В. А. Залгаллер

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ РАЗНОСТЬЮ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Цель настоящей статьи уточнить и развить заметку [5], а также поставить некоторые вопросы.

§1. Функции, допускающие минимальное разложение

1.1. Пусть D^n – выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, содержащий внутренние точки. Будем называть функцию $f : D^n \to \mathbb{R}$ *допускающей минимальное разложение*, если существует хотя бы одно представление $f = g - h$, где g и h – выпуклые функции на D^n, причем функция h ограничена сверху. Класс удовлетворяющих этим условиям функций f обозначаем Φ. Если $f \in \Phi$, то упомянутых представлений $f = g_\xi - h_\xi$ бесконечно много. За счет добавления к выпуклым функциям g_ξ и h_ξ одинаковой постоянной будем считать, что в каждом из представлений $f = g_\xi - h_\xi$ функция $h_\xi \leqslant 0$ и $\sup\limits_{a \in D^n} h_\xi(a) = 0$. После чего введем функции g и h, определяя их для каждой точки $a \in D^n$ равенствами

$$g = \sup_\xi g_\xi, \qquad h = \sup_\xi h_\xi. \tag{1}$$

Представление $f = g - h$ называется *минимальным разложением* функции f (в разность выпуклых).

1.2. А. Д. Александров в работах [1, 2] изучал внутреннюю геометрию поверхности в $\mathbb{R}^3$, которая является графиком функции $f(x, y)$, когда последняя допускает, даже в более широкой, чем рассматриваемый участок, выпуклой области представление разностью выпуклых функций. При этом в [1, стр. 11] был, по-существу, поставлен при $n = 2$ вопрос: нельзя ли предложить процесс, который сходился бы для функций $f \in \Phi$, расходился, если $f \notin \Phi$, и в случае сходимости давал бы минимальное разложение? Такой процесс при $n = 2$ предложен автором в [5]. В §3 мы опишем этот процесс для любой размерности n.

Предлагаемый процесс открывает путь для приближенного численного анализа.

1.3. Наличие упомянутого процесса оставляет открытым вопрос о внутренних свойствах функции f, необходимых и достаточных для того, чтобы $f \in \Phi$.

§2. Выпуклая оболочка функции

2.1. Какова бы ни была ограниченная снизу функция $\varphi : D^n \to \mathbb{R}$, где D^n – выпуклой компакт в $\mathbb{R}^n$, можно построить функцию $\bar{\varphi} : D^n \to \mathbb{R}$, определенную для каждой точки $a \in D^n$ равенством

$$\bar{\varphi}(a) = \sup \psi(a), \tag{2}$$

где sup взят по всем выпуклым функциям $\psi : D^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющим условию $\psi \leqslant \varphi$. При этом допускаются и выпуклые функции ψ, разрывные на границе ∂D^n.

Пример. Пусть $n = 1$, $D^n = [0, 1]$, значения $\varphi = 1$ в рациональных и $\varphi = 0$ в иррациональных точках отрезка $[0, 1]$. Тогда $\bar{\varphi} = 0$ в открытом интервале $(0, 1)$ и $\bar{\varphi} = 1$ на его концах.

2.2. *Надграфиком* функции $\varphi : D^n \to \mathbb{R}$ называют совокупность точек $(a, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, где $a \in D^n$, $z \geqslant \varphi(a)$. Надграфик $N(\bar{\varphi})$ функции $\bar{\varphi}$, определенной равенством (2), является выпуклой оболочкой надграфика $N(\varphi)$. Поэтому функцию $\bar{\varphi}$ естественно называть *выпуклой оболочкой* функции φ.

Для любой допускаемой в (2) функции ψ в каждой точке $a \in D^n$ верны неравенства

$$\psi(a) \leqslant \bar{\varphi}(a) \leqslant \varphi(a). \tag{3}$$

2.3. Для экспонированных точек $x \in \exp D^n$ значения $\bar{\varphi}(x) = \varphi(x)$, поскольку если функция ψ допустима в (2), то и функция

$$\psi_1(a) = \begin{cases} \psi(a) & \text{при } a \in D^n \setminus \exp D^n, \\ \varphi(a) & \text{при } a \in \exp D^n \end{cases}$$

тоже допустима в (2).

2.4. Далее для нас существенно только то, что для ограниченной сверху и снизу функции φ функция $\bar{\varphi}$ тоже ограничена сверху и снизу.

2.5. Замечание. Если рассматривать ограниченную снизу функцию $\varphi : \mathrm{int} D^n \to \mathbb{R}$, заданную только внутри D^n, то в определении (2) функции $\bar{\varphi}$ в качестве функций ψ достаточно использовать одни линейные функции, удовлетворяющие условию $\psi \leqslant \varphi$. Но мы далее рассматриваем функции, заданные на всем D^n.

§3. Итеративный процесс, сходящийся для $f \in \Phi$ и ведущий к минимальному разложению

3.1. Пусть функция $f : D^n \to \mathbb{R}$, где D^n – выпуклый компакт с внутренними точками в $\mathbb{R}^n$, непрерывна и потому ограничена сверху и снизу. Тогда может быть реализован следующий процесс. Строим по заданной функции f, начиная с $f_1 := f$, две последовательности функций

$$r_i := \bar{f}_i - f, \quad f_{i+1} := \bar{r}_i + f. \tag{4}$$

Для каждой фиксированной точки $a \in D^n$ значения f_i, $\bar{f}_i$ образуют монотонную последовательность

$$f_1(a) \geqslant \bar{f}_1(a) \geqslant f_2(a) \geqslant \bar{f}_2(a) \geqslant f_3(a) \geqslant \dots \tag{5}$$

Поэтому для каждой точки $a \in D^n$ определено конечное или отрицательное бесконечное значение

$$g^*(a) = \lim_{i \to \infty} \bar{f}_i(a). \tag{6}$$

3.2. Теорема. *Если определенная равенством* (6) *функция* $g^* : D^n \to \mathbb{R} \cup (-\infty)$ *хотя бы в одной точке равна* $-\infty$*, то* $f \notin \Phi$*. Если же функция* g^* *в каждой точке конечна, то* $f \in \Phi$*, и именно* $g = g^*$ *дает минимальное разложение* $f = g - h$ *в разность выпуклых функций.*

Доказательство. Допустим, что хоть одно представление в виде разности выпуклых $f = g - h$, $g : D^n \to \mathbb{R}$, $h : D^n \to \mathbb{R}$, $h \leqslant 0$ существует. Пусть $g - h$ именно минимальное разложение. Докажем по индукции, что в любой фиксированной точке $a \in D^n$ все значения $f_i \geqslant g$. При $i = 1$ это верно, так как $f_1 = f = g - h \geqslant g$. Пусть $f_i \geqslant g$ для номера i. Тогда ввиду выпуклости g, из (3) следует $\bar{f}_i \geqslant g$. С использованием индуктивного предположения, что $f_i \geqslant g$, заключаем, что $r_i = \bar{f}_i - f = \bar{f}_i - g + h \geqslant h$. Наконец, $f_{i+1} = \bar{r}_i + f = \bar{r}_i + g - h \geqslant g$. •

Из $\bar{f}_i \geqslant g$ при всех i следует, что $g^* \geqslant g$. Поэтому, если хотя бы в одной точке $g^*(a) = -\infty$, то $f \notin \Phi$.

Допустим, что для функции f предел (6) конечен в каждой точке $a \in D^n$. Утверждаем, что тогда $f = g^* - h^*$, где $h^* := g^* - f \leqslant 0$, дает минимальное разложение f в разность выпуклых функций.

Функция g^* выпукла как предел выпуклых $\bar{f}_i$. Докажем, что и h^* тоже выпукла. Из (6) и первого равенства (4) следует, что $h^* = g^* - f = \lim\limits_{i\to\infty} r_i$. Кроме того из (5) и (6) следует, $\lim\limits_{i\to\infty} f_{i+1} = \lim\limits_{i\to\infty} \bar{f}_i = g^*$. Поэтому при конечном значении g^* в каждой точке a будет $\lim\limits_{i\to\infty}(f_{i+1} - \bar{f}_i) = \lim\limits_{i\to\infty}(\bar{r}_i - r_i) = 0$. Отсюда $h^* = \lim\limits_{i\to\infty} r_i = \lim\limits_{i\to\infty} \bar{r}_i$, и функция h^* выпукла как поточечный предел выпуклых функций $\bar{r}_i$. То, что разложение $f = g^* - h^*$ минимальное, следует из $g^* \geqslant g$. $\bullet$

3.3. При $f \in \Phi$ функции g и h из минимального разложения $f = g - h$ возникают в процессе 3.1 как пределы выпуклых функций $\bar{f}_i$, $\bar{r}_i$ и потому выпуклы на всем D^n и автоматически непрерывны в $\operatorname{int} D^n$. Но предел даже непрерывных выпуклых функций может иметь разрывы на границе. Например, при $n = 1$ на отрезке $[0, 1]$ последовательность непрерывных выпуклых функций, определенных равенством

$$\varphi_m(x) = \begin{cases} 1 - mx & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{m} \\ \frac{mx-1}{m-1} & \text{при } \frac{1}{m} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

сходится при $m \to \infty$ к разрывной на одном конце выпуклой функции

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x = 0; \\ x & \text{при } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Еще более сложным может быть предел непрерывных выпуклых функций в двумерном случае. Например, как предел непрерывных выпуклых в круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ функций можно получить заданную в том же круге функцию

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{1-x^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant 1,\ x^2 \neq 1; \\ 1 & \text{при } x^2 = 1,\ y^2 = 0. \end{cases}$$

Последняя функция выпукла. Но она не только разрывна в точках $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ границы круга, но даже не имеет в этих точках определенного предела при приближении изнутри круга. Явление, когда для последовательности непрерывных выпуклых функций $\varphi_i : D^2 \to \mathbb{R}$ их графики как поверхности в $\mathbb{R}^3$ в пределе частично "налипают" на границу цилиндра над компактом D^2, обсуждалось напр. в книге [3, стр. 196–198].

