Н. А. Славнов

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ ДЛЯ ДУАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Введение

В настоящей работе мы рассматриваем некоторые вопросы алгебраического анзаца Бете, связанные с методом дуальных полей. Вспомогательные квантовые операторы – дуальные поля – впервые были введены в работе [1]. С помощью этой конструкции удалось получить компактные детерминантные формулы для корреляционных функций квантовых интегрируемых моделей (см., например, монографию [2]).

Уже в первой работе, посвященной данному методу, было замечено, что в некоторых случаях дуальные поля дают нулевой вклад в конечный результат. Такое наблюдение основывалось на сравнении формул, полученных с помощью метода дуальных полей, с результатами, полученными в рамках других подходов, однако прямого доказательства дано не было. В настоящей работе мы устанавливаем тождество, позволяющее исключить вспомогательные квантовые операторы из детерминантных формул, описывающих некоторые важные частные случаи скалярных произведений.

1. Дуальные поля

Рассмотрим некоторую обобщенную интегрируемую модель, которая может быть решена в рамках алгебраического анзаца Бете. Матрица монодромии такой модели

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} A(\lambda) & B(\lambda) \\ C(\lambda) & D(\lambda) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

обладает старшим вектором $|0\rangle$, имеющим следующие свойства:

$$A(\lambda)|0\rangle = a(\lambda)|0\rangle, \quad D(\lambda)|0\rangle = d(\lambda)|0\rangle, \quad C(\lambda)|0\rangle = 0. \tag{1.2}$$

Аналогичными свойствами обладает сопряженный вектор $\langle 0|$:

$$\langle 0|A(\lambda) = a(\lambda)\langle 0|, \quad \langle 0|D(\lambda) = d(\lambda)\langle 0|, \quad \langle 0|B(\lambda) = 0. \tag{1.3}$$

Явный вид функций $a(\lambda)$ и $d(\lambda)$, входящих в формулы (1.2), (1.3) является несущественным.

Коммутационные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии, как обычно, задаются с помощью R-матрицы:

$$R(\lambda,\mu)\Big(T(\lambda)\otimes T(\mu)\Big) = \Big(T(\mu)\otimes T(\lambda)\Big)R(\lambda,\mu), \tag{1.4}$$

где

$$R(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} f(\mu,\lambda) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g(\mu,\lambda) & 1 & 0 \\ 0 & 1 & g(\mu,\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(\mu,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Мы будем рассматривать случай рациональной R-матрицы:

$$f(\mu,\lambda) = \frac{\mu-\lambda+ic}{\mu-\lambda}, \qquad g(\mu,\lambda) = \frac{ic}{\mu-\lambda}. \tag{1.6}$$

Здесь c – произвольная константа, физический смысл которой зависит от конкретной модели. Удобно также ввести еще две функции

$$\begin{aligned} h(\mu,\lambda) &= \frac{f(\mu,\lambda)}{g(\mu,\lambda)} = \frac{\mu-\lambda+ic}{ic}, \\ t(\mu,\lambda) &= \frac{g(\mu,\lambda)}{h(\mu,\lambda)} = -\frac{c^2}{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda+ic)}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Собственные функции трансферматрицы $\tau(\lambda) = \mathrm{tr}T(\lambda) = A(\lambda) + D(\lambda)$ (являющиеся одновременно собственными функциями интегралов движения рассматриваемой модели) строятся с помощью операторов $B(\lambda)$:

$$|\Psi_N(\{\lambda\})\rangle = \prod_{j=1}^{N} B(\lambda_j)|0\rangle, \qquad N = 0,1,\ldots$$

Сопряженные собственные функции строятся аналогично с помощью операторов $C(\lambda)$

$$\langle\Psi_N(\{\lambda\})| = \langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\lambda_j), \qquad N = 0,1,\ldots$$

