k(y)\, dy.$$

Из доказываемого ниже предложения 2 следует, что

$$|\mathcal{F}'|_{Z_{\alpha}(\Omega)} \leqslant c |\vec{f}|_{C^{\alpha}_{m}(\Omega)}, \quad m > 3.$$

§2. Вспомогательные линейные задачи

В этом параграфе приводятся оценки решений линейных задач

$$\begin{gathered} -\mu \nabla^2 \vec{u} + \mathrm{v}_{\infty} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} + \nabla p = \vec{f} + \operatorname{div} \mathcal{F}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (x \in \Omega) \\ \vec{u}\big|_{\partial\Omega} = \vec{a}, \quad \vec{u} \to 0, \quad p \to 0 \quad (|x| \to \infty), \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$-\nabla^2 \psi_1 = \nabla \cdot \vec{h} \ (x \in \Omega), \quad \psi_1\big|_{\partial\Omega} = b, \qquad \psi_1 \to 0 \ (|x| \to \infty), \tag{2.2}$$

$$-\nabla^2 \psi_2 = \nabla \cdot \vec{h} \ (x \in \Omega), \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = b, \quad \psi_2 \to 0 \ (|x| \to \infty), \tag{2.3}$$

$$z + \operatorname{div}(\vec{\omega} z) = q, \tag{2.4}$$

а также потенциала

$$\vec{v}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}(x-y) \vec{g}(y) dy. \tag{2.5}$$

Рассмотрим, прежде всего, потенциал (2.5).

Предложение 1 [2]. *Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{H}$ – фундаментальная матрица решений уравнений Озеена*

$$-\mu\nabla^2\vec{u} + \mathrm{v}_\infty \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u} = 0. \tag{2.6}$$

Тогда для функции $\vec{v}(x)$ (2.5) справедливы оценки

$$\begin{aligned} &|\nabla\vec{v}\,|_{\frac{m}{2},\mathbb{R}^3} \leqslant c|\vec{g}\,|_{m,\mathbb{R}^3}, \\ &|D^2\vec{v}\,|_{\frac{m+1}{2},\mathbb{R}^3} + [D^2\vec{v}\,]^{(\alpha)}_{\frac{m}{2}+1,\mathbb{R}^3} \leqslant c|\vec{g}\,|_{C^\alpha_m(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

в которых $2 \leqslant m < 3$.

В частности, если $\vec{g} = \vec{f} + \nabla\mathcal{F}$, где $\vec{f}$ и $\mathcal{F}$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1 *в $\mathbb{R}^3$, то $\vec{v} \in X_\alpha(\mathbb{R}^3)$ и*

$$|\vec{v}\,|_{X_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\mathbb{R}^3)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\mathbb{R}^3)}\right).$$

Действительно, при указанном условии имеем

$$\vec{v} = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{H}(x-y)\vec{f}(y)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{H}(x-y)\nabla\mathcal{F}dy.$$

Оценка первого слагаемого вытекает из оценок для фундаментальной матрицы $\mathcal{H}$, а второго – из неравенства (2.7).

Предложение 2 [3]. *Пусть $\mathcal{K}$ – матрица, состоящая из гладких сингулярных ядер Кальдерона–Зигмунда, а интеграл в* (2.5) *понимается как сингулярный. Если $\vec{g} \in C^\alpha_m(\mathbb{R}^3)$, $\alpha \in (0,1)$, $m \in (0,3)$, то $\vec{v} \in \widetilde{C}^\alpha_m(\mathbb{R}^3)$, и*

$$|\vec{v}\,|_{\widetilde{C}^\alpha_m(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\vec{g}\,|_{C^\alpha_m(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.8}$$

Если, кроме того,

$$\vec{g} = \nabla G + \vec{g}_0, \tag{2.9}$$

где $G = (G_{ik})_{i,k=1,2,3} \in C_m(\mathbb{R}^3)$, а $\vec{g}_0 \in C_{m_0}(\mathbb{R}^3)$, $m_0 > m$, то

$$|\vec{v}\,|_{C^\alpha_m(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\left([\vec{g}\,]^{(\alpha)}_{m,\mathbb{R}^3} + |\vec{g}_0|_{m_0,\mathbb{R}^3} + |G|_{m,\mathbb{R}^3}\right). \tag{2.10}$$

Доказательство предложения 2 приведено в приложении.

Предложения 1 и 2 позволяют оценить решения задач (2.1)–(2.3).

Теорема 2.1. *Пусть* $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, $\vec{a} \in C^{2+\alpha}(\partial\Omega)$, *а* $\vec{f}$ *и* $\mathcal{F}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.1. *Тогда задача* (2.1) *имеет единственное решение* $\vec{v} \in X_\alpha(\Omega)$, $p \in \widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)$, $\nabla p \in \widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)$, *и*

$$|\vec{u}\,|_{X_\alpha(\Omega)} + |p|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} + |\nabla p|_{\widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)} \leqslant \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\vec{a}\,|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\right). \quad (2.11)$$

Постоянная c *(зависящая от носителя* $\vec{f}$*) остается ограниченной, когда* $\mathrm{v}_\infty \to 0$.

Доказательство. Продолжим $\vec{f}$ и $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}^3\backslash\Omega$ с сохранением класса; тогда эти функции будут заданы во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ и

$$|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\mathbb{R}^3)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)}\right). \quad (2.12)$$

Рассмотрим функции

$$\vec{u}\,' = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla\mathcal{H}(x-y)\mathcal{F}(y)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{H}(x-y)\vec{f}(y)dy,$$
$$p' = \nabla\int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla E(x-y) : \mathcal{F}(y)dy - \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla E(x-y)\vec{f}(y)dy,$$

где $\mathcal{H}$ – фундаментальная матрица решений системы Озеена (2.6), а $E(x-y) = \frac{1}{4\pi|x-y|}$ – фундаментальное решение уравнение Лапласа. Они удовлетворяют в $\mathbb{R}^3$ системе уравнений

$$-\mu\nabla^2\vec{u}\,' + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{u}\,'}{\partial x_3} + \nabla p' = \vec{f} + \operatorname{div}\mathcal{F}, \quad \operatorname{div}\vec{u}\,' = 0$$

и, вследствие предложений 1 и 2 и неравенства (2.12),

$$|\vec{u}\,'|_{X_\alpha(\mathbb{R}^3)} + |p'|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\mathbb{R}^3)} + |\nabla p'|_{\widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\mathbb{R}^3)} \leqslant \leqslant c\left(|\vec{f}\,|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)}\right). \quad (2.13)$$