3.4. Пусть функция $f : D^n \to \mathbb{R}$ непрерывна на всем D^n, $f \in \Phi$ и $f = g - h$ ее минимальное разложение. Обязаны ли функции g и h тоже быть непрерывными на всем D^n?

При $n = 1$ ответ положителен. Действительно, в этом случае $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, и из процесса 3.1 и теоремы 3.2 следует, что $h(a) = h(b) = 0$. Выпуклая функция $h \leqslant 0$ имеет на концах промежутка $[a, b]$ определенные предельные значения $h^-(a)$, $h^-(b)$ при приближении к этим концам по точкам из открытого интервала (a, b). Если бы, например, на конце a, у функции h был разрыв, то было бы $0 = h(a) > h^-(a)$. Тогда нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что $h^-(a) + \varepsilon < h(a)$. В этом случае от функций g, h можно перейти к функциям g_1, h_1, добавив на полуоткрытом интервале $(a, b]$ к g и h линейную функцию $l(x) = \frac{b-x}{b-a}\varepsilon$ и сохранив равенство $f = g_1 - h_1$, неравенство $h_1 \leqslant 0$ и выпуклость g_1, h_1, что противоречит минимальности разложения $f = g - h$. $\bullet$

Но уже при $n = 2$ ответ на вопрос 3.4 отрицателен. Ниже, в 5.5 дается соответствующий пример.

§4. Кусочно-линейные функции

4.1. Пусть P^n – компактный выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$, обладающий внутренними точками, и функция $f : P^n \to \mathbb{R}$ *кусочно-линейная*. Мы понимаем под этим, что f непрерывна и ее график $\Gamma(f)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ представляет собой многогранную (гипер)поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, состоящую из *конечного числа* n-мерных многогранников и взаимно однозначно проектирующуюся на P^n. Совокупность $(n-1)$-мерных граней поверхности $\Gamma(f)$ проектируется на P^n в сеть $\gamma(f)$ из $(n-1)$-мерных многогранников. Сеть $\gamma(f)$ разбивает P^n на конечное число попарно не имеющих общих внутренних точек n-мерных многогранных ячеек. (Эти ячейки связны, но не обязаны быть односвязными.) В пределах каждой из этих ячеек функция f линейна.

4.2. Теорема. *Любая кусочно-линейная функция $f : P^n \to \mathbb{R}$ допускает представления разностью двух выпуклых кусочно-линейных* *функций.*

Доказательство. Назовем *хордами* ($(n-1)$-мерными) замыкания непустых пересечений $\operatorname{int} P^n \subset \mathbb{R}^n$ с гиперплоскостями $H^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Проекций всех неграничных $(n-1)$-мерных граней поверхности $\Gamma(f)$ умещаются в P^n на конечном числе хорд Q_i ($i = 1, \dots, m$). Если хотя бы при одной из $(n-1)$-мерных граней поверхности $\Gamma(f)$, лежащих над Q_1, поверхность $\Gamma(f)$ имела перелом выпуклостью вверх, то мы прибавим к f выпуклую функцию $h_1 : P^n \to \mathbb{R}$, график которой $\Gamma(h_1)$ имеет вид "двугранного угла" с n-мерными сторонами и $(n-1)$-мерным "ребром", лежащим над Q_1. Функцию h_1 можно выбрать так, что график $\Gamma(f + h_1)$ при всех $(n-1)$-гранях, лежащих над Q_1, будет иметь переломы только выпуклостью вниз. Если у $\Gamma(f+h_1)$ над Q_2 была хоть одна $(n-1)$-грань, при которой у $\Gamma(f+h_1)$ перелом выпуклостью вверх, прибавим к $f + h_1$ выпуклую функцию $h_2 : P^n \to \mathbb{R}$ с графиком $\Gamma(h_2)$ в виде "двугранного угла" с $(n-1)$-ребром над Q_2, притом выберем h_2 так, чтобы график $\Gamma(f + h_1 + h_2)$ при $(n-1)$-гранях, лежащих над Q_2, имел переломы только выпуклостью вниз. И т.д... После m подобных шагов получим представление $f = g - h$, где $g = f + \sum_{i=1}^{m} h_i$, $h = \sum_{i=1}^{m} h_i$. Очевидно g и h кусочно-линейны, а h выпукла.

Убедимся, что и функция g выпукла. Действительно, график $\Gamma(g)$ имеет при всех $(n-1)$-гранях переломы выпуклостью вниз. Поэтому множество тех точек, где функция g не обладает локальной выпуклостью может существовать только на каркасе из граней, размерности $\leqslant n-2$. Тем самым это множество не может содержать $(n-1)$-мерный континуум. Но тогда по теореме Паскалини, см. [4, стр. 6], функция g выпукла в целом. $\bullet$

4.3. Следствие. *Каждая кусочно-линейная функция $f : P^n \to \mathbb{R}$ принадлежит классу Φ, а потому допускает минимальное разложение $f = g - h$.*

4.4. Вопрос. Обязательно ли для кусочно-линейной функции $f : P^n \to \mathbb{R}$ фигурирующие в ее минимальном разложении $f = g - h$ выпуклые функции g и h кусочно-линейны?

Ниже (см. 6.7 и 5.5) доказывается, что уже при $n = 2$ функции g и h кусочно-линейны лишь над $\operatorname{int} P^2$, а на ∂P^2 могут иметь разрывы. При $n \geqslant 3$ вопрос не исследовался.

4.5. При $n = 1$ ответ на вопрос 4.4 положителен. Это следует из теоремы 3.2. Действительно, пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ кусочно-линейна, т.е. $\Gamma(f)$ – ломаная линия, неконцевые вершины которой лежат над некоторыми точками $a_1 < a_2 < \ldots < a_m$ интервала (a,b). В ходе процесса 3.1 все функции f_i, $\bar{f}_i$, r_i, $\bar{r}_i$ остаются кусочно-линейными, а неконцевые вершины их графиков лежат только над точками из множества $\{a_i\}$. Поэтому таковы и функции g, h, предельные для $\bar{f}_i$, $\bar{r}_i$.

4.6. Алгоритм нахождения минимального разложения для кусочно-линейной функции одной переменной. Для $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ процесс 3.1 может требовать бесконечного количества шагов и предельного перехода. Но знание, что в минимальном разложении $f = g - h$ функции g и h кусочно-линейны и их графики могут иметь вершины только над точками из множества $\{a_i\}$ (см. 4.5), позволяет найти функции g и h конечным алгоритмом. Опишем его.

Обозначим $c_1 < \ldots < c_k$ те из точек множества $\{a_i\}$, над которыми $\Gamma(f)$ имеет излом выпуклостью вниз, и $d_1 < \ldots d_{m-k}$, над которыми у $\Gamma(f)$ излом выпуклостью вверх. Из процесса 3.1 и теоремы 3.2 следует, что в искомом минимальном разложении $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b)$, $h(a) = h(b) = 0$. Кроме того неконцевые вершины графика $\Gamma(g)$ расположены точно над точками $c_1 < \ldots < c_k$ и только над ними, а неконцевые вершины $\Gamma(h)$ над $d_1 < \ldots < d_{m-k}$ и только над ними. Действительно, необходимость наличия вершин $\Gamma(g)$ над c_i и вершин $\Gamma(h)$ над d_j очевидна. А если бы над одной из точек c_i, d_j были вершины и у $\Gamma(g)$, и у $\Gamma(h)$, то разложение $f = g - h$ не было бы минимальным: значения g и h в такой точке можно было бы немного увеличить. Для нахождения функций g и h остается найти m неизвестных значений

$$x_\alpha = g(c_\alpha), \quad y_\beta = h(d_\beta); \quad \alpha = 1, \ldots, k; \quad \beta = 1, \ldots, m-k.$$

Для каждой точки a_i найдется единственный индекс α, при котором либо $a_i = c_\alpha$, либо $c_\alpha < a_i < c_{\alpha+1}$, $c_0 = a$, $c_{k+1} = b$. В первом случае $g(a_i) = x_\alpha$, а во втором значение $g(a_i)$ выражается через x_α и $x_{\alpha+1}$

$$g(a_i) = \frac{c_{\alpha+1} - a_i}{c_{\alpha+1} - c_\alpha}\, x_\alpha + \frac{a_i - c_\alpha}{c_{\alpha+1} - c_\alpha}\, x_{\alpha+1}.$$

Аналогично, для каждого a_i найдется единственное β, при котором либо $a_i = d_\beta$, либо $d_\beta < a_i < d_{\beta+1}$, $d_0 = a$, $d_{k+1} = b$. В первом случае $h(a_i) = x_\beta$, а во втором

$$h(a_i) = \frac{d_{\beta+1} - a_i}{d_{\beta+1} - d_\beta}\, y_\beta + \frac{a_i - d_\beta}{d_{\beta+1} - d_\beta}\, y_{\beta+1}.$$

Теперь равенство $f = g - h$, примененное в m точках a_i, дает m линейных уравнений для нахождения всех x_α, y_β. Из доказанного ранее следует, что система будет иметь единственное решение и найденные кусочно-линейные функции g и h будут выпуклыми.