При этом в обоих случаях параметры $\{\lambda\}$ должны удовлетворять системе уравнений Бете

$$\frac{a(\lambda_j)}{d(\lambda_j)}\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N}\frac{f(\lambda_j,\lambda_k)}{f(\lambda_k,\lambda_j)}=1,\qquad j=1,\dots,N. \tag{1.8}$$

Исследование корреляционных функций в рамках алгебраического анзаца Бете во многом опирается на свойства скалярных произведений, которые определяются следующим образом:

$$S_N(\{\mu\},\{\lambda\})=\langle 0|\prod_{j=1}^{N}C(\mu_j)\prod_{j=1}^{N}B(\lambda_j)|0\rangle.$$

Здесь $\{\mu\}$ и $\{\lambda\}$ – два набора, каждый из которых содержит по N произвольных комплексных чисел ($N=1,2\dots$). В работе [1] было найдено весьма красивое и компактное выражение для скалярных произведений в виде среднего от детерминанта матрицы порядка N, содержащей вспомогательные квантовые операторы – дуальные поля. Дадим краткое описание этой конструкции.

Рассмотрим четыре оператора $p_A(\lambda)$, $p_D(\lambda)$, $q_A(\lambda)$ и $q_D(\lambda)$, зависящих от комплексной переменной λ и действующих во вспомогательном фоковском пространстве так, что

$$p_{A,D}(\lambda)|0)=0,\qquad (0|q_{A,D}(\lambda)=0.$$

Ненулевые коммутационные соотношения даются формулами

$$[p_A(\lambda),q_A(\mu)]=\ln h(\mu,\lambda),\quad [p_D(\lambda),q_D(\mu)]=\ln h(\lambda,\mu).$$

Вакуумный вектор $|0)$ нормирован на единицу. Дуальными полями $\Phi_A(\lambda)$ и $\Phi_D(\lambda)$ называются линейные комбинации операторов p и q:

$$\Phi_A(\lambda)=q_A(\lambda)+p_D(\lambda),\quad \Phi_D(\lambda)=q_D(\lambda)+p_A(\lambda).$$

Легко проверить, что дуальные поля коммутируют друг с другом.

Сформулируем теперь основной результат работы [1]. Скалярное произведение (1.9) может быть представлено в виде среднего во вспомогательном фоковском пространстве

$$\frac{S_N(\{\mu\},\{\lambda\})}{\prod_{m=1}^{N}d(\mu_m)d(\lambda_m)}=\prod_{m>l}^{N}[g(\mu_m,\mu_l)g(\lambda_l,\lambda_m)](0|\mathrm{det}_N G_{jk}|0), \tag{1.10}$$

где

$$G_{jk}=\frac{a(\mu_j)}{d(\mu_j)}t(\mu_j,\lambda_k)e^{\Phi_A(\mu_j)+\Phi_D(\lambda_k)}+\frac{a(\lambda_k)}{d(\lambda_k)}t(\lambda_k,\mu_j)e^{\Phi_A(\lambda_k)+\Phi_D(\mu_j)}. \tag{1.11}$$

Несложно явно вычислить среднее в правой части (1.10), однако получающееся при этом выражение оказывается достаточно громоздким и мало пригодным для использования. В следующем разделе мы докажем, что, благодаря весьма нетривиальному тождеству, которому удовлетворяют дуальные поля, в некоторых частных случаях удается получить детерминантные формулы для скалярных произведений, не содержащие вспомогательных квантовых операторов.

2. Тождество для дуальных полей

Рассмотрим две матрицы M^ϕ и M^0 порядка N

$$M^\phi_{jk}=t(\nu_k,\mu_j)e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}+\xi_k t(\mu_j,\lambda_k)e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}, \tag{2.1}$$

$$M^0_{jk}=t(\nu_k,\mu_j)+\xi_k t(\mu_j,\lambda_k). \tag{2.2}$$

Здесь $\{\lambda\}$, $\{\mu\}$, $\{\nu\}$ и $\{\xi\}$ – произвольные комплексные числа. Матрица M^ϕ зависит от дуальных полей Φ_A и Φ_D. Легко видеть, что если положить в (2.1) дуальные поля равными нулю, то матрица M^ϕ переходит в M^0.