Функции $\vec{u}\,'' = \vec{u} - \vec{u}\,'$, $p'' = p - p'$ являются решениями задачи

$$-\mu\nabla^2\vec{u}\,'' + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{u}\,''}{\partial x_3} + \nabla p'' = 0, \quad \nabla\cdot\vec{u}\,'' = 0 \quad (x \in \Omega),$$
$$\vec{u}\,''\big|_{\partial\Omega} = \vec{a} - \vec{u}\,'\big|_{\partial\Omega}, \quad \vec{u}\,'' \to 0, \quad p'' \to 0 \quad (|x| \to \infty)$$

и их поведение на бесконечности определяется поведением $\mathcal{H}$ и E. Ясно, что $\vec{u}'' \in X_\alpha(\Omega)$, $p'' \in C_2^\alpha(\Omega)$, $\nabla p'' \in C_{5/2}^\alpha(\Omega)$, и

$$\begin{aligned}|\vec{u}'|_{X_\alpha(\Omega)} + |p''|_{C_2^\alpha(\Omega)} + |\nabla p''|_{C_{5/2}^\alpha(\mathbb{R}^3)} \leqslant \\ \leqslant c\left(|\vec{a}|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)} + |\vec{u}'|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\right) \leqslant \\ \leqslant c\left(|\vec{a}|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)} + |\vec{f}|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.13) вытекает (2.11). Теорема доказана.

По такой же схеме оцениваются решения задач (2.2) и (2.3).

Теорема 2.2. *Предположим, что* $\partial\Omega \in C^{2+\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда решение задач* (2.2) *и* (2.3) *удовлетворяет неравенствам*

$$\begin{aligned}|\nabla\psi_1|_{\tilde{C}_{m_1}^\alpha(\Omega)} &\leqslant c\left(|\vec{h}|_{C_{m_1}^\alpha(\Omega)} + |b|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right), \\ |\nabla\psi_2|_{\tilde{C}_{m_1}^\alpha(\Omega)} &\leqslant c\left(|\vec{h}|_{C_{m_1}^\alpha(\Omega)} + |b|_{C^{\alpha}(\partial\Omega)}\right),\end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}|D^2\psi_1|_{\tilde{C}_{m_2}^\alpha(\Omega)} &\leqslant c\left(|\nabla\cdot\vec{h}|_{C_{m_2}^\alpha(\Omega)} + |b|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\right), \\ |D^2\psi_2|_{\tilde{C}_{m_2}^\alpha(\Omega)} &\leqslant c\left(|\nabla\cdot\vec{h}|_{C_{m_2}^\alpha(\Omega)} + |b|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right),\end{aligned} \tag{2.15}$$

Если $\partial\Omega \in C^{3+\alpha}$, *то*

$$\begin{aligned}|D^3\psi_1|_{C_{m_3}^\alpha(\Omega)} \leqslant c\Big([D\nabla\cdot\vec{h}]_{m_3,\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega'}|D\nabla\cdot\vec{h}(x)| + \\ + |\nabla\cdot\vec{h}|_{m_3,\Omega} + |\vec{b}|_{C^{3+\alpha}(\partial\Omega)}\Big),\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}|D^3\psi_2|_{C_{m_3}^\alpha(\Omega)} \leqslant c\Big([D\nabla\cdot\vec{h}]_{m_3,\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega'}|D\nabla\cdot\vec{h}(x)| + \\ + |\nabla\cdot\vec{h}|_{m_3,\Omega} + |\vec{b}|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

Здесь Ω' *– ограниченная область, такая, что* $\operatorname{dist}(\Omega\setminus\Omega', \partial\Omega) > 0$, $1 < m_1 \leqslant 2$, $1 < m_2, m_3 < 3$.

Доказательство. Решение задачи (2.2) или (2.3) можно представить в виде

$$\psi_i = \psi_i' + \psi_i'', \quad i = 1, 2, \tag{2.17}$$

где
$$\psi_i'(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} E(x-y)\nabla\cdot\vec{h}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla E(x-y)\cdot\vec{h}\,dy,$$

причем векторное поле $\vec{h}$ продолжено из Ω в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ и задано во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, а ψ_i'' – решения следующих задач в области Ω:

$$\nabla^2\psi_1''=0, \quad \psi_1''\big|_{\partial\Omega}=b-\psi_1'\big|_{\partial\Omega}\equiv b_1, \quad \psi_1''\to 0\ (|x|\to\infty),$$
$$\nabla^2\psi_2''=0,\ \frac{\partial\psi_2''}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}= b-\frac{\partial\psi_2'}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=b_2,\ \psi_2''\to 0\ (|x|\to\infty). \quad (2.18)$$

Ясно, что формула (2.17) справедлива при любом достаточно регулярном продолжении $\vec{h}(x)$ в $\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}$ (тот же результат получается, если положить

$$\psi_i'(x) = \int\limits_{\Omega} E(x-y)\nabla\cdot\vec{h}dy = \int\limits_{\Omega}\nabla E\cdot\vec{h}dy + \int\limits_{\partial\Omega} E(\vec{h}\cdot\vec{n})dS_y\ ).$$

Продолжим $\vec{h}$ так, чтобы $\vec{h}\in C^{\alpha}_{m_1}(\mathbb{R}^3)$ и

$$|\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)}.$$

Имеем:

$$|\psi_i'(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3} |\nabla E(x-y)||\vec{h}\,(y)|dy \leqslant$$
$$\leqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{dy}{|x-y|^2(1+|y|)^{m_1}}|\vec{h}|_{m_1} \leqslant \frac{c|\vec{h}|_{m_1}}{(1+|x|)^{m_1-1}}. \quad (2.19)$$

Кроме того, в силу предложения 2

$$|\nabla\psi_i'|_{\tilde{C}^{\alpha}_{m_1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_1}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)}. \quad (2.20)$$

Решения задач (2.18) ведут себя на бесконечности как фундаментальное решение уравнения Лапласа, и для них справедливы оценки

$$|\nabla\psi_1''|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)} \leqslant c|b_1|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)} \leqslant c\left(|b|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)} + |\vec{h}|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)}\right),$$
$$|\nabla\psi_2''|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)} \leqslant c\left(|b|_{C^{\alpha}(\partial\Omega)} + |\vec{h}|_{C^{\alpha}_{m_1}(\Omega)}\right).$$

Отсюда и из (2.19), (2.20) вытекают оценки (2.14). Для оценки вторых производных используем другое продолжение $\vec{h}$, такое, что

$$|\nabla \cdot \vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\nabla \cdot \vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}. \tag{2.21}$$

