С. Е. Козлов

ГЕОМЕТРИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ГРАССМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ. ЧАСТИ I, II

Часть I. Евклидова геометрия внешней алгебры и плюккерова модель вещественного грассманова многообразия

Введение

Задание евклидова скалярного произведения в вещественном линейном пространстве V естественным образом индуцирует евклидову структуру во внешней алгебре $\Lambda(V)$, построенной над этим пространством. Настоящая часть работы посвящена изучению исходных вопросов евклидовой геометрии пространства $\Lambda(V)$. При этом некоторые чисто алгебраические факты получают наглядное геометрическое освещение. Кроме того, при естественных требованиях ортогональности ряд изучаемых объектов приобретает свойство единственности.

Известное вложение вещественного грассманова многообразия $G^{+}_{p,n}$ во внешнюю алгебру $\Lambda(V)$ позволяет применить аппарат теории многомерных поверхностей для изучения внутренней геометрии – римановой структуры на многообразии $G^{+}_{p,n}$. В геометрии калибровок, да и в чисто алгебраических проблемах внешней алгебры, важную роль играет также внешняя геометрия плюккеровой модели грассманова многообразия.

Часть I и II этой работы можно рассматривать, как разработку и удобную для применения формулировку алгебраического аппарата, используемого в дальнейшем для изучения внутренней и внешней геометрии вещественных грассмоновых многообразий.

§1. Евклидова структура на внешней алгебре

1.1. Рассмотрим вещественное векторное пространство V, $\dim V = n$. Известным способом (см., например [1], XV) над ним строится 2^n-мерное вещественное векторное пространство $\Lambda(V)$, которое одновременно является алгеброй по отношению к операции внешнего произведения $\wedge$.

$$\begin{gathered}\Lambda(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \Lambda_i(V),\\ \Lambda_0(V) = R,\ \Lambda_1(V) = V,\ \Lambda_i(V) = 0 \text{ при } i > n.\end{gathered} \tag{1}$$

Элементы $\Lambda_p(V)$ называются *p-векторами.*

$$\Lambda_p \wedge \Lambda_q \subset \Lambda_{p+q}.$$

Если $\{e_i\}_{i=1}^n$ – базис пространства V, то набор

$$\begin{gathered}e_\lambda = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},\ \lambda = (i_1, \ldots, i_p) \in \Lambda(n,p) =\\ = \{(i_1, \ldots, i_p) : 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n\}\end{gathered}$$

является базисом $\binom{n}{p}$-мерного линейного пространства $\Lambda_p(V) \subset \Lambda(V)$. Всякий p-вектор $\omega \in \Lambda_p(V)$ можно разложить по этому базису

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(n,p)} \omega^\lambda e_\lambda. \tag{2}$$

Определение. p-вектор $\omega \in \Lambda_p(V)$ называется *простым (разложимым)*, если его можно представить в виде $e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$, $e_i \in V$.

1.2. Скалярное произведение в $\Lambda(V)$. Покажем, как введение скалярного произведения в пространстве V канонически индуцирует скалярные произведения в каждом из пространств p-векторов $\Lambda_p(V)$. Полагая, по определению, что в прямой сумме (1) слагаемые ортогональны, мы получим скалярное произведение во всей внешней алгебре $\Lambda(V)$. Все скалярные произведения в пространствах $\Lambda_p(V)$, $p \geqslant 0$, $\Lambda(V)$ и ассоциированные с ними нормы мы будем обозначать едиными символами $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $|\cdot|$.

Пусть $\{e_i\}$ – ортонормированный базис пространства V.

Определение. *Скалярным произведением* p-векторов ω, $\tilde\omega$ (см. (2)) называется число

$$\langle \omega, \tilde\omega \rangle := \sum_\lambda \omega_\lambda \tilde\omega_\lambda. \tag{3}$$

Обычные свойства скалярного произведения легко проверяются. По определению

$$|\omega| = \langle \omega, \omega \rangle^{1/2}.$$

Из дальнейшего будет следовать, что введенное скалярное произведение не зависит от выбора базиса $\{e_i\}$. Впрочем, это легко проверить и непосредственным вычислением.