Тхеорем 2.1. *Для произвольного натурального N и для произвольных комплексных чисел*

$$\nu_1,\dots,\nu_N\in C,\qquad \lambda_1,\dots,\lambda_N\in C,$$
$$\mu_1,\dots,\mu_N\in C,\qquad \xi_1,\dots,\xi_N\in C,$$

справедливо следующее тождество:

$$(0|\det{}_N M^\phi_{jk}|0)=\det{}_N M^0_{jk}. \tag{2.3}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\Delta^\phi_N(\{\mu\},\{\nu\},\{\lambda\},\{\xi\})=(0|\det{}_N M^\phi_{jk}|0), \tag{2.4}$$

$$\Delta^0_N(\{\mu\},\{\nu\},\{\lambda\},\{\xi\})=\det{}_N M^0_{jk} \tag{2.5}$$

и рассмотрим свойства функций Δ^ϕ_N и Δ^0_N.

Свойство 1. Обе функции Δ_N^ϕ и Δ_N^0 являются рациональными функциями аргументов $\{\mu\},\{\lambda\},\{\nu\}$ и линейны по переменным $\{\xi\}$.

Свойство 2. Обе функции Δ_N^ϕ и Δ_N^0 антисимметричны при замене $\mu_a\leftrightarrow\mu_b$ и при замене троек $(\lambda_a,\nu_a,\xi_a)\leftrightarrow(\lambda_b,\nu_b,\xi_b)$, $\quad a,b=1,\dots,N$.

Свойство 3. При $\mu_1\to\infty$ и фиксированных остальных аргументах

$$\Delta_N^\phi\sim\mu_1^{-2},\qquad \Delta_N^0\sim\mu_1^{-2}. \tag{2.6}$$

Вторая из приведенных формул очевидна, так как $t(\mu_1,\cdot)\sim\mu_1^{-2}$ при $\mu_1\to\infty$. Для того, чтобы доказать первое утверждение, необходимо проверить, что дуальные поля не влияют на асимптотику функции Δ_N^ϕ. Заметим, что матричные элементы M_{jk}^ϕ содержат дуальные поля только в двух комбинациях: $\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)$ и $\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)$. Поэтому при $\mu_1\to\infty$ мы имеем

$$
\begin{gathered}
e^{-p_D(\mu_1)}e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}=e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}e^{-p_D(\mu_1)},\\
e^{-p_A(\mu_1)}e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}=e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}e^{-p_A(\mu_1)},\\
e^{-p_D(\mu_1)}e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}=\\
=e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}e^{-p_D(\mu_1)}\frac{h(\mu_1,\mu_j)}{h(\mu_1,\lambda_k)}\to e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}e^{-p_D(\mu_1)},\\
e^{-p_A(\mu_1)}e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}=\\
=e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}e^{-p_A(\mu_1)}\frac{h(\mu_j,\mu_1)}{h(\nu_k,\mu_1)}\to e^{\Phi_A(\nu_k)-\Phi_A(\mu_j)}e^{-p_A(\mu_1)}.
\end{gathered}
$$

Аналогичные формулы верны и для перестановочных соотношений операторов $e^{q_A(\mu_1)}$ и $e^{q_D(\mu_1)}$. Таким образом, мы видим, что при $\mu_1\to\infty$ вспомогательные квантовые операторы, зависящие от μ_1, коммутируют со всеми остальными матричными элементами. Следовательно, они не влияют на асимптотику функции Δ_N^ϕ.

В силу свойства 2, функции Δ_N^ϕ и Δ_N^0 имеют точно такое же асимптотическое поведение, если к бесконечности стремится любое другое μ_j из набора $\{\mu\}$.