4.7 Пример. Пусть функция $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ определена равенствами

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x - 2 & \text{при} \quad 1 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2 - x & \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3. \end{cases}$$

В этом случае $m = 2$, $k = 1$, $c_0 = d_0 = 0$, $c_1 = 1$, $d_1 = 2$, $c_2 = d_2 = 3$. Для точки a_1 имеем $a_1 = c_1$, $d_0 < a_1 < d_1$, для точки a_2 имеем $c_1 < a_2 < c_2$, $a_2 = d_1$. Это дает $g(a_1) = x_1$, $h(a_1) = \frac{1}{2} y_1$, $g(a_2) = \frac{1}{2}(x_1 - 1)$, $h(a_2) = y_1$. Отсюда получаем два уравнения

$$x_1 - \frac{1}{2}\, y_1 = -1, \quad \frac{1}{2}(x_1 - 1) - y_1 = 0,$$

из которых $x_1 = -\frac{5}{3}$, $y_1 = -\frac{4}{3}$. На Рис. 1 изображены графики функций f, g, h.

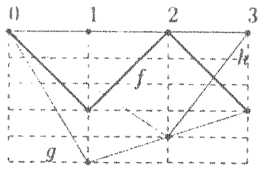


Рис. 1. Одномерный пример.

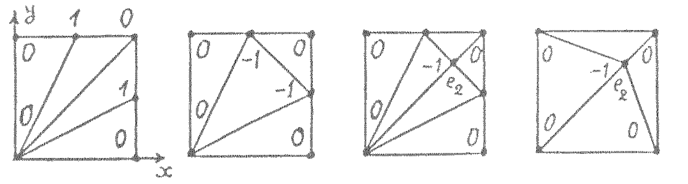
§5. Два примера для кусочно-линейных функций двух переменных

5.1. График $\Gamma(f)$ кусочно-линейной функции $f : P^2 \to \mathbb{R}$, где P^2 – выпуклый многоугольник с внутренними точками в $\mathbb{R}^2$, является многогранной поверхностью в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Будем обозначать $\gamma(f)$ граф, являющийся проекцией на P^2 сети всех ребер поверхности $\Gamma(f)$, включая и граничные ребра. Граф $\gamma(f)$ разбивает многоугольник P^2 на многоугольные ячейки; в пределах каждой из них f линейна. Функция f не определяется своими значениями в вершинах графа $\gamma(f)$, но вполне определяется совместно: своими значениями в вершинах $\gamma(f)$ и видом графа $\gamma(f)$. Далее мы именно так будем задавать рассматриваемые кусочно-линейные функции φ двух переменных: изображать на рисунке граф $\gamma(\varphi)$ и около его вершин писать значение функции φ в этих вершинах.

5.2. Замечание. Если ячейка разбиения области задания функции φ графом $\gamma(\varphi)$ треугольная, то значения φ в вершинах этой ячейки независимы. Если ячейка не треугольная, то значения φ в вершинах этой ячейки всегда связаны линейными зависимостями, обеспечивающими линейность φ в пределах ячейки.

Рассмотрим два поучительных примера, в которых удается полностью проследить ход итерационного процесса 3.1.

5.3. Пример. Пусть P^2 – замкнутый квадрат на плоскости (x, y) с диагонально противоположными вершинами квадрата в точках $(0, 0)$ и $(4, 4)$. И пусть $f : P^2 \to \mathbb{R}$ кусочно-линейная функция, задание которой графом $\gamma(f)$ и значениями f в вершинах этого графа изображено на Рис. 2-а. Применим к этой функции f итеративный процесс 3.1.



2-а. Задание f 2-б. Задание $\bar{r}_1$ 2-в. Задание f_2 2-г. Задание $\bar{f}_2$.

Последовательно находим: $f_1 = f$, $\bar{f}_1 \equiv 0$, $r_1 = -f$, функцию $\bar{r}_1$

задает Рис. 2-б, а функции $f_2 = \bar{r}_1 + f$ Рис. 2-в, где координаты точки $e_2(3,3)$. Функцию $\bar{f}_2$ задает Рис. 2-г.

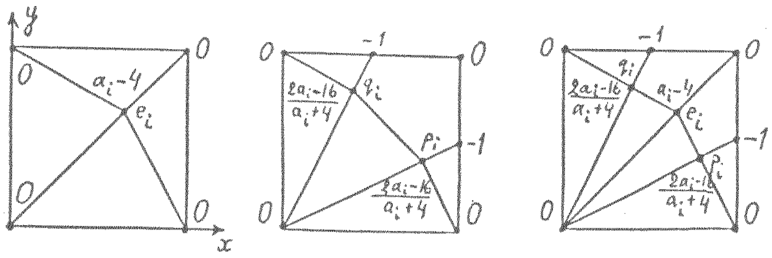
Остановимся на этом шаге и обоснуем дальнейший ход процесса 3.1 рассуждением по индукции. Сделаем индукционное допущение, что функция $\bar{f}_i$ задается графом $\gamma(\bar{f}_i)$, изображенным на Рис. 3-а, где координаты точки $e_i(a_i, a_i)$, значение $\bar{f}_i(e_i) = a_i - 4$, а во всех остальных вершинах $\bar{f}_i = 0$, причем $2 < a_i \leqslant 3$. (Заметим, что этим требованиям удовлетворяет функция $\bar{f}_2$ при $a_2 = 3$.) Мы утверждаем, что при таком допущении о функции $\bar{f}_i$ функция $\bar{f}_{i+1}$ окажется точно такого же типа, но с $a_{i+1} = \frac{6a_i}{a_i+4}$. Докажем это.

При $\bar{f}_i$ Рис. 3-а функцию $r_i = \bar{f}_i - f$ задает Рис. 3-б, где координаты новых вершин

$$p_i\left(\frac{8a_i}{a_i+4}, \frac{4a_i}{a_i+4}\right), \quad q_i\left(\frac{4a_i}{a_i+4}, \frac{8a_i}{a_i+4}\right).$$

Значение $r_i(e_i) = \bar{f}_i(e_i) - 0 = a_i - 4$, а значения $r_i(p_i) = r_i(q_i) = \frac{2a_i-16}{a_i+4}$ находятся из

$$\bar{f}_i(p_i) = 4\frac{a_i-4}{a_i+4}, \quad f(p_i) = 2\frac{a_i}{a_i+4}.$$

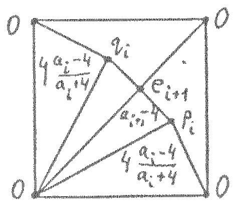


3-а. Индукционное предположение $\bar{f}_i$

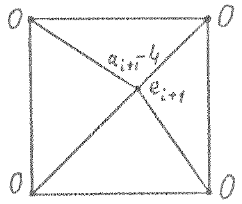
3-б. Задание r_i.

3-в. Задание $\bar{r}_i$.

1) Если на Рис. 3-б соединить отрезком точки p_i и q_i, то его пересечением с диагональю квадрата будет точка $e_{i+1}\left(\frac{6a_i}{a_i+4}, \frac{6a_i}{a_i+4}\right)$. Ввиду $a_i > 2$ значение $r_i(e_{i+1}) = 6\frac{a_i-4}{a_i+4}$ больше, чем значение $\frac{2a_i-16}{a_i+4}$ функции r_i в точках p_i и q_i. Поэтому в $\mathbb{R}^3$ точка



3-г. Задание f_{i+1}.



3-д. Задание $\bar{f}_{i+1}$.

$(e_{i+1}, r_i(e_{i+1}))$ графика $\Gamma(r_i)$ лежит над хордой, соединяющей точки $P_i(p_i, r_i(p_i))$ и $Q_i(q_i, r_i(q_i))$.

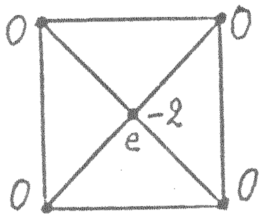
2) Отрезок от вершины $(4,4)$ квадрата до точки e_i относится к отрезку от точки $(4,4)$ до e_{i+1} как $(4-a_i) : \left(4 - \frac{6a_i}{a_i+4}\right) = \frac{16-a_i^2}{16-2a_i}$. Поэтому на графике $\Gamma(r_i)$ хорда, соединяющая середину отрезка P_iQ_i с точкой $(4,4,0)$ будет над точкой e_i находится по оси z на отметке $r_i(\rho_i)\frac{16-a_i^2}{16-2a_i} = a_i - 4$, что совпадает со значением $r_i(e_i) = \bar{f}_i(e_i)$.

Ввиду этих замечаний функцию $\bar{r}_i$ задает Рис. 3-в. Теперь функцию $f_{i+1} = \bar{r}_i + f$ задает Рис. 3-г, где $a_{i+1} := \frac{6a_i}{a_i+4}$. И, наконец, учитывая, что $f_{i+1}(e_{i+1}) < f_{i+1}(p_i) = f_{i+1}(q_i)$, получаем вид функции $\bar{f}_{i+1}$, Рис. 3-д. Наша индукция доказана.

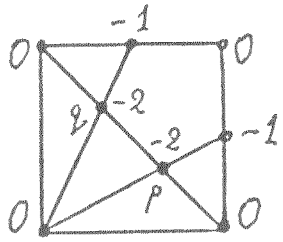
Итак, функции $\bar{f}_i$ при $i \geqslant 2$ имеют вид Рис. 3-а, причем $a_{i+1} = \frac{6a_i}{a_i+4}$, $a_2 = 3$. Но такая последовательность, монотонно убывая, сходится к числу 2. Поэтому предельная функция $g = \lim\limits_{i\to\infty} \bar{f}_i$ имеет задание Рис. 4-а, а соответствующая ей функция $h = g - f$ задание Рис. 4-б. Эти функции и составляют минимальное разложение $f = g - h$ в данном примере.

