А. Н. Глушаков

ДВА ВОПРОСА ВНЕШНЕЙ ГЕОМЕТРИИ ПЛЮККЕРОВЫХ ВЛОЖЕНИЙ МНОГООБРАЗИЙ ГРАССАМАНА

1. Плюккерова модель многообразия Грассмана $G^+_{p,p+q}$ позволяет рассматривать его как подмногообразие сферы S^{N-1}, лежащей в N-мерном евклидовом пространстве $\Lambda_p(V^{p+q})$ p-векторов над $(p+q)$-мерным евклидовым пространством V^{p+q}, где $N = \binom{p+q}{p}$. (см. [1], 6.2).

В этом пункте мы ограничимся случаем $p = 2$, $q = 2$. При этом $N = 6$ и многообразие $G^+_{2,4}$ является гиперповерхностью единичной сферы S^5. Будет описана структура множеств уровня функции нормальной кривизны поверхности $G^+_{2,4}$ в S^5.

Ортогональный и самосопряженный оператор Ходжа $* : \Lambda_2(V^4) \to \Lambda_2(V^4)$ отображает пространство на себя. Его собственные числа $+1$ и -1, а собственные подпространства Λ^+ и Λ^- ортогональны и имеют одинаковую размерность 3 (см. [1], 8.1).

$$\begin{gathered}\Lambda_2(V^4) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-,\ \Lambda^+ \perp \Lambda^-,\ \dim\Lambda^+ = \dim\Lambda^- = 3,\\ \omega \in \Lambda_2(V^4) \Longrightarrow \omega = \omega^+ + \omega^-,\ *\omega^+ = \omega^+,\ *\omega^- = -\omega^-.\end{gathered} \tag{1}$$

Пусть $e := \{e_i\}_{i=1}^4$ – ортонормированный и положительно ориентированный базис пространства V^4. Тогда бивекторы $e_{ij} := e_i \wedge e_j$, $(ij) \in \Lambda(4,2)$ составляют базис пространства $\Lambda_2(V^4)$, причем

$$\begin{gathered}* e_{12} = e_{34},\ *e_{13} = -e_{24},\ *e_{14} = e_{23},\\ * e_{23} = e_{14},\ *e_{24} = -e_{13},\ *e_{34} = e_{12}.\end{gathered} \tag{2}$$

Из (2) следует, что наборы

$$\begin{gathered}\xi_1^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{12} + e_{34}),\ \xi_2^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{13} - e_{24}),\ \xi_3^+ := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{14} + e_{23}),\\ \xi_1^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{12} - e_{34}),\ \xi_2^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{13} + e_{24}),\ \xi_3^- := \frac{1}{\sqrt{2}}(e_{14} - e_{23})\end{gathered} \tag{3}$$

образуют ортонормированные базисы пространств Λ^+ и Λ^- соответственно. Многообразие Грассмана $G^+_{2,4}$ представимо в виде суммы Минковского двух двумерных сфер радиуса $1/\sqrt{2}$

$$G^+_{2,4} = S^2_+(1/\sqrt{2}) + S^2_-(1/\sqrt{2}), \tag{4}$$

лежащих в подпространствах Λ^+ и Λ^- (см. [2]).

1.1. Теорема. *Пусть $\omega \in G^+_{2,4}$. Тогда пересечение многообразия $G^+_{2,4}$ с касательным пространством $T_\omega G^+_{2,4}$, рассматриваемым как линейное подпространство в $\Lambda_2(V^4)$, есть тор Клиффорда T^2.*