Очевидно, что

$$\begin{gathered}
|\psi_i'(x)| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus\Omega} |E(x-y)||\nabla \cdot \vec{h}(y)|dy+ \\
\int\limits_{\Omega} |\nabla E(x-y)||\,\vec{h}\,(y)|dy + \int\limits_{\partial\Omega} |E(x-y)||\,\vec{h}\cdot\vec{n}\,|dS_y \leqslant \\
\leqslant \left(|\,\vec{h}\,|_{m_1} + |\nabla\cdot\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}\right)\left(\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{(1+|x|^{m_1-1}}\right), \qquad (2.22) \\
|\nabla\psi_i'(x)| \leqslant c|\nabla\cdot\vec{h}|_{C^{\alpha}_{m_2}(\mathbb{R}^3)} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{dy}{|x-y|^2(1+|y|)^{m_2}} \leqslant \\
\leqslant \frac{c|\nabla\cdot\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}}{(1+|x|)^{m_2-1}}
\end{gathered}$$

и в силу предложения 2

$$|D^2\psi_i'|_{\widetilde{C}^{\alpha}_{m_2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c|\nabla\cdot\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}. \tag{2.23}$$

Так как $m_2 < 3$, то для решений задач (2.18) справедливы оценки

$$\begin{aligned}
|D^2\psi_1''|_{C^{\alpha}_{m_2}(\mathbb{R}^3)} &\leqslant \left(|b|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)} + |\psi_1'|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\right) \leqslant \\
&\leqslant c\left(|b|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)} + |\nabla\cdot\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}\right), \qquad (2.24) \\
|D^2\psi_2''|_{C^{\alpha}_{m_2}(\mathbb{R}^3)} &\leqslant c\left(|b|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)} + |\nabla\cdot\vec{h}\,|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Тем самым доказана оценка (2.15).

Переходим к оценке третьих производных ψ_i. Потребуем, чтобы наряду с (2.21) была справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\Big[D(\nabla\cdot\vec{h}\,)\Big]^{(\alpha)}_{m_3,\mathbb{R}^3} \leqslant \\
&\qquad \leqslant c\left(\Big[D(\nabla\cdot\vec{h}\,)\Big]^{(\alpha)}_{m_3,\mathbb{R}^3} + \max_{\Omega'}|D(\nabla\cdot\vec{h}\,)| + \max_{\Omega'}|\nabla\cdot\vec{h}\,|\right)
\end{aligned}$$

(она будет иметь место, если $|\nabla\cdot\vec h\,|_{C^{1+\alpha}(\mathbb R^3\setminus\Omega)}\leqslant c|\nabla\cdot\vec h\,|_{C^{1+\alpha}(\Omega')}$). При этом условии наряду с (2.22)–(2.24) будут выполнены неравенства

$$\begin{aligned}
|D^3\psi_i'|_{C^\alpha_{m_3}(\mathbb R^3)} &\leqslant c\left([D\nabla\cdot\vec h]^{(\alpha)}_{m_3,\mathbb R^3}+|\nabla\cdot\vec h|_{m_3,\mathbb R^3}\right)\leqslant\\
&\leqslant c\left([D\nabla\cdot\vec h]^{(\alpha)}_{m_3,\Omega}+\max_{\Omega'}|D\nabla\cdot\vec h|+|\nabla\cdot\vec h|_{m_3,\Omega}\right),\\
|D^3\psi_1''|_{C^\alpha_{m_3}(\mathbb R^3)} &\leqslant c\left(|b|_{C^{3+m}(\partial\Omega)}+|\psi_1'|_{C^{3+\alpha}(\partial\Omega)}\right)\leqslant\\
&\leqslant c\left([D\nabla\cdot\vec h]^{(\alpha)}_{m_3,\Omega}+\max_{\Omega'}|D\nabla\cdot\vec h|+|\nabla\cdot\vec h|_{m_3,\Omega}+|\vec b|_{C^{3+\alpha}(\partial\Omega)}\right),\\
|D^3\psi_2''|_{C^\alpha_{m_3}(\mathbb R^3)} &\leqslant c\left([D(\nabla\cdot\vec h)]^{(\alpha)}_{m_3,\Omega}+\max_{\Omega'}|D(\nabla\cdot\vec h)|+|\nabla\cdot\vec h|_{m_3,\Omega}+\right.\\
&\left.\quad+|\vec b|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)}\right).
\end{aligned}$$

Из этих неравенств и вытекает (2.16). Теорема доказана.

Наконец, приведем (в удобной для нас форме) оценку решения уравнения переноса (2.4), доказанную в [4].

Теорема 2.3. *Пусть* $\vec\omega\in C^0(\Omega)$, $\vec\omega\cdot\vec n\big|_{\partial\Omega}=0$, $\operatorname{div}\vec\omega\to 0$ *при* $|x|\to\infty$ *и*

$$|\,\vec\omega\,|_{C^{1+\alpha}(\Omega)}\leqslant\delta_1\ll 1. \tag{2.25}$$

Тогда при любом $q\in C^\alpha_m(\Omega)$, $m\geqslant 0$ *(в случае* $m=0$ *требуется, чтобы* $q\in C^\alpha(\Omega)$ *и* $q\to 0$ *при* $|x|\to\infty$*) существует единственная функция* $z\in C^\alpha_m(\Omega)$, *удовлетворяющая* (2.4) *в слабом смысле*

$$\int\limits_\Omega(z\eta-\vec\omega\cdot\nabla\eta)\,dx=\int\limits_\Omega q\eta dx,\quad\forall\,\eta\in C_0^\infty(\Omega)$$

и подчиняющаяся неравенству

$$|z|_{C^\alpha_m(\Omega)}\leqslant c|q|_{C^\alpha_m(\Omega)}. \tag{2.26}$$

Кроме того,

$$|z|_{m,\Omega}\leqslant c|q|_{m,\Omega}. \tag{2.27}$$

Совершенно аналогичное предложение справедливо для векторного уравнения переноса

$$\vec z+A\vec z+\operatorname{div}(\vec\omega\otimes\vec z\,)=\vec q, \tag{2.28}$$

где $\vec z=(z_1(x),z_2(x),z_3(x))$, $\operatorname{div}(\vec\omega\otimes\vec z\,)=(\sum\limits_{k=1}^3\frac{\partial}{\partial x_k}\omega_k(x)z_i(x))_{i=1,2,3}$ и $A=(A_{ik}(x))_{i,k=1,2,3}$.