5.4. Пример 5.3 показывает, что для кусочно-линейной функции двух переменных в ее минимальном разложении $f = g - h$ могут фигурировать кусочно-линейные функции, у которых вершины графиков $\Gamma(g)$, $\Gamma(h)$ расположены не только против вершин $\Gamma(f)$. Этот пример показывает ошибочность Теоремы 2 в заметке [5][1]. Ниже, в пункте 6.7 дана исправленная редакция этой

[1]Ошибка проистекла от утверждения, что новые положения, вершин не могут возникать в ходе итеративного процесса. Они действительно не возникают при переходах к выпуклой оболочке. Но при этом переходе могут



4-а. Задание g.



4-б. Задание h.

теоремы.

Кроме того в ходе процесса 3.1 у графиков промежуточных кусочно-линейных функций могут появляться вершины над все новыми и новыми точками (точки e_i, p_i, q_i в примере 5.3). Поэтому положительный ответ на вопрос 4.4 в пределах $\operatorname{int} P^n$ даже при $n = 2$ еще требует доказательства. Мы вернемся к этом в §6.

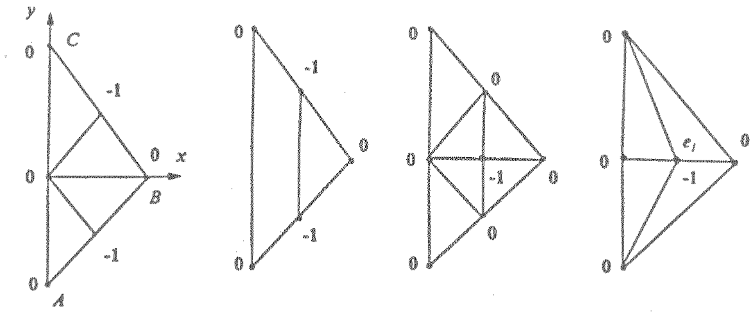
5.5. Пример. Пусть P^2 – замкнутый треугольник ABC на плоскости (x, y) с координатами вершин $A(0, -2)$, $B(0, 2)$, $C(0, 2)$. И пусть $f : P^2 \to \mathbb{R}$ кусочно-линейная функция, задание которой графом $\gamma(f)$ и значениями f в вершинах этого графа изображено на Рис. 5-а. Применим к этой функции f итеративный процесс 3.1.

Последовательно находим $\bar{f}_1$ (Рис. 5-б); r_1 (Рис. 5-в) и $\bar{r}_1$ (Рис. 5-г).

Остановимся на этом шаге и, как и в примере 5.3, обоснуем дальнейший ход процесса 3.1 рассуждением по индукции. Сделаем индукционное допущение, что функция $\bar{r}_i$ задается графом $\gamma(\bar{r}_i)$, изображенным на Рис. 6-а, где координаты точки $e_i(a_i, 0)$, значение $\bar{r}_i(e_i) = a_i - 2$, а во всех остальных вершинах $\bar{r}_i = 0$, причем $0 < a_i \leqslant 1$. (Заметим, что этим требованиям удовлетворяет функция $\bar{r}_1$ при $a_i = 1$.) Мы утверждаем, что при таком допущении о функции $\bar{r}_i$ функция $\bar{r}_{i+1}$ окажетсяточно такого же типа, но с $a_{i+1} = \frac{2a_i}{a_i+2}$. Докажем это.

При $\bar{r}_i$ Рис. 6-а функцию $f_{i+1} = \bar{r}_i + f$ задает Рис. 6-б, где

возникать новые ребра, а затем – при сложении или вычитании – могут возникать и новые вершины.



5-а. Задание f. 5-б. Задание $\bar{f}_1$. 5-в. Задание r_1. 5-г. Задание $\bar{r}_1$.

координаты новых вершин

$$p_i\left(\frac{2a_i}{a_i+2}, -\frac{2a_i}{a_i+2}\right), \quad q_i\left(\frac{2a_i}{a_i+2}, \frac{2a_i}{a_i+2}\right).$$

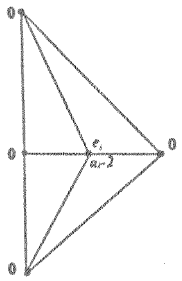
Для f_{i+1} имеем $f_{i+1}(e_i) = a_i + 2$, а значения $f_{i+1}(p_i) = f_{i+1}(q_i) = -\frac{4}{a_i+2}$ находятся из того, что

$$\bar{r}_i(p) = 2\frac{a_i-2}{a_i+2}, \quad f(p_i) = -\frac{2a_i}{a_i+2}.$$

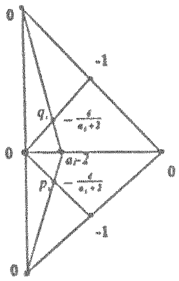
Задание f_{i+1} изображено на Рис. 6-б. Чтобы перейти к функции $\bar{f}_{i+1}$ сделаем два замечания.

1) Если на Рис. 6-б соединить отрезком точки p_i и q_i, то его пересечением с осью x будет точка $e_{i+1}\left(\frac{2a_i}{a_i+2}, 0\right)$. Ввиду $a_i > 0$ значение $f_{i+1}(e_{i+1}) = 2\frac{a_i-2}{a_i+2}$ будет больше, чем значение $-\frac{4}{a_i+2}$ функции f_{i+1} в точках p_i, q_i. Поэтому в $\mathbb{R}^3$ точка $(e_{i+1}, f_{i+1}(e_{i+1}))$ графика $\Gamma(f_{i+1})$ лежит над хордой, соединяющей точки $P_i(p_i, f_{i+1}(p_i))$ и $Q_i(q_i, f_{i+1}(q_i))$.

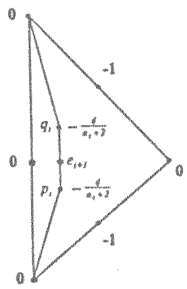
2) Отрезок от вершины B треугольника ABC относится к отрезку от B до точки e_{i+1} как $(2-a) : \left(2 - \frac{2a_i}{a_i+2}\right) = \frac{4-a_i^2}{4}$. Поэтому на графике $\Gamma(f_{i+1})$ хорда, соединяющая середину отрезка P_iQ_i с точкой $(2,0,0) = (B, f_{i+1}(B))$ будет над точкой e_i находиться по оси z на отметке $f_{i+1}(p_i)\cdot\frac{4-a_i^2}{4} = a_i - 2$, что совпадает со значением $f_{i+1}(e_i)$.



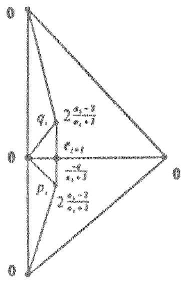
6-а. Задание $\bar{r}_i$.



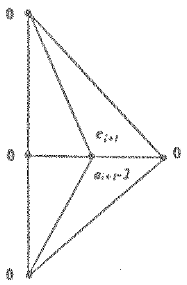
6-б. Задание f_{i+1}.



6-в. Задание $\bar{f}_{i+1}$.



6-г. Задание r_{i+1}.



6-д. Задание $\bar{r}_{i+1}$.

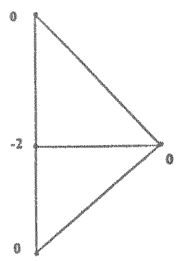
Ввиду этих замечаний функцию $\bar{f}_{i+1}$ задает Рис. 6-в, в котором $\bar{f}_{i+1}(p_i) = \bar{f}_{i+1}(q_i) = \bar{f}_{i+1}(e_{i+1}) = -\frac{4}{a_i+2}$. Теперь функцию $r_{i+1} = \bar{f}_{i+1} - f$ задает Рис. 6-г, в котором

$$r_{i+1}(p_i) = r_{i+1}(q_i) = -\frac{4}{a_i+2} + \frac{2a_i}{a_i+2} = 2\frac{a_i-2}{a_i+2},$$
$$r_{i+1}(e_{i+1}) = -\frac{4}{a_i+2}.$$

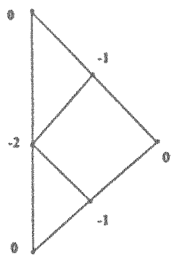
И, наконец, учитывая, что $r_{i+1}(e_{i+1}) < r_{i+1}(p_i) = r_{i+1}(q_i)$, заключаем, что функцию $\bar{r}_{i+1}$ задает Рис. 6-д, где $a_{i+1} = \frac{2a_i}{a_i+2}$. Наша индукция доказана.

Итак, функции $\bar{r}_i$ имеют вид Рис. 6-а, причем $a_1 = 1$, $a_{i+1} =$

$\frac{2a_i}{a_i+2}$. Но такая последовательность чисел a_i монотонно убывая, сходится к нулю. При этом $\bar{r}_i(e_i) \to -2$. Поэтому предельная выпуклая функция $h = \lim\limits_{i\to\infty} \bar{r}_i$ на множестве $P^2 \setminus (AC)$, где (AC) – внутренняя часть стороны AC треугольника P^2, задается Рис. 7-а. В то же время на стороне $[AC]$ функции $\bar{r}_i$, а потому и h, тождествено равны нулю. (Соответственно функцию g в пределах $P^2 \setminus (AC)$ задает Рис. 7-б, а на AC функция $g \equiv 0$.)



7-а. Задание h внутри ABC.



7-б. Задание g внутри ABC.

5.6. Пример 5.5 показывает, что для непрерывных функций $f : D^n \to \mathbb{R}$ класса Φ при $n \geqslant 2$ в их минимальном разложении $f = g - h$ могут фигурировать выпуклые функции g и h, разрывные на некоторой части границы ∂D^n.