1.3. Дадим геометрическую интерпретацию скалярного произведения простых p-векторов.

Через $X = \{x_i, \ldots, x_p\}$ обозначим набор из p линейно независимых векторов пространства $\mathbb{R}^n$. Множество наборов X известным способом наделяется структурой гладкого многообразия, которое называется многообразием p-реперов. Фиксируем в $\mathbb{R}^n$ ортонормированный базис $\{e_i\}$. Тогда возникает биективное соответствие между p-реперами и $p \times n$ матрицами максимального ранга

$$X \longleftrightarrow (x_i^\alpha),\ x_i = x_i^\alpha e_\alpha,\ 1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant n.$$

При наличии фиксированного базиса $\{e_i\}$, под X иногда будем понимать матрицу $p \times n$ ранга p.

Рассмотрим отображение

$$i(X) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p,$$

сопоставляющее каждому p-реперу простой p-вектор из $\Lambda_p(V)$.

Пусть $\xi = i(X)$, $\eta = i(Y)$. Тогда ([1], XV,3)

$$\langle \xi, \eta \rangle = \det(\langle x_i, y_j \rangle) = \det(XY^T). \tag{4}$$

В формуле (4) в качестве η возьмем e_λ, $\lambda = (i_1, \ldots, i_p) \in \Lambda(n,p)$. Из (2) и (4) следует

$$\xi^\lambda = \langle \xi, e_\lambda \rangle = \Delta(X, \lambda),$$

где $\Delta(X, \lambda)$ – минор матрицы X, соответствующий набору λ.

Эта формула связывает коэффициенты ξ^λ в разложении (2) для простого p-вектора $\xi = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p$ с набором сомножителей x_i.

Пусть $X = Y$. Тогда в (4)

$$|\xi|^2 = \det(\langle x_i, x_j \rangle).$$

Известно, что это определитель Грамма. Он равен квадрату p-мерного объема V_p параллелепипеда $[X]$, натянутого на набор X. Откуда

$$|\xi| = V_p([X]). \tag{5}$$

1.4. Через $V_p(Y|X)$ обозначим p-мерный объем ортогональной проекции параллелепипеда $[Y]$ на $\operatorname{Lin} X$.

Утверждение. *Имеет место формула* (см. [3])

$$\langle \xi, \eta \rangle = |\xi|(\pm V_p(Y|X)). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_p$; $N_1, \ldots, N_{n-p}$ – ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$ и $\operatorname{Lin} X = \operatorname{Lin}(e_1, \ldots, e_p)$. Всякий вектор y_i можно разложить в сумму $y_i = y_i' + m_i$, где $y_i' \in \operatorname{Lin} X$, а $m_i \in \operatorname{Lin}(\{N_j\})$. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \xi, \eta \rangle &= \pm|\xi|\langle e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, (y_1' + m_1) \wedge \ldots \wedge (y_p' + m) \rangle = \\ &= \pm|\xi|\langle e_1 \wedge \ldots \wedge e_p, y_1' \wedge \ldots \wedge y_p' \rangle = \pm|\xi| V(Y|X). \ \square \end{aligned}$$

Плюс (минус) ставится в зависимости от совпадения (несовпадения) ориентаций X и Y'.

Формула (6) обобщает известную формулу аналитической геометрии

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \text{Пр.}(\bar{b} \text{ на } \bar{a}).$$

Из формул (5), (6) следует независимость введенного скалярного произведения от выбора базиса $\{e_i\}$.