Теорема 2.4. *Пусть $\vec{q}$ и пусть $\vec{\omega}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3, $A \in C^\alpha(\Omega)$, $A \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $|A|_{C^\alpha(\Omega)} \leqslant \delta_1$. Тогда существует единственное векторное поле $\vec{z} \in C^\alpha_m(\Omega)$, удовлетворяющее в слабом смысле уравнению (2.4) и подчиняющееся неравенствам*

$$|\vec{z}|_{C^\alpha_m(\Omega)} \leqslant c|\vec{q}|_{C^\alpha_m(\Omega)}, \quad |\vec{z}|_{m,\Omega} \leqslant c|\vec{q}|_{m,\Omega}. \tag{2.29}$$

Заметим, что градиент решения уравнения (2.4) удовлетворяет уравнению типа (2.28), а именно,

$$\nabla z + (\nabla \otimes \vec{\omega})\nabla z + \operatorname{div}\vec{\omega} \otimes \nabla z = \nabla q - z\nabla \operatorname{div}\vec{\omega}.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение:

Теорема 2.5. *Если $\vec{\omega} \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет условиям (2.3) с малым δ_1, то решение уравнения (2.4) подчиняется неравенствам*

$$|\nabla z|_{C^\alpha_{m_1}(\Omega)} \leqslant c\left(|\nabla q|_{C^\alpha_{m_1}(\Omega)} + |z\nabla \operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^\alpha_{m_1}(\Omega)}\right),$$
$$|\nabla z|_{m_1,\Omega} \leqslant c\left(|\nabla q|_{m_1,\Omega} + |z\nabla \operatorname{div}\vec{\omega}|_{m_1,\Omega}\right), \quad m_1 \geqslant 0.$$

Наконец, имеет место

Теорема 2.6. *Пусть $\vec{\omega} \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы (2.3) с малым δ_1 и, кроме того,*

$$\vec{\omega}\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Предположим также, что

$$\Delta q = \operatorname{div}\vec{B}$$

(в слабом смысле), причем $\vec{B} \in C^\alpha_{m_2}(\Omega)$. Тогда

$$|\nabla \operatorname{div}\vec{\omega} z|_{\tilde{C}^\alpha_{m_2}(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|\vec{B}|_{C^\alpha_{m_2}(\Omega)} + |S(\vec{\omega})\nabla z|_{C^\alpha_{m_2}(\Omega)} + |z\nabla \operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^\alpha_{m_2}(\Omega)} + |z \operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

где $S(\vec{\omega}) = \{\frac{\partial\omega_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\omega_k}{\partial x_i}\}_{i,k=1,2,3}$, $m_2 \in (1, 2]$.

Доказательство. Мы ограничимся формальными выкладками, которые могут быть легко оправданы. Легко видеть, что

$$\Delta \operatorname{div}\vec{\omega} z = \Delta q - \Delta z = \nabla \cdot \vec{B} - \Delta z,$$

причем Δz удовлетворяет уравнению

$$\Delta z + \operatorname{div}\vec{\omega}\Delta z = \\ = \Delta q - \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_j}z + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{\omega}}{\partial x_j}\frac{\partial z}{\partial x_j}\right) = \nabla\cdot\vec{D},$$

где

$$\vec{D} = \vec{B} - S(\vec{\omega})\nabla z - z\nabla\operatorname{div}\vec{\omega}.$$

Следовательно,

$$\Delta z = \nabla\cdot\vec{G},$$

где $\vec{G}$ – решение векторного уравнения

$$\vec{G} + \operatorname{div}\vec{\omega}\otimes\vec{G} - (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{\omega} = \vec{D} = \vec{B} - S(\vec{\omega})\nabla z - z\nabla\operatorname{div}\vec{\omega}.$$

Таким образом, $\operatorname{div}\vec{\omega}z$ является решением задачи

$$\Delta\operatorname{div}\vec{\omega}z = \nabla\cdot(\vec{B}-\vec{G}), \quad \operatorname{div}\vec{\omega}z\big|_{\partial\Omega} = z\operatorname{div}\vec{\omega}\big|_{\partial\Omega},$$

и вследствие теорем 2.2 и 2.5,

$$|\nabla\operatorname{div}\vec{\omega}z|_{\widetilde{C}^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} \leqslant c\left(|\vec{B}|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} + |\vec{G}|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} + |z\operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right) \leqslant \\ \leqslant c\left(|\vec{B}|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} + |S(\vec{\omega})\nabla z|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} + |z\nabla\operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^{\alpha}_{m_2}(\Omega)} + |z\operatorname{div}\vec{\omega}|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right),$$

что и требовалось.

§3 Доказательство теоремы 1.1

Мы докажем теорему 1.1, установив, что задачи (1.5), (1.8), (1.9) имеют решения со следующими свойствами:

$$\vec{u}\in X_\alpha(\Omega), \quad p\in\widetilde{C}^{\alpha}_{2}(\Omega), \quad \nabla p\in\widetilde{C}^{\alpha}_{5/2}(\Omega), \quad \varphi\in Y_\alpha(\Omega), \\ \overline{\sigma}\in C^{\alpha}_{2-\varepsilon}(\Omega), \quad \nabla\overline{\sigma}\in C^{\alpha}_{2}(\Omega).$$

($\varepsilon\in(\varepsilon_2,\varepsilon_1)$, ε_i то же, что в определении пространства $Y_\alpha(\Omega)$). Воспользуемся принципом сжатых отображений. Для любой функции $\widetilde{\varphi}\in Y_\alpha(\Omega)$ определим $(\widetilde{\vec{u}},\widetilde{p})$ как решение задачи (1.5) с функцией $\widetilde{\varphi}$ в краевом условии и обозначим через $\widetilde{\sigma}$ решение уравнения (1.8) с функциями $\widetilde{p}$ и $\widetilde{\varphi}$ в правой части. Далее, подставим $\widetilde{\sigma}$ и $\widetilde{\varphi}$ в правую часть уравнения (1.9). Решение полученной таким образом задачи определит оператор $T : \widetilde{\varphi} \to \varphi$, неподвижная точка которого соответствует решению задач (1.5), (1.8), (1.9).

Перейдем к оценкам упомянутых выше функций. Положим

$$\widetilde{\vec{u}} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad \widetilde{p} = p_1 + p_2,$$

где $(\vec{u}_i, p_i)$ – решения задач

$$\begin{gathered}
-\mu\nabla^2\vec{u}_1 + \mathrm{v}_\infty \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_3} + \nabla p_1 = \vec{F} \equiv \vec{f} + \operatorname{div}\mathcal{F}, \quad \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0, \\
\vec{u}_1\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty, \quad \vec{u}_1 \to 0, \quad p_1 \to 0 \quad (|x| \to \infty),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
-\mu\nabla^2\vec{u}_2 + \mathrm{v}_\infty \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_3} + \nabla p_2 = 0, \quad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0, \\
\vec{u}_2\big|_{\partial\Omega} = -\nabla\widetilde{\varphi}\big|_{\partial\Omega}, \quad \vec{u}_2 \to 0, \quad p_2 \to 0 \quad (|x| \to \infty),
\end{gathered}$$