Кроме того в случае кусочно-линейных функций $f : P^n \to \mathbb{R}$ можно при $n \geqslant 2$, вообще говоря, если и ожидать в общем случае кусочную линейность g и h, то только в $\operatorname{int} P^n$.

§6. Строение g и h для кусочно-линейных функций двух переменных

6.1. Легче всего решается вопрос о строении функции g и h (в минимальном разложении $f = g - h$ кусочно-линейной функции $f : P^2 \to \mathbb{R}$) на границе ∂P^2.

Лемма. *В указанном случае графики $\Gamma(g\big|_l)$, $\Gamma(h\big|_l)$ сужений функций g и h на каждую сторону l выпуклого многоугольника P^2 являются ломаными с вершинами только против вершин графика $\Gamma(f\big|_l)$, а на концах стороны l, т.е. в вершинах P^2, значения $h = 0$.*

Это следует из того, что в ходе процесса 3.1 для функции f аналогичный процесс происходит для суженной на l функции $f\big|_l : l \to \mathbb{R}^n$. А для последней лемма верна согласно 4.5. $\bullet$

Более того, *алгоритм 4.6 позволяет в конечное число шагов находить вид функций* $g\big|_l$, $h\big|_l$ для каждой стороны l многоугольника P^2.

Последнее мало что дает для выяснения строения функций g и h в $\operatorname{int} P^2$, о которых мы *пока* знаем только их выпуклость. Поэтому обратимся к выяснению положения экспонированных точек надграфиков $N(g)$ и $N(h)$ в пределах $\operatorname{int} P^2$. Нам понадобятся дополнительные обозначения.

6.2. Пусть $\varphi : \operatorname{int} P^2 \to \mathbb{R}$ выпуклая функция. На выпуклой поверхности, каковой является ее график $\Gamma(\varphi)$, могут быть плоские участки. Их внутренние точки назовем *плоскими*. Могут на $\Gamma(\varphi)$ быть открытые отрезки, не лежащие ни в каком открытом плоском участке. Такие отрезки будем называть отрезками *типа* q.

6.3. Пусть функция $f : P^2 \to \mathbb{R}$ кусочно-линейна; $\Gamma(f)$ – ее график; граф $\gamma(f)$ – проекция на P^2 сети ребер многогранной поверхности $\Gamma(f)$. Разделим ребра графа $\gamma(f)$ на три класса: ребра *типа* λ – лежащие на границе выпуклого многоугольника P^2; ребра *типа* μ – над которыми $\Gamma(f)$ иметь перелом выпуклостью вверх; ребра *типа* ν – над которыми $\Gamma(f)$ имеет перелом выпуклостью вниз.

6.4. Лемма. *Для минимального разложения $f = g - h$ кусочно-линейной функции $f : P^2 \to \mathbb{R}$ верно следующее.*

1) *Надграфик $N(h)$ может над $\operatorname{int} P^2$ иметь экспонированные точки только над вершинами графа $\gamma(f)$ и над внутренними точками его ребер типа μ.*

2) *Надграфик $N(g)$ может над $\operatorname{int} P^2$ иметь экспонированные точки только над вершинами графа $\gamma(f)$ и над внутренними точками его ребер типа ν.*

Доказательство. 1. Пусть p экспонирования точка надграфика $N(h)$, лежащая над точкой $x \in \operatorname{int} P^2$. Тогда $h(x) < 0$.Обозначим H опорную к $N(h)$ плоскость, для которой $N(h) \cap H = p$.

2. Допустим, что точка x лежит внутри ячейки d – одной из тех, на которые граф $\gamma(f)$ делит многоугольник P^2. Незначительным параллельным подъемом плоскости H отсечем от $N(h)$ горбушку Q так, что ее проекция останется внутри d и усеченная

функция h_1 останется неположительной. Ввиду линейности f в пределах ячейки d, плоскому краю горбушки Q на $\Gamma(g)$ отвечает также плоская кривая, по которой можно отсечь горбушку от надграфика $N(g)$. После этих отсечений сохранится равенство $f = g_1 - h_1$. Но это противоречит минимальности разложения $f = g - h$.

3. Допустим, что точка x лежит внутри ребра l типа ν графа $\gamma(f)$. По l соседствуют две ячейки d_1, d_2 из числа тех, на которые P^2 разбит графом $\gamma(f)$. Как и выше, отсечем от $N(h)$ достаточно малую горбушку Q так, что ее проекция останется в пределах $d_1 \cup d_2$ и усеченная функция h_1 останется неположительной. Плоский край ("донышко") горбушки Q разбивается на две части φ_1, φ_2, лежащие соответственно над d_1 и d_2. Ввиду линейности функции f порознь в d_1 и в d_2, на надграфике $N(g)$ функции $g = h + f$ плоским участком φ_1, φ_2 будут соответствовать сечения ψ_1, ψ_2, состыкованные над l так, что они образуют перелом выпуклостью вниз. После отсечения от $N(g)$ части плоскими сечениями ψ_1 и ψ_2 получим график новой выпуклой функции g_1. При этом сохранится равенство $f = g_1 - h_1$, что противоречит минимальности разложения $f = g - h$. Утверждение леммы 6.4 для $N(h)$ доказано.

4. Для $N(g)$ доказательство вполне аналогично. •

6.5. Пусть у $N(h)$ нашлась экспонированная точка $A_h = (a, h(a))$, где a лежит внутри ребра типа μ. (Пример 5.3 показывает, что такое возможно.) На графике $\Gamma(g)$ над такой точкой a не может лежать плоская точка, иначе на $\Gamma(h) = \Gamma(g - f)$ через точку A_h проходил бы отрезок, идущий над l. По лемме 6.4 над a у $N(g)$ нет экспонированных точек. Значит над a на $\Gamma(g)$ лежит точка A_g, через которую на $\Gamma(g)$ проходит отрезок $q_g(a)$, типа q.

Проекция этого отрезка $q_g(a)$ на P^2 трансверсальна к l, (иначе на $\Gamma(h) = \Gamma(g - f)$ через A_h шел бы отрезок). Ввиду этой трансверсальности и того, что над l лежит настоящее ребро графика $\Gamma(f)$, в любой точке $A \in q_g(a)$ касательный конус к надграфику $N(g)$ имеет вид общего для всех $A \in q_g(a)$ двугранного угла с углом $< \pi$. (Отсюда, между прочим, следует, что для суженного графика $\Gamma(h\big|_l)$ точка A_h угловая.)

Будем двигаться в P^2 из точки a по лучу $L(a)$ в одну из сторон вдоль проекции отрезка $q_g(a)$. Начало луча $L(a)$ идет (ввиду упомянутой трансверсальности) строго внутри одной ячейки d из числа тех, на которые P^2 разбит графом $\gamma(f)$. Над этим началом луча $L(a)$ и на $\Gamma(g)$ и на $\Gamma(h)$ лежат отрезки, причем вдоль этих отрезков касательные конусы к $N(g)$ и $N(h)$ являются двугранными углами с углами $< \pi$. Такое начало движения вдоль $L(a)$ завершится выходом на границу ячейки d. При этом есть четыре возможности: 1) мы дойдем до внутренней точки другого ребра типа μ; 2) до внутренней точки ребра типа ν; 3) до внутренней точки граничного ребра типа λ; 4) до одной из вершин графа $\gamma(f)$.

1) Если мы дошли до внутренней точки a' ребра типа μ, то над a' снова окажется экспонированная точка надграфика $N(h)$. Значит через точку $A'_g = (a', g(a'))$ на $\Gamma(g)$ идет отрезок $q_g(a')$, который обязан совпасть с отрезком $q_g(a)$. И мы можем продолжать движение по лучу $L(a)$ уже в следующей ячейке d', имея над собой отрезки типа q и на $\Gamma(g)$ и на $\Gamma(h)$.

2) Если мы дошли до внутренней точки a' ребра типа ν, то над a' окажется экспонированная точка у надграфика $N(g)$. По соображениям, совершенно аналогичным начальным доводам настоящего пункта 6.5, над a' на этот раз на $\Gamma(h)$ должен лежать отрезок $q_h(a')$ типа q. Он обязан будет лежать над лучом $L(a)$. И мы сможем продолжать движение по лучу $L(a)$ в следующей ячейке d', имея над собой отрезки типа q и на $\Gamma(g)$ и на $\Gamma(h)$.

3) Исключим возможность выхода на границу во внутренней точке ребра типа λ до встречи с одной из вершин графа $\gamma(f)$.

Допустим, что мы вышли в точку a', внутреннюю для ребра l типа λ. При этом луч $L(a)$ трансверсален к l. Над $L(a)$ к моменту подхода к иточке a' на $\Gamma(h)$ шел над $L(a)$ некоторый отрезок t, вдоль которого касательный конус $C(t)$ к $N(h)$ имел вид двугранного угла (выпуклостью вниз) с углом $< \pi$. У точки a' в P^2 найдется малая окрестность в виде открытого полукруга U (с центром a') с присоединенным к U диаметром $\bar{U} \cap l$. За счет малости U мы вправе считать, что над U график $\Gamma(f)$ плоский. Вблизи от a' от надграфика $N(C(t)\big|_U)$ можно отсечь плоскостью часть, проекция которой лежит в U. При этом одновременно произойдет отсечение от надграфика $N(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$ некоторой горбушки Q. Усеченную функцию обозначим $h_1 : \operatorname{int} P^2 \to \mathbb{R}$. Поскольку в U функция f линейна, то после соответствующего усечения надграфика $N(g\big|_{\operatorname{int} P^2})$, мы получим представление $f = g_1 - h_1$, что противоречит минимальности исходного разложения $f = g - h$.