1.5. Опишем более формальный способ введения скалярного произведения во внешней алгебре $\Lambda(R^n)$. При помощи скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$ строится метрический изоморфизм $g : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$ по правилу

$$g : x \mapsto \langle \cdot, x \rangle. \tag{7}$$

Тогда для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\langle x, y \rangle = g(x)(y) = g(y)(x). \tag{8}$$

Этот изоморфизм однозначно распространяется до автоморфизма внешних алгебр $\Lambda(\mathbb{R}^n) \to \Lambda((\mathbb{R}^n)^*)$ (см. ([4, 5]), который будем обозначать той же буквой g. Пространства $(\Lambda(\mathbb{R}^n))^*$ и $(\Lambda((\mathbb{R}^n)^*)$ отождествляются при помощи канонического изоморфизма (см. [6], 2.7). Тогда для любых элементов $a, b \in \Lambda(\mathbb{R}^n)$ их скалярное произведение можно вычислить по формуле

$$\langle a, b \rangle = g(a)(b) = g(b)(a). \tag{9}$$

Легко показать, что два, описанных выше, способа введения скалярного произведения во внешней алгебре $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны.

§2. Операция внутреннего умножения

В §1 мы ввели скалярные произведения в пространствах $\Lambda_p(V)$. Операция внутреннего умножения в этом частном случае совпадает со скалярным произведением.

2.1. Определение. Билинейное отображение

$$\llcorner\colon \Lambda_p(V)\times\Lambda_q(V)\to\Lambda_{p-q}(V),\quad p\geqslant q\geqslant 0,\tag{1}$$
$$(\omega,\xi)\mapsto\omega\llcorner\xi,$$

называется операцией *внутреннего умножения*, если для любых $\omega\in\Lambda_p(V)$, $\xi\in\Lambda_q(V)$, $\varphi\in\Lambda_{p-q}(V)$ справедливо равенство

$$\langle\omega\llcorner\xi,\varphi\rangle=\langle\omega,\xi\wedge\varphi\rangle.\tag{2}$$

2.2. Утверждение. *Отображение* (1) *со свойством* (2) *существует и единственно.*

Доказательство. 1) Пусть такая операция существует. Рассмотрим базис e_λ $\lambda\in\Lambda(n,p-q)$ пространства $\Lambda_{p-q}(V)$. Тогда

$$\omega\llcorner\xi=\sum_\lambda\langle\xi\wedge e_\lambda,\omega\rangle e_\lambda,\tag{3}$$

откуда следует единственность.

2) Определим отображение (1) равенством (3). Очевидно, так определенное отображение, билинейно. Так как правая и левая части равенства линейны по каждому из аргументов ω,ξ,φ, то равенство (2) достаточно проверить на базисных поливекторах e_μ,e_r,e_λ, соответствующих пространств. Подставим (3) в (2). Тогда

$$\langle\langle e_r\wedge e_\lambda,e_\mu\rangle e_\lambda,e_\lambda\rangle=\langle e_r\wedge e_\lambda,e_\mu\rangle.\ \square$$

2.3. При $p=q$ имеем $\langle\omega\llcorner\xi,\varphi\rangle=\varphi(\omega\llcorner\xi)$, $\langle\xi\wedge\varphi,\omega\rangle=\varphi\langle\xi,\omega\rangle$, поэтому

$$p=q\Longrightarrow\omega\llcorner\xi=\langle\omega,\xi\rangle.$$

2.4. Чтобы дать удобное для вычислений выражение внутреннего произведения базисных поливекторов, введем некоторые обозначения. Пусть $\lambda=(i_1,\dots,i_p)\in\Lambda(n,p)$. Положим

$$\operatorname{im}\lambda=\bigcup_{k=1}^{p}\{i_k\}\subset[1,n].\tag{5}$$

Если для некоторых мультииндексов $\lambda \in \Lambda(n,p)$, $\mu \in \Lambda(n,q)$

$$\operatorname{im}\lambda \cap \operatorname{im}\mu = \varnothing,$$

то

$$\operatorname{sgn}(\lambda,\mu) = (-1)^{\operatorname{inv}(\lambda,\mu)}, \tag{6}$$

где через $\operatorname{inv}(\lambda,\mu)$ обозначено количество инверсий, необходимых для упорядочения по возрастанию множества (λ,μ). Легко видеть, что для базисных поливекторов справедлива формула

$$e_\mu \llcorner e_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{im}\lambda \not\subset \operatorname{im}\mu, \\ \operatorname{sgn}(\lambda,\nu)e_\nu, & \text{если } \operatorname{im}\mu = \operatorname{im}\lambda \cup \operatorname{im}\nu,\ \nu \in \Lambda(n,p-q). \end{cases} \tag{7}$$