и пусть также

$$\widetilde{\sigma} = \sigma_1 + \sigma_2,$$

где σ_i – решения уравнений переноса

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 + (2\mu + \lambda)\operatorname{div}\sigma_1(\vec{w} + \vec{v}_\infty) = p_1, \\
&\sigma_2 + (2\mu + \lambda)\operatorname{div}\sigma_2(\vec{w} + \vec{v}_\infty) = p_2 + (2\mu + \lambda)\mathrm{v}_\infty \operatorname{div}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right).
\end{aligned}$$

Наконец, положим

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\begin{gathered}
\nabla^2\varphi_1 - \mathrm{v}_\infty^2 \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_3} = -\operatorname{div}\left(\sigma_1(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right), \\
\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = -\mathrm{v}_\infty n_3, \quad \nabla\varphi_1 \to 0 \quad (|x| \to \infty),
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\nabla^2\varphi_2 - \mathrm{v}_\infty^2 \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x_3} = -\operatorname{div}\left(\sigma_2(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right) + \mathrm{v}_\infty \operatorname{div}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}\vec{w}\right), \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nabla\varphi_2 \to 0 \quad (|x| \to \infty).
\end{gathered}$$

Очевидно, φ_1 не зависит от $\widetilde{\varphi}$, а φ_2 зависит от $\widetilde{\varphi}$ линейно. Таким образом,

$$T\widetilde{\varphi} = \varphi_1 + l(\widetilde{\varphi})$$

и уравнение $T\varphi = \varphi$ может быть записано в виде

$$\psi = l(\varphi_1 + \psi), \tag{3.1}$$

где $\psi = \varphi - \varphi_1$. Оценим φ_1 и покажем, что l является непрерывным оператором в Y_α, норма которого мала при малых v_∞ и $|\vec{w}|_{X_\alpha}$. Вследствие теорем 2.1, 2.3–2.6,

$$|\vec{u}_1|_{X_\alpha} + |p_1|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} + |\nabla p_1|_{\widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)} \leqslant \left(|f|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right),$$
$$|\vec{u}_2|_{X_\alpha} + |p_2|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} + |\nabla p_2|_{\widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)} \leqslant c|\nabla\widetilde{\varphi}|_{C^{2+\alpha}(\partial\Omega)},$$

$$|\sigma_1|_{C_{2-\varepsilon}^\alpha(\Omega)} + |\nabla\sigma_1|_{C_2^\alpha(\Omega)} \leqslant c\left(|p_1|_{C_{2-\varepsilon}^\alpha(\Omega)} + |\nabla p_1|_{C_2^\alpha(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|f|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right),$$

$$|\nabla\,\mathrm{div}\,\sigma_1(\vec{w} + \vec{v}_\infty)|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|\vec{f}|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |S(\vec{w})\nabla\sigma_1|_{C_2^\alpha(\Omega)} + \right.$$
$$\left. + |\sigma_1\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{w}|_{C_2^\alpha(\Omega)} + |\sigma_1\,\mathrm{div}\,\vec{w}|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|f|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right),$$

$$|\sigma_2|_{C_{2-\varepsilon}^\alpha(\Omega)} + |\nabla\sigma_2|_{C_2^\alpha(\Omega)} \leqslant c\left(|p_2|_{C_{2-\varepsilon}^\alpha(\Omega)} + |\nabla p_2|_{C_2^\alpha(\Omega)}\right) +$$
$$+ c|\mathrm{v}_\infty|\left(\left|\mathrm{div}\,\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right|_{C_{2-\varepsilon}^\alpha(\Omega)} + \right.$$
$$\left. + \left|\nabla\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right|_{C_2^\alpha(\Omega)}\right) \leqslant c|\widetilde{\varphi}|_{Y_\alpha},$$

$$|\nabla\,\mathrm{div}\,\sigma_2(\vec{w} + \vec{v}_\infty)|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|\mathrm{v}_\infty|\left|\nabla\,\mathrm{div}\,\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}(\vec{w} + \vec{v}_\infty)\right|_{C_2^\alpha(\Omega)} |S(\vec{w})\nabla\sigma_2|_{C_2^\alpha(\Omega)}\right) +$$
$$+ c\left(|\sigma_2\,\mathrm{div}\,\vec{w}|_{C^{1+\alpha}(\partial\Omega)} + |\sigma_2\nabla\,\mathrm{div}\,\vec{w}|_{C_2^\alpha(\Omega)}\right) \leqslant$$
$$\leqslant c\left(|\mathrm{v}_\infty| + |\vec{w}|_{X_\alpha}\right)|\widetilde{\varphi}|_{Y_\alpha}.$$

Эти оценки дают возможность оценить φ_1 и φ_2. Так как $\varepsilon_3 < \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < \frac{1}{4}$, то в силу теоремы 2.2

$$
\begin{gathered}
|\varphi_1|_{Y_\alpha} \leqslant c\Big(|\sigma_1(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\operatorname{div}\sigma_1(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{C^\alpha_2(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty| + \\
+ |\nabla \operatorname{div}\sigma_1(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{\widetilde{C}^\alpha_2(\Omega)}\Big) \leqslant c\left(|\vec{f}|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathcal{F}|_{Z_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right), \\
|\varphi_2|_{Y_\alpha} \leqslant c\Bigg(|\sigma_2(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\left|\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}\vec{w}\right|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + \\
+ |\operatorname{div}\sigma_2(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{C^\alpha_2(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\left|\operatorname{div}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}\vec{w}\right)\right|_{C^\alpha_2(\Omega)} + \\
+ |\nabla \operatorname{div}\sigma_2(\vec{w}+\vec{v}_\infty)|_{\widetilde{C}^\alpha_2(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\left|\nabla\operatorname{div}\left(\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial x_3}\vec{w}\right)\right|_{\widetilde{C}^\alpha_2(\Omega)}\Bigg) \leqslant \\
\leqslant c\left(|\mathrm{v}_\infty| + |\vec{w}|_{X_\alpha}\right)|\widetilde{\varphi}|_{Y_\alpha},
\end{gathered}
$$

т.е. $\|l\| \leqslant c(|\mathrm{v}_\infty| + |\vec{w}|_{X_\alpha}) \leqslant c\delta$. Если $c\delta < 1$, то уравнение (3.1) однозначно разрешимо в шаре $|\psi|_{Y_\alpha} \leqslant \eta$, где $\eta \geqslant \frac{\|l\|\,|\varphi_1|_{Y_\alpha}}{1-\|l\|}$. Оценка (1.10) следует из полученных выше неравенств. Тем самым теорема 1.1 доказана.