Рассмотрения пункта 6.5 доказываю следующую лемму.

6.6. Лемма. *Экстремальные точки надграфиков* $N(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$, $N(g\big|_{\operatorname{int} P^2})$ *могут лежать только над вершинами графа* $\gamma(f)$ *и над теми внутренними точками ребер типов* μ *и* ν, *в которых эти ребра трансверсально пересекают отрезки, соединяющие пары вершин графа* $\gamma(f)$, *ранее не соединенные ребрами.*

При этом, если в графе $\gamma(f)$ *не было ребра* ab, *соединяющего вершины* a *и* b *графа* $\gamma(f)$, *то над точками пересечения отрезка* ab *с ребрами типа* μ *могут возникать экспонированные точки только у* $N(h)$, *а над точками пересечения* ab *с ребрами типа* ν – *только у* $N(g)$. *В интервалах же между возникшими над* ab *экспонированными точками и концами* ab *над* ab *идут отрезки на графиках* $\Gamma(h)$ *и* $\Gamma(g)$.

Эта лемма доказывает конечность числа экспонированных точек и указывает места их возможного расположения для надграфиков $N(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$ и $N(g\big|_{\operatorname{int} P^2})$.

6.7. Теорема[1)]. *Для кусочно-линейной функции* $f : P^2 \to \mathbb{R}$ *у фигурирующих в ее минимальном разложении* $f = g - h$ *функций* g *и* h *их сужения* $g\big|_{\operatorname{int} P^2}$, $h\big|_{\operatorname{int} P^2}$ *являются кусочно-линейными функциями. При этом их графики* $\Gamma(g\big|_{\operatorname{int} P^2})$, $\Gamma(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$ *являются гомеоморфными кругу выпуклыми многогранными поверхностями с исключенным внешним краем. Эти графики имеют вершины только над некоторыми из точек, указанных в лемме 6.6, а края этих графиков суть пространственные ломаные, вершины которых могут лежать только над некоторыми из вершин графа* $\Gamma(f)$, *лежащих на границе* ∂P^2 *выпуклого многоугольника* P^2.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для функции h, тогда оно верно и для функции $g = h + f$. Функция h есть предел выпуклых функций $\bar r_i \leqslant 0$, возникавших в ходе процесса 3.1. Рассмотрим усеченные сверху надграфики функции $\bar r_i$

$$N_i := \{(a, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, a \in P^2,\ \bar r_i(a) \leqslant z \leqslant 1\}.$$

Множества N_i – выпуклые компакты, они сходятся к выпуклому компакту N и их поверхности ∂N_i сходятся к поверхности ∂N.

[1)] Эта теорема заменяет теорему 2 заметки [5].

Последняя может быть разделена на три части: открытое верхнее донышко $\{(a,1) \,\big|\, a \in \operatorname{int} P^2\}$; замкнутая цилиндрическая часть, расположенная над ∂P^2; открытое нижнее донышко, которое и есть $\Gamma(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$.

На P^2 кроме функции h рассмотрим еще функцию h_0, которая по определению совпадает с h на $\operatorname{int} P^2$, а на ∂P^2 графиком h_0 служит нижний край замкнутой цилиндрической части поверхности ∂N. При этом

$$h_0\big|_{\partial p^2} \leqslant h\big|_{\partial P^2} \leqslant 0,$$

а функция h_0, в отличие от h, обязатиельно непрерывна на всем P^2.

Мы утверждаем, во-первых, что у выпуклого тела N лишь конечное число экспонированных точек (из этого уже следует, что N многогранник, а функция $h\big|_{\operatorname{int} P^2}$ кусочно-линейна) и, вовторых, что эти экспонированные точки расположены так, что верна Теорема 6.7.

У тела N экспонированными точками служат углы верхнего донышка $(a_j, 1)$, где a_j – вершина многоугольника P^2, экспонированные точки на открытом нижнем донышке – это экспонированные точки надграфика $N(h\big|_{\operatorname{int} P^2})$, о конечности их числа и их возможном расположении шла речь в лемме 6.6, и, наконец, экспонированные точки тела N, попавшие ни нижний край цилиндрической части поверхности ∂N. Мы утверждаем, что эти точки могут лежать только над вершинами графа $\gamma(f)$, лежащими на ∂P^2.

Допустим противное. Пусть точка $A = (a, h_0(a)) \in \exp N$, $a \operatorname{int} l$, где l – одна из сторон многоугольника P^2, и a не является вершиной графа $\gamma(f)$. Проведем через отрезок l опорную к телу N плоскость H. Пересечение $F = N \cap H$ будет расположенной “над” l выпуклой фигурой, Рис. 8, в виде криволинейной трапеции с нижним краем $\Gamma(h_0\big|_l)$. На Рис. 8 жирными точками отмечены вершины $\gamma(f)$, лежащие на l, а крестиком отмечена не совпавшая ни с одной из них точка a.
Кроме того пунктиром обозначена ломаная $\Gamma(h\big|_l)$, лежащая не ниже чем $\Gamma(h_0\big|_l)$. Точка A будет экстремальной и для фигуры F. Проведем в плоскости этой фигуры опорную к F прямую t, для которой $F \cap t = A$. Точка A не может принадлежать $\Gamma(h\big|_l)$. Прямую t можно столь незначительно перенести параллельно вверх

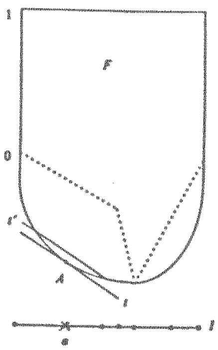


Рис. 8.

в положение t', что хорда $F \cap t'$ останется ниже $\Gamma(h\big|_l)$, а проекция этой хорды на l (эта проекция содержит точку a) уместится внутри одного из открытых интервалов между лежащими на l вершинами $\gamma(f)$. Нам останется провести через прямую t' плоскость так, чтобы она отсекла от надграфика $N(h\big|_{\mathrm{int}\,P^2})$ горбушку Q, которая будет лежать над ячейкой $d \subset P^2$, в пределах которой функция f линейна. И мы (как и в предшествовавших построениях) получим новое разложение $f = g_1 - h_1$, противоречащее минимальности исходного разложения $f = g - h$. Теорема 6.7 доказана.

6.8. В условиях теоремы 6.7 функция f имеет кроме минимального разложения $f = g - h$ (где g и h могут быть разрывны на границе ∂P^2) еще разложение $f = g_0 - h_0$, в котором g_0 и h_0 непрерывны на всем P^2, причем второе разложение минимально для функции $f\big|_{\mathrm{int}\,P^2}$. Эти разложения всегда совпадают на $\mathrm{int}\,P^2$, но могут быть различными на ∂P^2, хотя графики и тех и других над ∂P^2 суть пространственные ломаные с вершинами над некоторыми (возможно разными) из числа вершин $\gamma(f)$, лежащих на ∂P^2. При этом графики $\Gamma(g\big|_{\partial P^2})$ и $\Gamma(h\big|_{\partial P^2})$ легко находятся (см. лемму 6.1), тогда как нахождение графиков $\Gamma(g_0\big|_{\partial P^2})$ и $\Gamma(h_0\big|_{\partial P^2})$ несравненно сложнее. Поэтому полезны следующие два утверждения.

6.9. Лемма. *Если a – угловая точка многоугольника P^2 и в составе графа $\gamma(f)$ к точке a не подходило ни одно ребро типа μ, то*

$h_0(a) = h(a) = 0$.

Доказательство. В такой точке, согласно 2.3, значение $h(a) = 0$. Допустим, что $h_0(a) < 0$. Тогда в $\mathbb{R}^3$ через точку (a, z), где $z = h_0(a)/2$ можно провести плоскость, которая отсечет от части надграфика $N(h)$, лежащей над $\operatorname{int} P^2$, небольшую горбушку. Ее проекция на P^2 либо плоская (треугольная), либо – разделена на треугольники ребрами типа ν. Над каждым таким треугольником функция f линейна, и от надграфика $N(g)$ можно отсечь соответствующие этим треугольникам части. При этом (из-за типа ν) выпуклость усеченной функции g_1 сохранится, и мы получим представление $f = g_1 - h_1$, противоречащее минимальности разложения $f = g - h$.

6.10. Лемма. *Если a – вершина графа $\gamma(f)$, лежащая внутри стороны l многоугольника P^2, к a не подходит ни одно ребро типа μ, и если над a лежит угловая точка графика $\Gamma(h_0\big|_l)$, то в этой точке $h_0(a) = h(a)$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству леммы 6.9, только в предположении $h_0(a) < h(a)$ отсекающая плоскость проводится через точку (a, z), где $z = (h_0(a) + h(a))/2$.

§7. Конечный алгоритм для нахождения минимального разложения кусочно-линейной функции двух переменных

7.1. Пусть дана кусочно-линейная функция $f : P^2 \to \mathbb{R}$. Алгоритм начинается с нахождения по правилам 4.6 функций $h\big|_l$ и $g\big|_l$ для каждой стороны l многоугольника P^2. Все дальнейшее посвящено поиску функции h_0.

7.2. По правилам леммы 6.6 находим *конечное* множество точек в P^2, над которыми (кроме граничных вершин графа $\gamma(f)$) потенциально могут располагаться вершины многогранного графика выпуклой кусочно-линейной функции h_0.

Конечность числа этих точек позволяет перечислить *конечное* число допускаемых к рассмотрению потенциально возможных графов $\gamma(h_0)$. При этом леммы 6.9 и 6.10 и знание, что над каждым ребром типа μ графа $\gamma(f)$ обязательно лежит одно ребро или цепочка ребер графа $\gamma(h_0)$, может сократить число потенциально возможных типов графа $\gamma(h_0)$. Этому могут также способствовать соображения симметрии: если она была в задании f, то по характеру процесса 3.1 она сохранится и у функций h и g.