Свойство 4.

$$\Delta_1^\phi=\Delta_1^0.$$

Свойство 5. Обе функции Δ_N^ϕ и Δ_N^0 имеют полюсы первого порядка в точках $\mu_a=\nu_b$, $\mu_a=\nu_b+ic$, $\mu_a=\lambda_b$, $\mu_a=\lambda_b-ic$, $a,b=1,\dots,N$ (см. определение функции $t(\lambda,\mu)$). Вычеты в полюсах $\mu_a=\nu_b$ и $\mu_a=\lambda_b$ могут быть выражены в терминах Δ_{N-1}^ϕ и Δ_{N-1}^0:

$$\begin{aligned}
\Delta_N^\phi\Big|_{\mu_a=\nu_b} &= \frac{ic(-1)^{a+b}}{(\nu_b-\mu_a)}\Delta_{N-1}^\phi(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\},\{\xi_{k\neq b}\}),\\
\Delta_N^\phi\Big|_{\mu_a=\lambda_b} &= \frac{ic(-1)^{a+b}}{(\mu_a-\lambda_b)}\Delta_{N-1}^\phi(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\},\{\xi_{k\neq b}\}),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_N^0\Big|_{\mu_a=\nu_b} &= \frac{ic(-1)^{a+b}}{(\nu_b-\mu_a)}\Delta_{N-1}^0(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\},\{\xi_{k\neq b}\}),\\
\Delta_N^0\Big|_{\mu_a=\lambda_b} &= \frac{ic(-1)^{a+b}}{(\mu_a-\lambda_b)}\Delta_{N-1}^0(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\},\{\xi_{k\neq b}\}).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Действительно, если, например, $\mu_1=\nu_1$, то матрица M_{jk}^ϕ (так же, как и M_{jk}^0) имеет единственный сингулярный элемент M_{11}^ϕ. Следовательно, детерминант сводится к произведению этого элемента на соответствующий минор, не зависящий уже от μ_1, ν_1, λ_1 и ξ_1.

Перечисленные пять свойств функций Δ_N^ϕ и Δ_N^0 достаточно очевидны. Сложнее найти свойства вычетов в точках $\mu_a=\nu_b+ic$, $\mu_a=\lambda_b-ic$. Если для вычетов функции Δ_N^0 легко получить соотношения, аналогичные формулам (2.8), то с функцией Δ_N^ϕ ситуация иная. Для того, чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим, например, случай $\mu_1\to\nu_1+ic$. Ясно, что при этом матричный элемент M_{11}^ϕ становится сингулярным. Однако, помимо этой очевидной сингулярности, функция Δ_N^ϕ содержит еще и "скрытые" сингулярности, возникающие при нормальном упорядочении дуальных полей. Действительно, разложим детерминант $\det M^\phi$ в сумму по перестановкам. Каждое слагаемое этой суммы имеет вид $M_{1p_1}^\phi\dots M_{Np_N}^\phi$. Рассмотрим одно из таких произведений, не содержащее элемента M_{11}^ϕ. Тогда в него обязательно входят элементы M_{j1}^ϕ и M_{1k}^ϕ $(j,k\neq 1)$. В свою очередь, произведение этих матричных элементов содержит следующий член:

$$\xi_k t(\mu_1, \lambda_k) e^{\Phi_D(\lambda_k) - \Phi_D(\mu_1)} t(\nu_1, \mu_j) e^{\Phi_A(\nu_1) - \Phi_A(\mu_j)}.$$

После нормального упорядочения и вычисления вакуумного среднего данное выражения становится пропорциональным $h^{-1}(\nu_1, \mu_1)$, то есть оно сингулярно при $\mu_1 \to \nu_1 + ic$. Аналогичная картина наблюдается и в точках $\mu_j = \lambda_k - ic$.