§4. Доказательство теоремы 1.2

Разрешимость задачи (1.1), (1.2) устанавливается так же, как в [1]. Можно воспользоваться методом последовательных приближений. Положим $\vec{v}_0 = -\vec{v}_\infty$, $\sigma_0 = 0$ и определим $\vec{v}_{k+1}$, σ_{k+1}, $k = 0, 1, \dots$ как решения задач

$$
\begin{gathered}
-\mu\nabla^2\vec{v}_{k+1} - (\mu+\lambda)\nabla\operatorname{div}\vec{v}_{k+1} + \nabla\sigma_{k+1} + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{v}_{k+1}}{\partial x_3} = \vec{F}(\sigma_k, \vec{v}_k), \\
\operatorname{div}\vec{v}_{k+1} + \operatorname{div}(\sigma_{k+1}(\vec{v}_k + \vec{v}_\infty)) = 0 \\
\vec{v}_{k+1}\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty, \quad \vec{v}_{k+1} \to 0, \quad \sigma_{k+1} \to 0 \quad (|x| \to \infty).
\end{gathered}
$$

При этом $\vec{F}(\sigma_0, \vec{v}_0) = \vec{f}$ и $\vec{v}_1$, σ_1 определяются как решение задачи Озеена

$$
\begin{gathered}
-\mu\nabla^2\vec{v}_1 + \mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{v}_1}{\partial x_3} + \nabla\sigma_1 = \vec{f}, \quad \operatorname{div}\vec{v}_1 = 0, \\
\vec{v}_1\big|_{\partial\Omega} = -\vec{v}_\infty, \quad \vec{v}_1 \to 0, \quad \sigma_1 \to 0 \ \ (|x| \to \infty).
\end{gathered}
$$

Очевидно, что $\vec{v}_1 \in X_\alpha(\Omega)$, $\sigma_1 \in \widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)$, $\nabla\sigma_1 \in \widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)$ и

$$|\vec{v}_1|_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma_1|_{\widetilde{C}_2^\alpha(\Omega)} + |\nabla\sigma_1|_{\widetilde{C}_{5/2}^\alpha(\Omega)} \leqslant c\left(|\vec{f}|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right) \leqslant cr.$$

Легко видеть, что

$$\vec{F}(\sigma_k, \vec{v}_k) = (1+\sigma_k)\vec{f} + \nabla\mathcal{F}_k,$$
$$\mathcal{F}_k = (1+\sigma_k)\vec{v}_k \otimes \vec{v}_k + \vec{v}_\infty \otimes \sigma_k \vec{v}_k,$$

причем $(1+\sigma_k)\vec{f} \in C^\alpha(\Omega)$, $\mathcal{F}_k \in Z_\alpha(\Omega)$, так что $\vec{F}(\sigma_k, \vec{v}_k)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1. При этом

$$|\mathcal{F}_k|_{Z_\alpha(\Omega)} \leqslant c\left(|\,\vec{v}_k\,|^2_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma_k|^2_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\nabla\sigma_k|^2_{C_2^\alpha(\Omega)}\right)$$

и в силу теоремы 1.1

$$\begin{aligned}\xi_{k+1} = |\vec{v}_{k+1}|_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma_{k+1}|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\nabla\sigma_{k+1}|_{C_2^\alpha(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant c\left((1+|\sigma_k|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)})|\vec{f}|_{C^\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty|\right) + c'\xi_k^2 \leqslant \\ \leqslant c(r\xi_k + r) + c'\xi_k^2,\end{aligned} \tag{4.1}$$

если только

$$|\vec{v}_k|_{X_\alpha(\Omega)} + |\mathrm{v}_\infty| \leqslant \delta. \tag{4.2}$$

Отсюда легко получается, что при достаточно малом r неравенство $\xi_k \leqslant \xi$ влечет за собой (при условии (4.2)) $\xi_{k+1} \leqslant \xi$, где ξ – корень квадратного уравнения

$$c'\xi^2 - (1-cr)\xi + cr = 0,$$

т.е.

$$\xi = \frac{1-cr}{2c'} - \sqrt{\frac{(1-cr)^2}{4c'^{\,2}} - \frac{cr}{c'}} = \frac{4c'cr}{1-cr+\sqrt{(1-cr)^2 - 4c'r}}.$$

Ясно, что при малом r число δ также будет достаточно мало, а значит справедлива равномерная оценка

$$|\vec{v}_{k+1}|_{X_\alpha(\Omega)} + |\sigma_{k+1}|_{C^\alpha_{2-\varepsilon}(\Omega)} + |\nabla\sigma_{k+1}|_{C_2^\alpha(\Omega)} \leqslant \xi \leqslant cr.$$

Для доказательства сходимости последовательностей $\{\vec{v}_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ заметим, что разности

$$\vec{w}_{k+1} = \vec{v}_{k+1} - \vec{v}_k, \quad \tau_{k+1} = \sigma_{k+1} - \sigma_k \quad (k \geqslant 1)$$

удовлетворяют соотношениям

$$-\mu\nabla^2 \vec{w}_{k+1} - (\mu+\lambda)\nabla \operatorname{div} \vec{w}_{k+1} + \nabla\tau_{k+1} + \mathrm{v}_\infty \frac{\partial \vec{w}_{k+1}}{\partial x_3} =$$
$$= \tau_k \vec{f} + \nabla(\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}),$$

$$\operatorname{div} \vec{w}_{k+1} + \operatorname{div}\left(\tau_{k+1}(\vec{v}_k + \vec{v}_\infty)\right) = -\operatorname{div}(\sigma_k \vec{w}_k),$$
$$\vec{w}_{k+1}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{w}_{k+1} \to 0, \quad \tau_{k+1} \to 0 \quad (|x| \to \infty).$$

Оценивая $\vec{w}_{k+1}$, как и в [1], §8, с помощью энергетического неравенства и замечая, что

$$\int\limits_\Omega |\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}|^2 \leqslant c \int\limits_\Omega \left(|\vec{w}_k|^2(|\vec{v}_k|^2 + |\sigma_k|^2) + |\tau_k|^2|\vec{v}_{k-1}|^2\right) dx \leqslant$$
$$\leqslant cr^2 \left(\int\limits_\Omega \frac{|\vec{w}_k|^2}{|x|^2} dx + \int\limits_\Omega |\tau_k|^2 dx \right) \leqslant cr^2 \int\limits_\Omega \left(|D\vec{w}_k|^2 + |\tau_k|^2\right) dx,$$
$$\int\limits_\Omega |\tau_{k+1}|^2 dx \leqslant c \int\limits_\Omega \left(|D\vec{w}_k|^2 + r^2|\tau_k|^2 + |\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_{k-1}|^2\right) dx$$

(см. [1], неравенство (5.23)), получаем

$$\int\limits_\Omega \left(|D\vec{w}_{k+1}|^2 + |\tau_{k+1}|^2\right) dx \leqslant cr \int\limits_\Omega \left(|D\vec{w}_k|^2 + |\tau_k|^2\right) dx,$$

что доказывает сходимость $\{D\vec{v}_k\}$ и $\{\sigma_k\}$ в норме $L_2(\Omega)$. Значит, $\{\vec{v}_k\}$ сходится в норме $C^{2+\alpha'}(\Omega')$ а σ_k – в $C^{1+\alpha'}(\Omega')$, $\alpha' < \alpha$, в любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ к решению задачи (1.1), (1.2), и в силу (4.1) это решение удовлетворяет неравенству (1.11). Единственность решения также легко устанавливается с помощью энергетического неравенства. Таким образом, теорема 1.2 доказана.