7.3. Далее каждый потенциально возможный граф $\gamma(h_0)$ предстоит рассматривать отдельно. Но некоторые из этих графов, не исключающие категорически друг друга, можно объединить: включить в $\gamma(h_0)$ все их ребра, но в дальнейшем над теми ребрами, которые не расположены над ребрами типа μ графа $\gamma(f)$, не требовать обязательно *строгой* выпуклости надграфика $N(h_0)$. Алгоритм сам исключит "лишние" ребра $\gamma(h_0)$.

7.4. Итак пусть фиксирован допущенный к рассмотрению граф $\gamma(h_0)$; a_i – его вершины, z_i – искомые значения $h_0(a_i)$. Для некоторых из $a_i \in \partial P^2$ значения z_i в силу лемм 6.9 и 6.10 могут оказаться сразу найденными. Остальные z_i остаются искомыми неизвестными.

7.5. *Первая серия линейных неравенств* состоит в том, что для каждого $a_i \in \partial P^2$

$$z_i \leqslant h(a_i)$$

где $h(a_i)$ найдены в начале алгоритма, а для остальных a_j

$$z_j \leqslant 0.$$

7.6. Если среди ячеек, на которые $\gamma(h_0)$ делит многоугольник P^2, есть не треугольные, то дополним наш граф $\gamma(h_0)$ *условными* ребрами, проведя в такой ячейке диагонали из одной вершины в остальные. Это позволяет считать все ячейки треугольными.

7.7. *Вторая серия линейных неравенств* состоит в записи требования выпуклости надграфика $N(h_0)$ над каждым неграничным ребром $a_i a_j$ дополненного графа $\gamma(h_0)$. Поясним составление этих неравенств. Пусть по ребру $a_i a_j$ соприкасаются две треугольные ячейки $a_i a_j a_m$ и $a_i a_j a_n$. Координаты (x_k, y_k) каждой из точек a_k $(k = i, j, m, n)$ известны. Значения z_k в этих точках либо уже численно известны, либо являются искомыми неизвестными.

Для графика $\Gamma(h_0)$ плоскость, проходящая через точки (a_i, z_i), (a_j, z_j), (a_m, z_m) Рис. 9 будет иметь уравнение

$$\begin{vmatrix} X - x_i & Y - y_i & Z - z_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ x_m - x_i & y_m - y_i & z_m - z_i \end{vmatrix} = 0$$

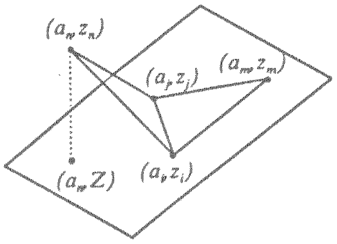


Рис. 9.

Поэтому, лежащая в этой плоскости над a_n точка (a_n, Z) графика будет иметь координату Z, которая находится из уравнения

$$\begin{vmatrix} x_n - x_i & y_n - y_i & Z - z_i \\ x_j - x_i & y_j - y_i & z_j - z_i \\ x_m - x_i & y_m - y_i & z_m - z_i \end{vmatrix} = 0,$$

и требование строгой выпуклости $N(h_0)$ над ребром $a_i a_j$ сводится к неравенству

$$Z < z_n;$$

требование нестрогой выпуклости (если мы сомневаемся, включать ли это ребро в исходно рассматриваемый граф $\gamma(h_0)$) – к неравенству

$$Z \leqslant z_n;$$

наконец, если $a_i a_j$ было условным ребром дополненного графа $\gamma(h_0)$, то к равенству

$$Z = z_n.$$

7.8. *Третья серия линейных неравенств* состоит в записи строгой выпуклости надграфика $N(g_0)$ над ребрами графа $\gamma(g_0)$, идущими по ребрам типа ν графа $\gamma(f)$, и нестрогой выпуклости над остальными неграничными ребрами графа $\gamma(g_0)$. Сам граф $\gamma(g_0)$ находится по $\gamma(h_0)$ и $\gamma(f)$ с учетом леммы 6.6 и того, что $g_0 = h_0 + f$. При этом значении $f(b_i)$ для всех вершин b_i графа $\gamma(g_0)$ известны, а значения $h_0(b_i)$ есть либо z_j (если $b_i = a_j$), либо – известная линейная комбинация $\alpha z_j + \beta z_k$, если вершина b_i лежит на отрезке $a_j a_k$.

При этих данных о всех $g_0(b_i)$ третья серия линейных неравенств составляется по тем же правилам, что и в пункте 7.7. Только на этот раз неравенства пишутся для всех неграничных ребер $b_i b_j$ графа $\gamma(g_0)$. Для вводимых условных ребер пишутся равенства. Все три серии суть линейные неравенства и линейные равенства, связывающие искомые z_i.

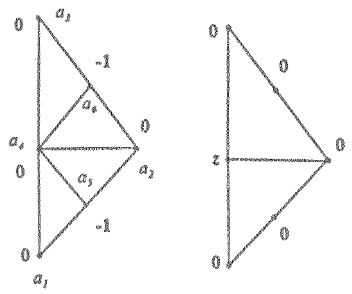
7.9. Наконец, ставится *задача линейного программирования* о $\mathrm{Max}\sum\limits_i z_i$ при соблюдении всех трех серий линейных неравенств и равенств. При этом, если использовались строгие неравенства, то они временно заменяются на нестрогие.

Если у задачи решения нет, или оно не единственно, или там, где хотелось иметь строгое неравенство в решении оно обратилось в равенство, то рассматриваемый вариант графа $\gamma(h_0)$ отвергается.

7.10. При пересмотре всех допустимых графов $\gamma(h_0)$ обязательно найдется тот, при котором решение существует, единственно, и при котором *каждое* z_i максимально.

Перейдем к примерам.

7.11. Обратимся к примеру 5.5. Здесь роль P^2 играет треугольник $T = a_1a_2a_3$, функцию f задает Рис. 8-а, координаты точек $a_1(0,-2)$, $a_2(2,0)$, $a_3(0,2)$, $a_4(0,0)$, $a_5(1,-1)$, $a_6(1,1)$.



10-а. Задание f. 10-б. Возможный $\gamma(h_0)$. Возможный $\gamma(g_0)$.

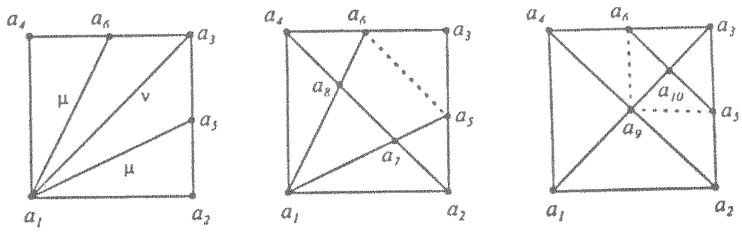
На каждой стороне l треугольника T по 4.6 функция $h\big|_l \equiv 0$. Поэтому по лемме 6.9 $h_0(a_1) = h(a_1) = 0$, $h_0(a_3) = h(a_3) = 0$. По лемме 6.10 $h_0(a_5) = h(a_5) = 0$, $h_0(a_6) = h(a_6) = 0$. Ввиду выпуклости h_0 над ребром a_2a_3 будет $h_0(a_2) \geqslant 0$. Но $h_0(a_2) \leqslant h(a_2) = 0$, поэтому $h_0(a_2) = 0$. И единственно возможным для h_0 является граф $\gamma(h_0)$ Рис. 10-б. Неизвестно только значение $z = h_0(a_4)$.

При $\gamma(h_0)$ вида Рис. 10-б из $g_0 = h_0 + f$ заключаем, что граф $\gamma(g_0)$ имеет вид Рис. 10-в (с возможным исчезновением ребра a_2a_4). Первая серия неравенств ($h_0 \leqslant 0$) сводится к $z \leqslant 0$. Вторая серия: выпуклость для графа 10-б над ребром a_2a_4 – к тому же неравенству $z \leqslant 0$.

Третья серия неравенств: выпуклость для графа 10-в, строгая над ребрами a_4a_5 и a_4a_6 – к $z < -1$, и нестрогая над ребром a_4a_2 – к $z \leqslant -2$. При этих условиях $\max z = -2$, и мы пришли к тому же решению, к которому вел бесконечный процесс 3.1 в 5.5.

7.12. Применим алгоритм §7 к примеру 5.3. Функцию $f : P^2 \to \mathbb{R}$, где P^2 – квадрат с вершинами $a_1(0,0)$, $a_2(4,0)$, $a_3(4,4)$, $a_4(0,4)$, задает Рис. 11-а, где $a_5(4,2)$, $a_6(2,4)$, а значения функции

$$f_1(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = f(a_4) = 0, \quad f(a_5) = f(a_6) = 1.$$



11-а. Граф $\gamma(f)$ 11-б. Допустимый $\gamma(h_0)$ 11-в. Допустимый $\gamma(g_0)$.

Значения $h\big|_{\partial P^2}$, найденные по правилам 4.6,

$$h(a_1) = h(a_2) = h(a_3) = h(a_4) = 0, \quad h(a_5) = h(a_6) = -1.$$

По лемме 6.9 имеем

$$h_0(a_1) = h_0(a_3) = h_0(a_4) = 0.$$

Обсудим возможные типы графа $\gamma(h_0)$. Над a_1a_5 и a_1a_6 у надграфика $N(h_0)$ обязательно есть ребра (или цепочка ребер). Если бы у $N(h_0)$ было ребро или цепочка ребер над a_2a_6, то такие же ребра были над a_1a_5. Но тогда у $N(h_0)$ была бы вершина над внутренней точкой ребра a_1a_3 типа ν графа $\gamma(f)$, что исключено леммой 6.4. Не может у $N(h_0)$ быть ребер и над a_1a_3. Такое ребро по лемме 6.4 шло бы одно от a_1 до a_3, но подойти к точке a_3 оно не может, так как $h_0(a_3) = 0$.