Возникшее затруднение можно преодолеть следующим образом. Рассмотрим некоторое разбиение набора переменных $\{\xi\}$ на два непересекающихся подмножества $\{\xi_I\}$ и $\{\xi_{II}\}$. Тогда функция Δ_N^ϕ может быть записана в виде

$$\Delta_N^\phi = \sum_{\text{part}} \prod_{\xi_\alpha \in \{\xi_{II}\}} \xi_\alpha K^\phi(\text{парт}). \tag{2.9}$$

Здесь сумма берется по всем указанным разбиениям, включая разбиения на пустое множество и полный набор $\{\xi\}$. Коэффициенты $K^\phi(\text{part})$ не зависят от переменных $\{\xi\}$, а зависят лишь от конкретного разбиения. Аналогичная формула существует и для Δ_N^0

$$\Delta_N^0 = \sum_{\text{part}} \prod_{\xi_\alpha \in \{\xi_{II}\}} \xi_\alpha K^0(\text{парт}). \tag{2.10}$$

Поскольку переменные ξ_k являются произвольными комплексными числами, то $\Delta_N^0 = \Delta_N^\phi$ тогда и только тогда, когда

$$K^0(\text{part}) = K^\phi(\text{part}) \tag{2.11}$$

для любого разбиения набора $\{\xi\}$.

Докажем равенство (2.11). Для этого зафиксируем конкретное разбиение, такое, что число элементов в наборе $\{\xi_I\}$ равно n, где n произвольное целое из интервала $0 \leqslant n \leqslant N$. В силу свойства антисимметрии 2, достаточно рассмотреть случай $\{\xi_I\} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ и $\{\xi_{II}\} = \{\xi_{n+1}, \ldots, \xi_N\}$. Коэффициенты $K^\phi(\text{part})$ и $K^0(\text{part})$, соответствующие данному разбиению, получаются, если в Δ_N^ϕ и Δ_N^0 положить $\xi_1 = 0, \ldots, \xi_n = 0$ и $\xi_{n+1} \to \infty, \ldots, \xi_N \to \infty$. Таким образом,

$$K^0(\text{part}) = \widetilde{\Delta}_N^0 = \det{}_N \widetilde{M}_{jk}^0, \tag{2.12}$$

$$K^\phi(\text{part}) = \widetilde{\Delta}_N^\phi = \det{}_N \widetilde{M}_{jk}^\phi, \tag{2.13}$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{M}^{\phi}_{jk} &= t(\nu_k, \mu_j) e^{\Phi_A(\nu_k) - \Phi_A(\mu_j)}, \qquad k = 1, \ldots, n \\ \widetilde{M}^{\phi}_{jk} &= t(\mu_j, \lambda_k) e^{\Phi_D(\lambda_k) - \Phi_D(\mu_j)}, \qquad k = n+1, \ldots, N \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\widetilde{M}^{0}_{jk} = t(\nu_k, \mu_j), \qquad k = 1, \ldots, n$$

$$\widetilde{M}^{0}_{jk} = t(\mu_j, \lambda_k), \qquad k = n+1, \ldots, N \tag{2.15}$$

Рассмотрим функцию

$$D_N = U_N(\widetilde{\Delta}^{\phi}_N - \widetilde{\Delta}^{0}_N),$$

где

$$U_N = \prod_{m=1}^{N} \prod_{l=1}^{n} h(\nu_l, \mu_m) \prod_{m=1}^{N} \prod_{l=n+1}^{N} h(\mu_m, \lambda_l) \prod_{m>l}^{N} g(\mu_m, \mu_l). \tag{2.16}$$

В силу свойств 1–5 функций Δ^{ϕ}_N и Δ^{0}_N, функция D_N обладает следующими очевидными свойствами.

Свойство $1'$. D_N – рациональная функция переменных $\{\mu\}$.

Свойство $2'$. D_N – симметричная функция переменных $\{\mu\}$.

Свойство $3'$. D_N – не имеет полюсов в точках $\mu_a = \mu_b, \quad a, b = 1, \ldots N$.