Несколько слов в заключение об асимптотике решения на бесконечности. Так как $\vec{u} \in X_\alpha(\Omega)$, а $\varphi \in Y_\alpha(\Omega)$, то основной вклад в нее вносит векторное поле $\vec{u}$, которое можно рассмотреть как решение задачи

$$
\begin{gathered}
-\mu\nabla^2\vec{u}+\mathrm{v}_\infty\frac{\partial\vec{u}}{\partial x_3}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}+\nabla p=\nabla\mathcal{F}'+(1+\sigma)\vec{f},\\
\operatorname{div}\vec{u}=0,\\
\vec{u}\big|_{\partial\Omega}=-\vec{v}_\infty-\nabla\varphi\big|_{\partial\Omega},\quad \vec{u}\to 0,\quad p\to 0\quad (|x|\to\infty),
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

где $p=\sigma+(2\mu+\lambda)\operatorname{div}\sigma(\vec{v}+\vec{v}_\infty)+\mathrm{v}_\infty\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ и

$\mathcal{F}'=-\sigma\vec{v}\otimes\vec{v}-\vec{u}\otimes\nabla\varphi-\nabla\varphi\otimes\vec{u}-\nabla\varphi\otimes\nabla\varphi-\mathrm{v}_\infty\sigma\vec{e}_3\otimes\vec{v}\in C^\alpha_m(\Omega),\ 2<m<3.$

При $\mathcal{F}'=0$ для решения этой задачи справедлива асимптотическая формула, аналогичная известному результату Р. Финна [5]

$$
\vec{u}(x)=\mathcal{H}(x)\vec{a}+\vec{u}\,'(x),\tag{4.4}
$$

где $\vec{a}$ – некоторый постоянный вектор и $\vec{u}'(x)=O(|x|^{-1-\omega})$, $\omega>0$ (не останавливаясь на вычислении показателя ω, равного $1/2-\varepsilon$ в случае $F=0$, заметим, что эта формула указывает на анизотропный характер убывания векторного поля $\vec{u}$ при $|x|\to\infty$). Она была выведена из представления решения в виде суммы объемного потенциала с ядром $\mathcal{H}$, а также потенциалов простого и двойного слоя по поверхности $\partial\Omega$. При $\mathcal{F}'\neq 0$ в этом представлении появляется новый член

$$
\vec{w}(x)=\int\limits_\Omega\mathcal{H}(x-y)\nabla\mathcal{F}'(y)dy=
$$

$$
=\int\limits_{\partial\Omega}\mathcal{H}(x-y)\left(\vec{n}\mathcal{F}'\,(y)\right)dS_y+\int\limits_\Omega\nabla\mathcal{H}(x-y):\mathcal{F}'(y)dy\equiv\vec{w}'(x)+\vec{w}\,''(x).
$$

Так как в силу неравенства (2.7_1)

$$
|\,\vec{w}\,''(x)|\leqslant c|\mathcal{F}'\,|_m(1+|x|)^{-m/2},\quad m/2>1,
$$

и при больших $|x|$

$$
\vec{w}\,'(x)=\mathcal{H}(x)\int\limits_{\partial\Omega}\vec{n}\,\mathcal{F}'\,dS+O\left(|x|^{-1-\omega}\right),
$$

то ясно, что формула (4.4) справедлива для решения задачи (4.3), а значит и для $\vec{v}=\vec{u}+\nabla\varphi$.

§5. Приложение: доказательство предложения 2

Здесь приводится доказательство предложения 2, которое мы воспроизводим из работы [3].

Вследствие условия

$$\int\limits_{|\xi|=1} \mathcal{K}(\xi) d\xi = 0,$$

можно записать $\vec{v}(x)$ в виде

$$\vec{v}(x) = \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} \mathcal{K}(x-y)\left[\vec{g}(y)-\vec{g}(x)\right]dy + \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \mathcal{K}(x-y)\vec{g}(y)dy.$$

Отсюда следует оценка

$$|\vec{v}(x)| \leqslant c\Bigg([\vec{g}\,]_m^{(\alpha)} \int\limits_{|x-y|\leqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^{3-\alpha}(1+|x|)^m} + $$
$$+|\vec{g}\,|_m \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^3(1+|y|)^m}\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant c_1(1+|x|)^{-m}[\vec{g}\,]_m^{(\alpha)} + c_2|\vec{g}\,|_m(1+1x|)^{-m}\left[\log(1+|x|)+1\right].$$

При условии (2.9) от логарифмического множителя можно избавиться, проинтегрировав по частям в одном из членов:

$$\int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \mathcal{K}(x-y)\vec{g}(y)dy = \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \mathcal{K}(x-y)\vec{g}_0(y)dy +$$
$$+\int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \nabla\mathcal{K}(x-y)G(y)dy - \int\limits_{|x-y|=1} \mathcal{K}(x-y)G\vec{n}dS_y.$$

Это приводит к неравенству

$$\Bigg|\int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \mathcal{K}(x-y)\vec{g}(y)dy\Bigg| \leqslant c\Bigg[|\vec{g}_0|_{m_0} \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^3(1+|y|)^{m_0}} +$$
$$+|G|_m\Bigg(\int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^4(1+|y|)^m} + \int\limits_{|x-y|=1} \frac{dS_y}{(1+|y|)^m}\Bigg)\Bigg] \leqslant$$
$$\leqslant c\left[|\vec{g}_0|_{m_0}(1+|x|)^{-m_0}\left(1+\log(1+|x|)\right) + |G|_m(1+|x|)^{-m}\right] \leqslant$$
$$\leqslant c(1+|x|)^{-m}\left(|\vec{g}_0|_{m_0} + |G|_m\right). \tag{5.1}$$