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис e, при котором $\omega = e_{12}$. Тогда (см. [1], 6.2) набор векторов

$$e_{13}, e_{14}, e_{23}, e_{24} \tag{5}$$

образует базис пространства $T_\omega G^+_{2,4}$. Формулы (3), (5) влекут равенства

$$\sigma^+ := \Lambda^+ \cap T_\omega G^+_{2,4} = \mathrm{Lin}\,(\xi^+_2, \xi^+_3),\ \sigma^- := \Lambda^- \cap T_\omega G^+_{2,4} = \mathrm{Lin}\,(\xi^-_2, \xi^-_3). \tag{6}$$

$$T_\omega G^+_{2,4} = \sigma^+ \oplus \sigma^-, \tag{7}$$

$$T_\omega G^+_{2,4} \perp \omega^+, *\omega. \tag{8}$$

Рассмотрим окружности

$$S^1_+(1/\sqrt{2}) := \sigma^+ \cap S^2_+(1/\sqrt{2}), \quad S^1_-(1/\sqrt{2}) := \sigma^- \cap S^2_-(1/\sqrt{2}). \tag{9}$$

Из (4), (7) непосредственно следует, что

$$T^2 = G^+_{2,4} \cap T_\omega G^+_{2,4} = S^1_+(1/\sqrt{2}) + S^1_-(1/\sqrt{2}). \tag{10}$$

Тем самым пересечение является плоским тором, стандартно вложенным в 4-мерное евклидово пространство. $\bullet$

Легко видеть, что тор T^2 лежит в 3-мерной сфере

$$S^3 = S^5 \cap T_\omega G^+_{2,4} \tag{11}$$

как минимальная поверхность.

1.2. Теорема. *Плоский тор T^2 является вполне геодезической поверхностью в многообразии $G^+_{2,4}$.*

Доказательство. Пусть $\tau \in T^2$. Из (8) следует, что касательное пространство $T_\tau T^2$ есть двумерная плоскость, перпендикулярная векторам $\tau, *\tau, \omega, *\omega$ (эти векторы ортонормированные). Касательное пространство $T_\tau G^+_{2,4}$ есть 4-плоскость, перпендикулярная векторам $\tau, *\tau$. Отсюда следует, что нормальное дополнение к $T_\tau T^2$ в $T_\tau G^+_{2,4}$ представляет собой 2-мерную плоскость, натянутую на бивекторы $\omega, *\omega$, т.е. является ортогональным дополнением $(T_\omega G^+_{2,4})^\perp$ к пространству $T_\omega G^+_{2,4}$ в $\Lambda_2(V^4)$. Значит для любых u, v из $T_\tau T^2$ $B_\tau(u,v) \in (T_\omega G^+_{2,4})^\perp$. С другой стороны $T^2 \subset T_\omega G^+_{2,4}$, поэтому $B_\tau(u,v) \in T_\omega G^+_{2,4}$. Откуда получаем, что для любых $u, v \in T_\tau T^2$ $B_\tau(u,v) = 0$. $\bullet$

1.3. Пусть $x, y \in T_\omega G^+_{2,4}$. Очевидно, ортогональным дополнением к $T_\omega G^+_{2,4}$ в $T_\omega S^5$ служит одномерное подпространство, порожденное бивектором $*\omega$. Поэтому $B_\omega(x,y) = \alpha * \omega$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ необходимо найти.

Пусть $\Omega : (-\varepsilon; \varepsilon) \to G^+_{2,4}$ – гладкая кривая, проходящая через точку ω в направлении вектора x

$$\Omega(0) = \omega, \quad \Omega'(0) = x;$$

Y – распространение вектора y вдоль кривой Ω до гладкого векторного поля, касательного к $G^+_{2,4}$

$$Y(t) \in T_{\Omega(t)} G^+_{2,4}, \quad Y(0) = y.$$

При любом $t \in (-\varepsilon; \varepsilon)$ имеем

$$\langle Y(t), *\Omega(t) \rangle = 0.$$

Продифференцируем это равенство и возьмем значение производной при $t = 0$.

$$\langle Y'(0), *\omega \rangle + \langle y, *x \rangle = 0, \quad \langle Y'(0), *\omega \rangle = -\langle y, *x \rangle.$$