Например, $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3)\llcorner(e_2 \wedge e_4) = 0$, $(e_1 \wedge e_2 \wedge e_5)\llcorner(e_1 \wedge e_5) = -e_2$. В последнем равенстве

$$\operatorname{im}\nu = \{2\},\ \operatorname{sgn}(\lambda,\nu) = \operatorname{sgn}\{1,5,2\} = -1.$$

2.5. Утверждение. *Для $\omega \in \Lambda_r(V)$, $\xi \in \Lambda_p(V)$, $\eta \in \Lambda_q(V)$ при $p+q \leqslant r$ справедлива формула*

$$(\omega\llcorner\xi)\llcorner\eta = \omega\llcorner(\xi \wedge \eta). \tag{8}$$

Доказательство. Обе части равентсва (8) принадлежат пространству $\Lambda_{r-p-q}(V)$. Для $\varphi \in \Lambda_{r-p-q}(V)$ имеем

$$\langle(\omega\llcorner\xi)\llcorner\eta, \varphi\rangle = \langle\eta \wedge \varphi, \omega\llcorner\xi\rangle =$$
$$\langle(\xi \wedge \eta) \wedge \varphi, \omega\rangle = \langle\omega\llcorner(\xi \wedge \eta), \varphi\rangle. \ \square$$

§3 Ранговые пространства поливекторов

3.1. Над каждым подпространством $W \subset V$ можно построить внешнюю алгебру $\Lambda(W)$. Эта алгебра естественно вкладывается в $\Lambda(V)$ как подалгебра

$$\Lambda(W) \subset \Lambda(V).$$

Фиксируем p-вектор $\omega \in \Lambda_p(V)$. Построим для поливектора ω минимальное подпространство W, такое что $\omega \in \Lambda_p(W)$.

3.2. Определение. *Ранговым пространством* p-вектора $\omega \in \Lambda_p(V)$ $(p \geqslant 1)$ называется подпространство

$$V_\omega = \omega\llcorner\Lambda_{p-1}(V) = \{e \in V | e = \omega\llcorner v, v \in \Lambda_{p-1}(V)\} \subset V. \tag{1}$$

В силу билинейности операции внутреннего умножения подмножество V_ω действительно является подпространством пространства V. Следующая теорема говорит о минимальности построенного V_ω.

3.3. Теорема. *Пусть* $\omega \in \Lambda_p(V)$, $p \geqslant 1$. *Тогда*

1) $\omega \in \Lambda_p(V_\omega)$.

2) *Если* $\omega \in \Lambda_p(W)$ *для некоторого подпространства* $W \subset V$, *то* $V_\omega \subset W$.

Доказательство. 1) Пусть $\{e_i\}_{i=1}^r$, $\{n_\alpha\}_{\alpha=1}^s$ – ортонормированные базисы V_ω и $V_\omega^\perp$. По базису $\{e_i, n_\alpha\}$ построим соответствующий ортонормированный базис пространства $\Lambda_p(V)$ и разложим по нему поливектор ω. В этом разложении рассмотрим слагаемое, содержащее в качестве сомножителя n_{α_0}. Его можно представить в виде $a\tau \wedge n_{\alpha_0}$, где $a \in R$, $\Lambda_{p-1}(V) \ni \tau$ – простой $(p-1)$-вектор. Тогда

$$\omega \llcorner \tau = \pm a n_{\alpha_0} + \sum_{i=1}^{r} a^i e_i + \sum_{a \neq \alpha_0} b^\alpha n_\alpha.$$

Вектор $(\omega \llcorner \tau) \in \operatorname{Lin}\{e_i\}$, поэтому $a = 0$.