Свойство $4'$. $D_N \to \mu_1^{-1}$ при $\mu_1 \to \infty$.

Свойство $5'$.

$$D_1 = 0$$

Свойство $6'$. D_N не имеет полюсов в точках $\mu_a = \nu_b + ic$ и $\mu_a = \lambda_b - ic$.

Свойство $7'$. Вычеты в полюсах $\mu_a = \nu_b$ и $\mu_a = \lambda_b$ выражаются через D_{N-1}:

$$D_N\Big|_{\mu_a=\nu_b} = \frac{ic(-1)^{b+1}}{(\nu_b-\mu_a)}\prod_{m=1}^{N}h(\nu_b,\mu_m)\prod_{l=1}^{n}h(\nu_l,\mu_a)\prod_{l=n+1}^{N}h(\nu_b,\lambda_l)\times$$
$$\times\prod_{\substack{m=1\\m\neq a}}^{N}g(\mu_m,\mu_a)D_{N-1}(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\}),$$

$$D_N\Big|_{\mu_a=\lambda_b} = \frac{ic(-1)^{b+1}}{(\mu_a-\lambda_b)}\prod_{m=1}^{N}h(\mu_m,\lambda_b)\prod_{l=n+1}^{n}h(\mu_a,\lambda_l)\prod_{l=1}^{n}h(\nu_l,\lambda_b)\times$$
$$\times\prod_{\substack{m=1\\m\neq a}}^{N}g(\mu_m,\mu_a)D_{N-1}(\{\mu_{j\neq a}\},\{\nu_{k\neq b}\},\{\lambda_{k\neq b}\}).$$

Теперь, для того, чтобы доказать равенство (2.11) достаточно воспользоваться индукцией по N. Согласно свойству $5'$ $D_1=0$. Пусть $D_{N-1}=0$. Тогда D_N, являющаяся рациональной функцией переменных $\{\mu\}$, может иметь полюсы только в точках $\mu_a=\nu_b$ и $\mu_a=\lambda_b$. Однако, согласно свойству $7'$ и индуктивному предположению, вычеты в этих полюсах равны нулю, следовательно D_N является полиномом по $\{\mu\}$. Но в силу свойств $2'$ и $4'$ $D_N(\mu_a\to\infty)=0$, таким образом $D_N=0$. Отсюда следует, что $\widetilde{\Delta}_N^{\phi}=\widetilde{\Delta}_N^{0}$ для любого разбиения набора $\{\xi\}$, а значит и

$$\Delta_N^{\phi}=\Delta_N^{0}. \tag{2.17}$$

Теорема доказана.

Таким образом, дуальные поля дают нулевой вклад в детерминанты матриц вида (2.1).

Замечание. Тождество (2.3) справедливо и для моделей с тригонометрической R-матрицей:

$$g(\lambda,\mu)=\frac{i\sin\gamma}{\sinh(\lambda-\mu)},\qquad f(\lambda,\mu)=\frac{\sinh(\lambda-\mu+i\gamma)}{\sinh(\lambda-\mu)}.$$

Доказательство этого утверждения, после замены $e^{\lambda}\to\lambda$, $e^{\mu}\to\mu$, вполне аналогично рассмотренному выше случаю.

Следствие 1. *Для произвольной с-числовой матрицы A справедливо тождество*

$$(0|\det{}_N(M_{jk}^{\phi}+A_{jk})|0)=\det{}_N(M_{jk}^{0}+A_{jk}). \tag{2.18}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Лапласа, выражающей детерминант суммы двух матриц через миноры каждой матрицы,

$$(0|\mathrm{det}_N(M^{\phi}_{jk}+A_{jk})|0)=\sum_{Mi(A)}(-1)^{P[Mi(A)]}(0|\mathrm{det}(M^{\phi}_{jk})|0)\mathrm{det}(A_{jk})=$$
$$=\sum_{Mi(A)}(-1)^{P[Mi(A)]}\mathrm{det}(M^{0}_{jk})\mathrm{det}(A_{jk})=\mathrm{det}_N(M^{0}_{jk}+A_{jk}). \tag{2.19}$$

Здесь суммирование ведется по всем минорам матрицы A. Детерминанты матриц M^{ϕ} и M^0, входящие в (2.19) вместе со знаком $(-1)^{P[Mi(A)]}$, являются алгебраическими дополнениями к указанным минорам.