Но левая часть последнего равенства представляет собой α. Итак,

$$B_\omega(x,y) = -\langle *x, y \rangle * \omega \tag{12}$$

1.4. Ориентируем гиперповерхность $G^+_{2,4}$ с S^5, выбирая в качестве нормали в точке $\omega \in G^+_{2,4}$ бивектор $*\omega$. Нормальная кривизна этой поверхности в направлении $x \in S^3$ (см. (11), (12)) равна

$$k_n(x) = \langle B_\omega(x, x), *\omega \rangle = -\langle *x, x \rangle \tag{13}$$

Рассмотрим множество уровня функции $k_n(x)$

$$K_c := \{x \in S^3 | k_n(x) = c\}, \quad c \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Теорема. *Справедлива формула*

$$K_c = \begin{cases} \varnothing, & |c| > 1 \\ S^1_+\left(\sqrt{(1-c)/2}\right) + S^1_-\left(\sqrt{(1+c)/2}\right), & |c| \leqslant 1. \end{cases} \tag{15}$$

Окружности S^1_+, S^1_- лежат в плоскостях σ^+, σ^-.

Доказательство. Пусть $x \in K_c$. При разложении бивектора $x = x^+ + x^-$ по формулам (1), в силу (13), (14), получим

$$|x|^2 = |x^+|^2 + |x^-|^2 = 1, \quad \langle *x, x \rangle = |x^+|^2 - |x^-|^2 = -c. \tag{16}$$

Отсюда следует эквивалентность

$$(16) \iff |x^+| = \sqrt{(1-c)/2}, \quad |x^-| = \sqrt{(1+c)/2},$$

которая равносильна (15). •

В частном случае, при $c = 0$, получаем (см. (10), (15))

$$K_0 = T^2 \tag{17}$$

2. Перейдем к общему случаю произвольных размерностей. Пусть $\omega \in G^+_{p,p+q}$ и наборы $E := \{e_i\}_{i=1}^p$, $N := \{n_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ образуют такой ортонормированный базис в V^{p+q}, что

$$\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, \quad V_\omega = \operatorname{Lin} E, \quad V_\omega^\perp = \operatorname{Lin} N. \tag{1}$$

Поливекторы (см. [1], 6.2)

$$\eta_{i\alpha} := n_\alpha \wedge (\omega \llcorner e_i) = n_\alpha \wedge (*(\omega) e_i) \tag{2}$$

образуют ортонормированный базис касательного пространства $T_\omega G^+_{p,p+q}$. Здесь $*(\omega)$ обозначает оператор Ходжа в алгебре $\Lambda(V_\omega)$. Ориентация пространства V_ω задана p-вектором ω. Из [3], 11.3

следует, что для любого $X \in T_\omega G^+_{p,p+q}$, $X \neq 0$ найдутся такие базисы E и N, что

$$X = \sum_{i=1}^{p} \lambda^i \eta_{ii}, \quad \lambda^i \in \mathbb{R} \tag{3}$$

2.1. Утверждение. *Пусть* $X \in \Phi_\omega := G^+_{p,p+q} \cap T_\omega G^+_{p,p+q}$. *Тогда в* (3) *найдется только один коэффициент* λ^i *отличный от* 0.

Доказательство. Из (2), (3) вытекает, что $X \llcorner (\omega \llcorner e_i) = \pm\lambda^i n_i$, $X \llcorner [(\omega \llcorner (e_i \wedge e_j)) \wedge n_i] = \pm\lambda^i e_j$ при $i \neq j$. Если $\lambda^i \neq 0$, то (см. [1], 3.2) n_i, $e_j \in V_X$. Так как поливектор X простой, то (см. [1], 3.4) $\dim V_X = p$, откуда следует утверждение. $\bullet$

Следствие. *Любой* p*-вектор* $X \in \Phi_\omega$ *можно представить в виде*

$$X = n \wedge (*(\omega)e), \quad e \in S^{p-1}_\omega, \quad n \in S^{q-1}_\omega, \tag{4}$$

где через S^{p-1}_ω, S^{q-1}_ω *обозначены единичные сферы пространств* V_ω, $V^\perp_\omega$.