Оценим теперь $[\vec{v}]_m^{(\alpha)}$. Если $|x-z| \equiv \rho < 1$, то

$$\begin{aligned}\vec{v}(x)-\vec{v}(z) = &\int\limits_{|x-y|\leqslant 2\rho} \mathcal{K}(x-y)\,[\vec{g}(y)-\vec{g}(x)]\,dy- \\ &-\int\limits_{|x-y|\leqslant 2\rho} \mathcal{K}(z-y)\,[\vec{g}(y)-\vec{g}(z)]\,dy+ \\ &+\int\limits_{|x-y|\geqslant 2\rho} [\mathcal{K}(x-y)-\mathcal{K}(z-y)]\,[\vec{g}(y)-\vec{g}(z)]\,dy.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Ясно, что сумма первых двух интегралов не превосходят $c\rho^\alpha(1+|x|)^{-m}[\vec{g}]_m^{(\alpha)}$. Далее,

$$\begin{aligned}&\Bigg|\int\limits_{2\rho\leqslant|x-y|\leqslant 3} [\mathcal{K}(x-y)-\mathcal{K}(z-y)]\,[\vec{g}(y)-\vec{g}(z)]\,dy\Bigg| \leqslant \\ &\leqslant c\rho \int\limits_{2\rho\leqslant|x-y|\leqslant 3} \frac{dy}{|x-y|^{4-\alpha}(1+|x|)^m}[\vec{g}]_m^{(\alpha)} \leqslant \frac{c\rho^\alpha[\vec{g}]_m^{(\alpha)}}{(1+|x|)^m},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Bigg|\int\limits_{|x-y|\geqslant 3} [\mathcal{K}(x-y)-\mathcal{K}(z-y)]\,[\vec{g}(y)-\vec{g}(z)]\,dy\Bigg| \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{|x-y|\geqslant 3} \big|\mathcal{K}(x-y)-\mathcal{K}(z-y)\big||\vec{g}(y)|dy+ \\ &+\int\limits_{|x-y|\geqslant 3} \big|\mathcal{K}(x-y)-\mathcal{K}(z-y)\big|dy|\vec{g}(z)| \leqslant \\ &\leqslant c\rho\Bigg(\int\limits_{|x-y|\geqslant 3} \frac{dy}{|x-y|^4(1+|y|)^m} + \frac{1}{(1+|z|)^m}\int\limits_{|x-y|\geqslant 3} \frac{dy}{|x-y|^4}\Bigg) \leqslant \\ &\leqslant \frac{c\rho[\vec{g}]_m^{(\alpha)}}{(1+|x|)^m}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\vec{v}(x)-\vec{v}(z)| \leqslant c\rho^\alpha|\vec{g}|_{C_m^\alpha(\mathbb{R}^3)}(1+|x|)^{-m},$$

и (2.7) доказано.

Оценим, наконец, $\vec{v}(x) - \vec{v}(z)$ при условии (2.9). Пусть $\zeta(t)$ – гладкая монотонная функция положительного аргумента, равная единице при $t \leqslant 1$ и нулю при $t \geqslant 2$. Положим

$$\mathcal{K}_1(x) = \mathcal{K}(x)\zeta(|x|), \quad \mathcal{K}_2(x) = \mathcal{K}(x)(1-\zeta(|x|)),$$
$$\vec{v}_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}_i(x-y)\vec{g}(y)dy, \quad i = 1, 2.$$

Для $\vec{v}_1(x) - \vec{v}_1(z)$ справедливо представление типа (5.2), а именно,

$$\vec{v}_1(x) - \vec{v}_1(z) = \int\limits_{|x-y|\leqslant 2\rho} \mathcal{K}_1(x-y)\left[\vec{g}(y) - \vec{g}(z)\right] dy -$$
$$- \int\limits_{|x-y|\leqslant 2\rho} \mathcal{K}_1(x-y)\left[\vec{g}(y) - \vec{g}(z)\right] dy +$$
$$+ \int\limits_{2\rho\leqslant|x-y|\leqslant 3} \left[\mathcal{K}_1(x-y) - \mathcal{K}_1(z-y)\right]\left[\vec{g}(y) - \vec{g}(z)\right] dy,$$

и поэтому

$$|\vec{v}_1(x) - \vec{v}_1(z)| \leqslant c\rho^\alpha [\vec{g}]_m^{(\alpha)} (1+|x|)^{-m}.$$

Далее, из формулы

$$\vec{v}_2(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \mathcal{K}_2(x-y)\vec{g}_0(y)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^3} \nabla\mathcal{K}_2(x-y)G(y)dy$$

легко следует

$$|\vec{v}_2(x) - \vec{v}_2(z)| \leqslant$$
$$\leqslant c\Bigg(\rho \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^3(1+|y|)^{m_0}} |\vec{g}_0|_{m_0} +$$
$$+\rho \int\limits_{|x-y|\geqslant 1} \frac{dy}{|x-y|^4(1+|y|)^m} |G|_m\Bigg) \leqslant$$
$$\leqslant c\rho^\alpha (1+|x|)^{-m} \left(|\vec{g}_0|_{m_0} + |G|_m\right)$$

что вместе с (5.1) доказывает (2.9). Предложение доказано.

Литература

1. A. Novotný, M. Padula, *L^p-approach to steady flows of viscous compressible fluids in exterior domain.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **126** (1994), 243–297.
2. V. A. Solonnikov, *Estimates of Oseen's potentials in weighted Hölder spaces.* — Math. Nachrichten **177** (1996), 307–321.
3. В. А. Солонников, *Асимптотика Озеена и Стокса в задаче о стационарном движении двух несмешивающихся жидкостей.* — (в печати).
4. A. Novotný, *About steady transport equation,* II. *Schauder estimates in domain with smooth boundaties.* to appear in Portugaliae Mathematica.
5. R. Finn, *Estimates at infinity for stationary solutions of the Navier–Stokes equations.* — Bull. Math. Soc. Sci. Math. Phys. R. P. R. **3, No. 4** (1959), 387–418.

Novotný A., Penel P., Solonnikov V. A. Investigation of a problem governing a viscous compressible flow past a body in Hölder spaces.

It is shown that the stationary exterior problem for the equations of notion of a viscous compressible liquid uniquely solvable in weighted Hölder spaces, if exterior forces and the value of velocity at infinity are sufficiently small. As a weight function, a power function $(1+|x|)^{-m}$, $m>0$ is taken. The proof, which is carried out by the method of decomposition, relies on the estimates of sindular integers and of solutions of the transport equations in weighted spaces.

Поступило 1 марта 1996 г.

ETMA, Université
de Toulon et du Var
BP.132–F 83957
La Garde Cedex France

ETMA, Université
de Toulon et du Var
BP.132–F 83957
La Garde Cedex France

С.-Петербургское отделение
Математического института
им.В. А. Стеклова РАН