2) Заметим, что для любого базиса $\{e_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda(n, p-1)$ пространства $\Lambda_{p-1}(V)$

$$V_\omega = \omega \llcorner \Lambda_{p-1}(V) = \operatorname{Lin}\left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,p-1)} (\omega \llcorner e_\lambda) \right\}.$$

Выберем такой базис $\{e_i\}$ пространства V, что набор $\{e_i\}_{i=1}^m$ образует базис подпространства W. Тогда

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,p)} \omega^\lambda e_\lambda, \ V_\omega = \operatorname{Lin}\left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,p-1)} (\omega \llcorner e_\lambda) \right\} =$$

$$= \operatorname{Lin}\left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda(m,p-1)} (\omega \llcorner e_\lambda) \right\} = W_\omega \subset W. \ \square$$

Ясно, что если $\Lambda_p(V) \ni \omega \neq 0$, то $\dim V_\omega \geqslant p$.

3.4. Утверждение. *Пусть $\omega \in \Lambda_p(V)$. Тогда*

$$\omega \neq 0,\ \omega\text{-}\textit{простой} \iff \dim V_\omega = p.$$

Доказательство. 1) Пусть $\omega = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_p$, $a \neq 0$. Тогда

$$V_\omega = \operatorname{Lin}\left\{ \bigcup_{\lambda \in \Lambda(n,p-1)} (\omega \llcorner e_\lambda) \right\} = \operatorname{Lin}\{e_1, \ldots, e_p\}.$$

2) Пусть $\dim V_\omega = p$. Так как $\omega \in \Lambda_p(V_\omega)$, то ω простой. □

3.5. Следствие. *Каждой ориентированной p-плоскости взаимно однозначно соответствует простой единичный p-вектор.*

3.6. Утверждение. *Для двух простых ненулевых поливекторов $\xi \in \Lambda_p(V)$, $\eta \in \Lambda_q(V)$ справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} &1) \quad V_\xi \cap V_\eta \neq 0 \iff \xi \wedge \eta = 0 \\ &2) \quad V_\xi \cap V_\eta = 0 \iff V_{\xi\wedge\eta} = V_\xi \oplus V_\eta. \end{aligned} \tag{2}$$

(Ср. с [6], 6.13).

Доказательство. Пункт 1) слева направо очевиден. Если $\xi \wedge \eta = 0$, то по лемме Картана набор сомножителей, входящих в ξ и η, линейно зависим. Отсюда следует утверждение первого пункта. Из 3.1, 3.4 следует

$$\dim(V_\xi \oplus V_\eta) = \dim V_\xi + \dim V_\eta - \dim(V_\xi \cap V_\eta) = p + q - \dim(V_\xi \cap V_\eta). \tag{3}$$

$$V_{\xi\wedge\eta} \subset (V_\xi \oplus V_\eta). \tag{4}$$

Пусть $V_\xi \cap V_\eta = 0$. Из п. 1) следует, что $\xi\wedge\eta \neq 0$. В силу 3.4 и (3) $\dim V_{\xi\wedge\eta} = \dim(V_\xi \oplus V_\eta) = p + q$. Из (4) следует, что $V_{\xi\wedge\eta} = V_\xi \oplus V_\eta$.

Пусть $V_{\xi\wedge\eta} = V_\xi \oplus V_\eta$. Тогда $\xi\wedge\eta \neq 0$ и по пункту один $V_\xi \cap V_\eta = 0$. □

3.7. Определение. *Аннулятором* p-вектора $\omega \in \Lambda_p(V)$ называется множество

$$\operatorname{Ann}\omega = \{e \in V | \omega \wedge e = 0\}. \tag{5}$$

Очевидно, $\operatorname{Ann}\omega$ является подпространством в V и для простых поливекторов ω подпространства $\operatorname{Ann}\omega$ и V_ω совпадают.