2.2. Определим отображение

$$\Phi : S^{p-1}_\omega \times S^{q-1}_\omega \to \Phi_\omega, \quad \Phi(e, n) := n \wedge (*(\omega)e) \tag{5}$$

риманова произведения сфер S^{p-1}_ω, S^{q-1}_ω в множество Φ_ω. Равенство (4) означает, что отображение Φ сюръективно.

Утверждение. *Для любой точки* $z = n \wedge (*(\omega)e) \in \Phi_\omega$ *справедливо равенство*

$$\Phi^{-1}(z) = \{(e, n), (-e, -n)\} \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $(\tilde{e}, \tilde{n}) \in \Phi^{-1}(z)$. Тогда

$$\begin{aligned} 1 &= \langle n \wedge (*(\omega)e), \tilde{n} \wedge (*(\omega)\tilde{e}) \rangle = \\ &= \langle n, \tilde{n} \rangle \cdot \langle *(\omega)e, *(\omega)\tilde{e} \rangle = \langle n, \tilde{n} \rangle \langle e, \tilde{e} \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует (6). $\bullet$

2.3. Любая нормальная геодезическая в произведении римановых многообразий равна произведению нормальных геодезических на сомножителях. Рассмотрим натуральную параметризацию $\gamma = \gamma(t)$ какой-нибудь геодезической в $S^{p-1}_\omega \times S^{q-1}_\omega$. Тогда

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t)), \gamma_2(t)), \tag{7}$$

где γ_1 и γ_2 – нормальные геодезические на сферах S^{p-1}_ω и S^{q-1}_ω.

Теорема. *Кривая*

$$\tau(t) := \Phi(\gamma(t)) \tag{8}$$

является нормальной геодезической в многообразии $G^+_{p,p+q}$, *причем параметризация* (8) *натуральная.*

Доказательство. Рассмотрим общий случай, когда геодезические γ_1 и γ_2 не постоянны. Пусть

$$\gamma_1(0) = e,\ |\gamma_1'(0)| = \lambda,\ e^\perp := \frac{1}{\lambda}\gamma_1'(0),$$
$$\gamma_2(0) = n,\ |\gamma_2'(0)| = \mu,\ n^\perp := \frac{1}{\mu}\gamma_2'(0).$$

Тогда

$$\begin{gathered}\gamma_1(t) = e(t) := e\cos(\lambda t) + e^\perp \sin(\lambda t),\\ \gamma_2(t) = n(t) := n\cos(\mu t) + n^\perp \sin(\mu t), \quad \tau(t) = n(t) \wedge (*(\omega)e(t)).\end{gathered} \tag{9}$$

Проведем вычисления.

$$\begin{gathered}\tau' = n' \wedge (*(\omega)e) + n \wedge (*(\omega)e').\\ |\tau'|^2 = |n'|^2 + |e'|^2 + 2\langle n, n'\rangle\langle e, e'\rangle = |\gamma_2'| + |\gamma_1'|^2 = \mu^2 + \lambda^2 = |\gamma'|^2 = 1.\\ \tau'' = n'' \wedge (*(\omega)e) + 2n' \wedge (*(\omega)e') + n \wedge (*(\omega)e'') =\\ = -\tau + 2n' \wedge (*(\omega)e').\end{gathered} \tag{10}$$

Прямые вычисления с использованием (2) показывают, что $n' \wedge (*(\omega)e') \perp T_\tau G^+_{p,p+q}$. Поэтому кривая τ – нормальная геодезическая в $G^+_{p,p+q}$, что вместе с (10) завершает доказательство теоремы. $\bullet$

2.4. Из формул (4), (6) и теоремы 2.3 непосредственно следует

Теорема. *Множество* $\Phi_\omega = G^+_{p,p+q} \cap T_\omega G^+_{p,p+q}$ *является* $(p+q-2)$*-мерным вполне геодезическим подмногообразием многообразия* $G^+_{p,p+q}$. *Подмногообразие* Φ_ω *можно представить как образ произведения единичных сфер* $S^{p-1}_\omega \times S^{q-1}_\omega$ *при двулистном локально изометричном накрытии* Φ.