Рассмотрим теперь, как тождество (2.3) может быть применено для исключения дуальных полей из формул, описывающих скалярные произведения (1.9). Преобразуем детерминант в правой части (1.10) следующим образом

$$(0|\mathrm{det}_N G_{jk}|0)=(0|\prod_{m=1}^{N}e^{\Phi_A(\mu_m)+\Phi_D(\mu_m)}\mathrm{det}_N\left(G_{jk}e^{-\Phi_A(\mu_j)-\Phi_D(\mu_j)}\right)|0).$$

Действуя произведением множителей $\exp(\Phi_A(\mu_m)+\Phi_D(\mu_m))$ на левый вакуум $(0|$, получим

$$(0|\prod_{m=1}^{N}e^{\Phi_A(\mu_m)+\Phi_D(\mu_m)}=\prod_{m,l=1}^{N}h(\mu_l,\mu_m)(0|\prod_{m=1}^{N}e^{p_A(\mu_m)+p_D(\mu_m)}.$$

Проносся после этого оператор $\prod_{m=1}^{N}\exp(p_A(\mu_m)+p_D(\mu_m))$ направо, после несложных преобразований приходим к следующему выражению для скалярного произведения

$$\frac{S_N(\{\mu\},\{\lambda\})}{\prod_{m=1}^{N}d(\mu_m)d(\lambda_m)}=\prod_{m=1}^{N}\frac{a(\lambda_m)}{d(\lambda_m)}\prod_{m,l=1}^{N}h(\lambda_m,\mu_l)\times$$
$$\times\prod_{m>l}^{N}[g(\mu_m,\mu_l)g(\lambda_l,\lambda_m)](0|\mathrm{det}_N\widetilde{G}_{jk}|0), \tag{2.20}$$

где

$$\widetilde{G}_{jk} = t(\lambda_k, \mu_j)e^{\Phi_A(\lambda_k)-\Phi_A(\mu_j)} + t(\mu_j, \lambda_k)e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\mu_j)}\times$$
$$\times\left(\frac{a(\mu_j)}{d(\mu_j)}\prod_{m=1}^{N}\frac{h(\mu_j,\mu_m)}{h(\mu_m,\mu_j)}\right)\left(\frac{d(\lambda_k)}{a(\lambda_k)}\prod_{m=1}^{N}\frac{h(\mu_m,\lambda_k)}{h(\lambda_k,\mu_m)}\right). \quad (2.21)$$

Если состояние $\langle 0|\prod_{j=1}^{N} C(\mu_j)$ является собственной функцией трансферматрицы, то есть параметры μ_j удовлетворяют системе уравнений Бете (1.8), то

$$\frac{a(\mu_j)}{d(\mu_j)}\prod_{m=1}^{N}\frac{h(\mu_j,\mu_m)}{h(\mu_m,\mu_j)} = (-1)^{N-1},$$

и тогда матрица $\widetilde{G}_{jk}$ принимает вид (2.1), если в последней выбрать $\nu_k = \lambda_k$ и

$$\xi_k = \frac{d(\lambda_k)}{a(\lambda_k)}\prod_{m=1}^{N}\frac{h(\mu_m,\lambda_k)}{h(\lambda_k,\mu_m)}.$$