Лемма. *Для отличного от нуля p-вектора $\omega \in \Lambda_p(V)$ имеет место включение*

$$\operatorname{Ann}\omega \subset V_\omega. \tag{6}$$

Доказательство. Допустим, что включение (6) нарушено. Тогда найдется ненулевой вектор $e \in \operatorname{Ann}\omega \setminus V_\omega$. Так как $e \notin V_\omega$, то $\omega \wedge e \neq 0$, что противоречит выбору вектора e. $\square$

3.8. Теорема. *Пусть аннулятор некоторого ненулевого p-вектора ω отличен от нуля. Выберем один из двух простых единичных q-векторов ω_0 ($q = \dim(\operatorname{Ann}\omega)$) таких, что $V_{\omega_0} = \operatorname{Ann}\omega$. Тогда существует единственный поливектор $\tilde{\omega} \in \Lambda_{p-q}(V^{\perp}_{\omega_0})$, обладающий свойствами*

$$\omega = \omega_0 \wedge \tilde{\omega}, \quad \operatorname{Ann}\tilde{\omega} = 0. \tag{7}$$

Здесь через $V^{\perp}_{\omega_0}$ обозначено ортогональное дополнение пространства V_{ω_0} в пространстве V_ω.

Доказательство. Пусть вектор $e \in \operatorname{Ann}\omega$, $e \neq 0$. Введем такой ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1}^{m}$ m-мерного пространства V_ω, что $e = \lambda e_m$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Поливектор ω можно представить в виде

$$\omega = \sum_{\lambda \in \Lambda(m,p)} \omega^\lambda e_\lambda = e_m \wedge \omega_1 + \sum_{\mathrm{im}\,\mu \not\ni m} \omega^\mu e_\mu, \ \omega_1 \in \Lambda_{p-1}(e^\perp). \tag{8}$$

Из (8) следует

$$0 = \omega \wedge e = \sum_{\mathrm{im}\,\mu \not\ni m} \omega^\mu (e_\mu \wedge e).$$

Так как поливекторы $e_\mu \wedge e$ линейно независимы, то второе слагаемое в (8) обращается в ноль, и для ω получается разложение

$$\omega = \left(\frac{1}{\lambda} e\right) \wedge \omega_1, \tag{9}$$

где $\omega_1 \in \Lambda_{p-1}(e^\perp)$. Если $\operatorname{Ann}\omega_1 = 0$, то остановимся на разложении (9). В противном случае продолжим процесс выделения множителей, описанных выше, но уже для поливектора ω_1 и т.д. В результате мы получим разложение (7). Ясно, что $V_{\omega_0} = \operatorname{Ann}\omega_0 \subset \operatorname{Ann}\omega$. Пусть вектор $e \in \operatorname{Ann}\omega$, $e \neq 0$. Представим вектор e в виде $e = e^\top + e^\top$, где $e^\perp \in V_{\omega_0}$, $e^\perp \in V^\perp_{\omega_0}$. Тогда справедливы равенства $0 = \omega \wedge e = \omega_0 \wedge (\tilde{\omega} \wedge e^\perp)$. Отсюда следует, что

$\tilde{\omega} \wedge e^{\perp} = 0$. Так как $\operatorname{Ann} \tilde{\omega} = 0$, то $e^{\perp} = 0$. Тем самым $V_{\omega_0} = \operatorname{Ann} \omega$, и существование разложения (7) доказано.

Предположим, что существует два поливектора $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}'$, удовлетворяющие требуемым свойствам. Тогда $\omega_0 \wedge (\tilde{\omega} - \tilde{\omega}') = 0$. В силу того, что простой поливектор $\omega_0 \neq 0$ и пространство V_{ω_0} ортогонально пространству $V_{\tilde{\omega}-\tilde{\omega}'}$, поливектор $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}'$ обращается в ноль. $\square$

3.9. Выделим две формулы, полученные в процессе доказательства Теоремы 3.8. Во-первых,

$$\operatorname{Ann} \omega = \operatorname{Ann} \omega_0. \tag{10}$$

Из формул (6), (7) следует

$$V_\omega \subset V_{\omega_0} \oplus V_{\tilde{\omega}} \subset V_{\omega_0} \oplus V_{\omega_0}^{\perp} = V_\omega.$$

Значит ранговое пространство V_ω разлагается в ортогональную сумму

$$V_\omega = \operatorname{Ann} \omega \oplus V_{\tilde{\omega}}. \tag{11}$$

3.10. Дадим теперь геометрическую интерпретацию операции внутреннего умножения. Следующая формула (12) обобщает равенство (6) из 1.4.