При $p = q = 2$ из этой теоремы следует теорема 1.2.

2.5. Направление касательного вектора $X \in T_\omega G^+_{p,p+q} \subset T_\omega S^{N-1}$, $X \neq 0$ будем называть *асимптотическим*, если для любой нормали $n \in N_\omega G^+_{p,p+q}$ нормальная кривизна $k_n(X) := \frac{\langle B_\omega(X,X),n\rangle}{\langle X,X\rangle}$ обращается в 0. Здесь B_ω обозначает вторую основную форму подмногообразия $G^+_{p,p+q} \subset S^{N-1}$, а $N_\omega G^+_{p,p+q}$ – ортогональное дополнение касательного пространства $T_\omega G^+_{p,p+q}$ в $T_\omega S^{N-1}$.

Асимптотические направления совпадают с простыми. Иными словами, верна

Теорема. *Для любой точки $\omega \in G^+_{p,p+q}$ справедливо равенство*

$$\Phi_\omega = \{X \in T_\omega G^+_{p,p+q} | B_\omega(X,X) = 0, \, |X| = 1\}. \qquad (11)$$

Доказательство. Из [3], 11.3 следует, что

$$\omega(t) := \exp_\omega(tX) = e_1(\lambda^1 t) \wedge \ldots \wedge e_r(\lambda^r t) \wedge X_0,$$

где $e_i(s) = e_i \cos(s) + n_i \sin(s)$, $i \leqslant r \leqslant \min(p,q)$, $\lambda^i \neq 0$, $X_0 = e_{r+1} \wedge \ldots \wedge e_p$. Отсюда

$$|\omega'(t)| = |X|, \quad \omega''(t) = -|X|^2\omega(t) + 2 \sum_{(i,j)\in\Lambda(r,2)} \lambda^i \lambda^j \, \xi_{ij}(t), \qquad (12)$$

где $\xi_{ij} = (\omega \llcorner (e_i \wedge e_j)) \wedge n_i \wedge n_j \in (T_\omega G^+_{p,p+q})^\perp$, операция ортогонального дополнения рассматривается в касательном пространстве $T_\omega S^{N-1}$. Из (12) вытекает, что

$$B_\omega(X,X) = 2 \sum_{(i,j)\in\Lambda(r,2)} \lambda^i \lambda^j \, \xi_{ij}(t).$$

Следовательно, $B_\omega(X,X) = 0$ тогда и только тогда, когда ровно один из коэффициентов λ^i не обращается в ноль, т.е., когда p-вектор X простой. •

Так как базис $\eta_{i\alpha}$ (см. (2)) состоит из простых p-векторов, то из (11) следует, что подмногообразие $G^+_{p,p+q}$ минимально в сфере. При $p = q = 2$ из (11) следует (17) п. 1.4.

Литература

1. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части I, II.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **246** (1997), 84–107.
2. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. вып. 27 (1984), 68–75.

3. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Часть III.* — Зап. Научн. Семин. ПОМИ **246** (1997), 108–129.

Glushakov A.N. Two questions in the exterior geometry of Plücker embeddings for Grassmannian manifolds.

For the Plücker model of the Grassmannian manifold $G^+_{p,p+q}$ a structure of the intersection of the manifold with its own tangent space at an arbitrary point considered as a subspace of the exterior algebra is described. A direct formula for the second main form of the manifold $G^+_{2,4}$ as a hypersurface in a five-dimensional sphere is given. Sets of the constancy for the function of the normal curvature for this hypersurface are studied.

Санкт-Петербургский
Государственный университет

Поступило 10 февраля 1997 г.