Поэтому допустимым является только граф $\gamma(h_0)$ вида Рис. 11-б, при котором строгая выпуклость у $N(h_0)$ обязательна только над a_1a_5 и a_1a_6. Значения h_0 в точках a_1, a_3, a_4 уже известны. Учитывая симметрию, введем обозначения $h_0(a_1) = z_1$, $h_0(a_5) = h_0(a_6) = z_2$, $h_0(a_7) = h_0(a_8) = z_3$. Нам предстоит найти z_1, z_2, z_3 из задачи линейного программирования.

Первая серия линейных неравенств

$$z_1 \leqslant 0, \quad z_2 \leqslant -1, \quad z_3 \leqslant 0.$$

Вторую серию линейных неравенств составят записи строгой выпуклости $N(h_0)$ над a_1a_7, a_7a_5 и нестрогой выпуклости над a_5a_6, a_2a_7, a_7a_8. (С учетом симметрии запись строгой выпуклости над a_1a_8, a_8a_6 и нестрогой над a_8a_4 не может дать новых неравенств.) Четырехугольную ячейку $a_7a_5a_6a_8$ будем считать разбитой на две треугольные условным ребром a_7a_6.

Строгая выпуклость над a_1a_7 и над a_7a_5 записывается неравенством

$$z_3 < 0;$$

нестрогая выпуклость над a_5a_6 – неравенством

$$2z_2 - z_3 \leqslant 0;$$

нестрогая выпуклость над a_2a_7 и над a_7a_8 –

$$3z_3 - z_1 - 2z_2 \leqslant 0.$$

Распрямление графика $\Gamma(h_0)$ над условным ребром a_7a_6 автоматически выполняется ввиду $h_0(a_7) = h_0(a_8)$ и $h_0(a_5) = h_0(a_6)$.

Прежде чем перейти к третьей серии линейных неравенств, выражающих требования выпуклости надграфика $N(g_0)$ функции $g_0 = h_0 + f$, отметим, что согласно лемме 6.6 графу 11-б функции h_0 соответствует граф $\gamma(g_0)$, Рис. 11-в. При этом

$$g_0(a_1) = z_1, \quad g_0(a_2) = g_0(a_3) = g_0(a_4) = 0$$

$$g_0(a_5) = g_0(a_6) = z_2 + 1, \quad g_0(a_9) = z_3, \quad g_0(a_{10}) = z_2.$$

Вводимые условные ребра a_9a_5 и a_9a_6.

Третья серия линейных неравенств. Строгая выпуклость $N(g_0)$ над a_1a_9, a_9a_{10}, $a_{10}a_3$ выполняется автоматически, поскольку вдоль a_1a_3 к плоским участкам графика $\Gamma(h_0)$ добавлялся выпуклый участок графика $\Gamma(f)$. Нестрогая выпуклость $N(g_0)$ над a_5a_{10} и $a_{10}a_6$ записывается неравенством

$$2z_2 - z_3 \leqslant 0;$$

нестрогая выпуклость над a_2a_9 и a_9a_4 – неравенством

$$2z_3 - 2z_2 - z_1 - 2 \leqslant 0.$$

Распрямление над условными ребрами a_9a_5, a_9a_6 требует соблюдения равенства

$$z_3 = z_1 - 2. \qquad (*)$$

Последнее равенство позволяет исключить z_3, и мы получаем систему неравенств

$$z_1 \leqslant 0, \quad z_2 \leqslant -1, \quad 2z_2 - z_1 \leqslant -2, \quad z_1 - 2z_2 \leqslant 2.$$

Из двух последних следует $z_1 - 2z_2 = 2$, т.е.

$$z_1 = 2z_2 + 2, \qquad (**)$$

что позволяет исключить и z_1, и система сводится к одному неравенству

$$z_2 \leqslant 1,$$

при котором остается найти $\max z_2 = 1$. В силу $(*)$ и $(**)$ при этом достигают своих максимумов и z_1, z_3.

Задача решена: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$, $z_3 = -2$. При этих значениях в графе $\gamma(h_0)$ исчезает ребро a_5a_6, и мы приходим для h и g к тем же заданиям, Рис. 4-а, к которым в примере 5.3 сходился процесс 3.1.

§8. Дискретно заданные функции

8.1. Пусть функция f задана дискретно, то есть только на конечном множестве точек $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, r$. Назовем такую функцию *выпуклой*, если все точки $(a_i, f(a_i))$ лежат на границе их выпуклой оболочки, притом на той ее стороне, которая обращена в сторону отрицательного направления $(n+1)$-ой оси координат.

Из ранее доказанного следует, что каждая дискретно заданная функция $f : \{a_i\} \to \mathbb{R}$ может быть представлена как разность выпуклых функций g и h, заданных на том же множестве $\{a_i\}$. При этом существует минимальное разложение $f = g - h$ с $h \leqslant 0$.

8.2. *Процесс, описанный в §3, и на этот раз сходится к минимальному разложению $f = g - h$. Только функции $f_n \to g$, $r_n \to h$ задаются на дискретном множестве точек $\{a_i\}$, а функции $\bar{f}_n$, $\bar{r}_n$ на всей выпуклой оболочке* $\operatorname{conv}\{a_i\}$ *этих точек.*

8.3. Сформулируем, ради простоты для $n = 2$, задачу линейного программирования, позволяющую найти такое минимальное разложение в конечное число шагов.

Для заданных точек $a_i \in \mathbb{R}^2$ существует конечное число ситуаций, когда одна точка a_j лежит в выпуклой оболочке точек a_k, a_l, a_m. Снабдим номерами $\xi = 1, \dots, N$ эти ситуации; номера точек j, k, l, m зависят от номера ξ. И пусть $\lambda_\xi, \mu_\xi, \nu_\xi$ – барицентрические координаты точки a_j в треугольнике $a_k a_l a_m$.

Обозначим $h(a_i) = z_i$. Для нахождения функции h достаточно решить следующую задачу линейного программирования

$$\sum z_i = \max, \quad z_i \leqslant 0 \quad (i = 1, \dots, r),$$

$$\begin{gathered} z_j \leqslant \lambda_\xi z_k + \mu_\xi z_l + \nu_\xi z_m, \\ f(a_j) + z_j \leqslant \lambda_\xi (f(a_k) + z_k) + \mu_\xi (f(a_l) + z_l) + \nu_\xi (f(a_m) + z_m), \\ \xi = 1, \dots, N. \end{gathered}$$

8.4. Условия последней задачи линейного программирования сложнее условий задачи пункта 7.9 по той причине, что даже при скромном числе r точек конечное число ограничительных неравенств $2N + r$ может быть очень большим.

Однако И. В. Романовский предложил алгоритм решения этой задачи, основанный на методе последовательных улучшений, в котором на базе двойственной задачи последовательно генерируются именно те ограничения, которые пока не удовлетворены. Надеюсь, что он опубликует свой алгоритм, программы и примеры.

§9. Вопросы

9.1. Повторим пока не решенную часть вопроса 4.4: обязательно ли при $n \geqslant 3$ для кусочно-линейной функции $f : P^n \to \mathbb{R}$ в ее минимальном разложении $f = g - h$ функции g и h кусочно линейны над $\operatorname{int} P^n$?

9.2. Нельзя ли найти достаточные признаки минимальности предъявляемого разложения $f = g - h$ для кусочно-линейной и для дискретно заданной функции f двух переменных?

9.3. В случае, когда областью дискретного задания являются узлы прямоугольной решетки $a_{ij} = (i\Delta_1, j\Delta_2)$, $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Нельзя ли упростить алгоритм решения задачи §8?

9.4. Пусть все функции f_i, f допускают описанные минимальные разложения $f_i = g_i - h_i$, $f = g - h$, и пусть $f_i \to f$. Какие дополнительные требования к функциям f_i обеспечат также сходимость $g_i \to g$, $h_i \to h$?

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. А. Д. Александров, *О поверхностях, представимых разностью выпуклых.* — Изв. АН Казахской ССР, сер. мат. и мех. No. 60, вып. 3 (1949), 3–20.
2. А. Д. Александров, *Поверхности, представимые разностью выпуклых.* — Докл. Акад. Наук СССР **62, No. 4** (1950), 613–616.
3. И. Я. Бакельман, *Геометрические методы решения эллиптических уравнений.* М, Наука, 1965.
4. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Достаточные признаки выпуклости.* — Зап. Научн. Семин. ЛОМИ **45** (1974), 3–52.
5. В. А. Залгаллер, *О представлении функции переменных разностью выпуклых функций.* — Вестн. Ленингр. ун-та No. 1 (1963), 44–45.

Zalgaller V. A. A representation of functions of several variables as the difference of convex functions.

If a function $f : D^n \to \mathbb{R}$, where D^n is a convex compact set in $\mathbb{R}^n$, admits a decomposition $f = g - h$ with convex g, h where h is upper bounded, then there exists such a decomposition which is in some sense "minimal". A recurrent procedure converging to that decomposition is given. For piecewise linear functions f, finite algorithms of those decompositions for $n = 1, 2$ are given. A number of examples clarifying some unexpected effects is represented. Problems are formulated.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 24 февраля 1997 г.