Рассмотрим два простых поливектора $\xi \in \Lambda_p(V)$, $\eta \in \Lambda_q(V)$, $p \geqslant q$:

$$\xi = x_1 \wedge \ldots \wedge x_p, \quad \eta = y_1 \wedge \ldots \wedge y_q.$$

Напомним, что через $[X]$ мы обозначили параллелепипед, натянутый на набор $\{x_i\}$, а через $V_q(Y|X)$ – q-мерный объем проекции параллелепипеда $[Y]$ на p-плоскость $\operatorname{Lin}\{x_i\} = V_\xi$.

Теорема. *Для определенных выше объектов имеет место равенство*

$$|\xi \llcorner \eta| = |\xi| V_q(Y|X) = V_p([X]) \cdot V_q(Y|X). \tag{12}$$

(см. [3]).

Доказательство. Обозначим ортогональное проектирование на плоскость V_x значком $\top$, а на $V_x^{\perp}$ – значком $\perp$. Если $V_\eta \cap V_\xi^{\perp} \neq 0$, то $\xi \llcorner \eta = 0$ и $V(Y|X) = 0$. Пусть $V_\eta \cap V_\xi^{\perp} = 0$. Тогда операция $\top$

проектирования V_η на V_ξ инъективна. Построим набор ортонормированных базисов: $\{e_i\}_{i=1}^q$ – базис $V_\eta^\top$, $\{f_i\}_{i=1}^{p-q}$ – базис $V_\eta^\perp \cap V_\xi$, $\{N_i\}_{i=1}^s$ – базис $V_\xi^\perp$. Поливекторы ξ и η можно представить в виде

$$\xi = \pm|\xi|(f_1 \wedge \ldots \wedge f_{p-q}) \wedge (e_1 \wedge \ldots e_q),$$

$$\eta = \bigwedge_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_i^{i_k} e_{i_k} + \sum_m \mu_i^{i_m} N_{i_m} \right).$$

Отсюда

$$\xi \llcorner \eta = \xi \llcorner \bigwedge_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_i^{i_k} e_{i_k} \right) = |\xi| b f_1 \wedge \ldots \wedge f_{p-q},$$

где $b = \pm \det \|\lambda_i^j\| = \pm V_q(Y|X)$. $\square$

§4. Оператор Ходжа

4.1. В пространстве $\Lambda_n(V)$ есть ровно два единичных элемента. Зафиксируем один из них и обозначим его через E. Такой выбор эквивалентен введению ориентации в пространстве V.

Определение. Линейный оператор

$$* : \Lambda_p(V) \to \Lambda_{n-p}(V), \; *\omega = E \llcorner \omega \tag{1}$$

называется *оператором Ходжа*.

4.2. Утверждение. *Оператор Ходжа ортогонален, то есть сохраняет скалярное произведение*

$$\langle \omega, \tilde\omega \rangle = \langle *\omega, *\tilde\omega \rangle. \tag{2}$$

Доказательство. Так как в пространстве $\Lambda_p(V)$ существует ортонормированный базис из простых поливекторов, то достаточно проверить равенство (2) на элементах этого базиса. Пусть $\omega = e_1 \wedge \ldots e_p$, $E = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$. Тогда, если $\langle \omega, \tilde\omega \rangle = 0$, то $\tilde\omega = \sum\limits_{\lambda \neq (1,\ldots,p)} \tilde\omega^\lambda e_\lambda$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle *\omega, *\tilde\omega \rangle = E\omega, E \llcorner \tilde\omega \rangle = \langle \tilde\omega \wedge (E \llcorner \omega), E \rangle = \\ = \langle \tilde\omega \wedge (e_{p+1} \wedge \ldots \wedge e_n), E \rangle = 0. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\langle *\omega, *\omega \rangle = \langle E \llcorner \omega, E \llcorner \omega \rangle = |e_{p+1} \wedge \ldots \wedge e_n|^2 = 1. \ \square$$

Заметим, что оператор Ходжа переводит простые поливекторы в простые.