По Теореме 2.1 заключаем, что в этом случае можно положить дуальные поля в (2.21) равными нулю. В результате мы приходим к детерминантной формуле для скалярного произведения, не содержащей вспомогательных квантовых операторов

$$(0|\det{}_N(\widetilde{G}_{jk})|0) = \det{}_N(\widetilde{G}^0_{jk}), \quad (2.22)$$

где

$$\widetilde{G}^0_{jk} = t(\lambda_k, \mu_j) + (-1)^{N-1}t(\mu_j, \lambda_k)\left(\frac{d(\lambda_k)}{a(\lambda_k)}\prod_{m=1}^{N}\frac{h(\mu_m,\lambda_k)}{h(\lambda_k,\mu_m)}\right). \quad (2.23)$$

Квадрат нормы собственной функции трансферматрицы также может быть вычислен с помощью доказанной теоремы. Для этого необходимо в формуле (2.21) сначала устремить $\mu_j \to \lambda_j$, а затем потребовать, чтобы параметры λ_j удовлетворяли системе (1.8). Матрица $\widetilde{G}_{jk}$ принимает вид

$$\widetilde{G}_{jk} = \delta_{jk}Z_j + t(\lambda_k, \lambda_j)e^{\Phi_A(\lambda_k)-\Phi_A(\lambda_j)} + t(\lambda_j, \lambda_k)e^{\Phi_D(\lambda_k)-\Phi_D(\lambda_j)}. \quad (2.24)$$

Здесь

$$Z_j = ic\frac{d}{d\lambda}\ln\frac{a(\lambda)}{d(\lambda)}\bigg|_{\lambda=\lambda_j} + \sum_{m=1}^{N}\frac{2c^2}{(\lambda_j-\lambda_m)^2+c^2}.$$

Легко видеть, что матрица (2.24) подпадает под действие следствия Теоремы 2.1. Действительно, выбирая в (2.18) $A_{jk} = \delta_{jk} Z_j$ и полагая в M^{ϕ}_{jk}: $\xi_j = 1, \quad \mu_j = \nu_j = \lambda_j, \quad j = 1, \ldots, N$, мы приходим к матрице $\widetilde{G}_{jk}$. Следовательно, и в этом случае дуальные поля не дают никакого вклада в вакуумное среднее

$$\widetilde{G}_{jk} \to \widetilde{G}^0_{jk} = \delta_{jk} Z_j + t(\lambda_k, \lambda_j) + t(\lambda_j, \lambda_k). \tag{2.25}$$

Следует отметить, что детерминантные формулы без дуальных полей для частных случаев скалярных произведений были известны ранее. Так, формула (2.23), описывающая произведение собственной функции трансферматрицы на произвольную функцию, впервые была получена в [3]. Формула (2.25) для квадрата нормы собственной функции была найдена в работе [4]. Тем не менее, прямого доказательства эквивалентности этих представлений и формул (2.20), (2.21) до сих пор не существовало. Как было показано, такое прямое доказательство опирается на существование весьма нетривиального тождества, которому удовлетворяют дуальные поля. Не исключено, что существуют и другие, не известные пока тождества, которые помогут исключить дуальные поля не только из скалярных произведений, но и из более сложных объектов – таких, например, как корреляционные функции.

Настоящая работа была выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект 96–01–00344, и INTAS-93-166-ext.

Литература

1. V. E. Korepin, — Comm. Math. Phys. **113** (1987), 177–190.
2. V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin book Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions, Cambridge University Press.
3. Н. А. Славнов, — Теор. Мат. Физ. **79, No. 2** (1989), 232–240.
4. V. E. Korepin, — Comm. Math. Phys. **86** (1982), 391–418.

Slavnov N. A. On an identity for dual fields.

The identity is derived which gives an opportunity to exclude auxiliary quantum operators ("dual fields") in formulae representing scalar products as determinants in some important particular cases. This identity is important for calculating correlation functions by means of the algebraic Bethe Ansatz.

Математический институт
им.В. А. Стеклова
Москва

Поступило 4 января 1997г.