4.3. Утверждение. *Пусть поливектор ω простой, тогда*

$$V_{*\omega} = V_\omega^\perp. \tag{3}$$

Доказательство. Используем обозначения, введенные в предыдущем утверждении,

$$V_{*\omega} = (e_{p+1} \wedge \ldots \wedge e_n) \llcorner \Lambda_{n-p-1}(V) = \mathrm{Lin}\,\{e_{p+1}, \ldots, e_n\} = V_\omega^\perp. \ \square$$

Легко видеть, что

$$** = (-1)^{p(n-p)} \mathrm{id}\,, \tag{4}$$

поэтому оператор Ходжа является изоморфизмом.

§5. Аналитическое описание конуса простых p-векторов

5.1. Из предыдущего видно, что простые поливекторы играют особую роль во внешней алгебре. Очевидно, в каждом пространстве $\Lambda_p(V)$ множество простых p-векторов образует конус. Мы будем обозначать его через K_p.

5.2. Теорема (Критерий Картана). *Для того, чтобы поливектор $\omega \in \Lambda_p(V)$ принадлежал конусу простых p-векторов K_p, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\omega \wedge (\omega \llcorner \xi) = 0 \tag{1}$$

для любого $(p-1)$-вектора $\xi \in \Lambda_{p-1}(V)$.

Доказательство. Пусть $\omega \in K_p$. Тогда для любого вектора $v \in V_\omega$, в частности для $\omega \llcorner \xi, \omega \wedge v = 0$.

Пусть равенство (1) выполнено для всех $\xi \in \Lambda_{p-1}(V)$. Тогда для любого $v \in V_\omega$ верно $\omega \wedge v = 0$. В пространстве V введем такой ортонормированный базис $\{e_i\}$, что $e_i \in V_\omega$ при $1 \leqslant i \leqslant q$, где $q \geqslant p$. Имеем

$$0 = e_i \wedge \omega = e_i \wedge \sum_\lambda \omega^\lambda e_\lambda = \sum_\lambda \omega^\lambda (e_i \wedge e_\lambda).$$

Значит для любого $\lambda \in \Lambda(n,p)$ такого, что $\operatorname{im}\lambda \not\ni i$ будет $\omega^\lambda = 0$, поэтому $q = p$ и $\omega = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_p \in K_p$. $\square$

Координатное представление условия (1) можно найти в [7].

Из этой теоремы непосредственно следуют

Утверждение 1.

$$\omega \notin K_p \Longrightarrow \text{ \textit{существует} } e \in V_\omega : \omega \wedge e \neq 0. \tag{2}$$

Утверждение 2. *Если для некоторого ненулевого* $g \in V$ *верно* $\omega \llcorner g = 0$, *то* $g \notin V_\omega$.

Доказательство. Пусть $f \in V_\omega$ и $f \neq 0$. Тогда для некоторого $\xi \in \Lambda_{p-1}(V)$, $f = \omega \llcorner \xi$ и

$$\begin{aligned}\langle \omega \llcorner f, \xi \rangle = \langle \omega, f \wedge \xi \rangle = (-1)^{p-1} \langle \omega, \xi \wedge f \rangle = \\ = (-1)^{p-1} \langle \omega \llcorner \xi, f \rangle = (-1)^{p-1} |f|^2 \neq 0. \ \square\end{aligned}$$

Сформулируем еще один критерий простоты p-вектора ω.

5.3. Теорема. *Для того, чтобы поливектор* $\omega \in \Lambda_p(V)$ *был простым, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$\omega \llcorner (\Phi \llcorner \omega) = 0 \tag{3}$$

для любого поливектора $\Phi \in \Lambda_{p+1}(V)$.

Доказательство. Пусть $\omega = ae_1 \wedge \ldots \wedge e_p$. Тогда $\Phi \llcorner \omega = \sum\limits_{\alpha > p} \lambda^\alpha e_\alpha$ и $\omega \llcorner \left(\sum\limits_{\alpha > p} \lambda^\alpha e_\alpha \right) = 0$. Значит все элементы конуса K_p удовлетворяют условию (3).

Допустим, что (3) выполнено для $\omega \in \Lambda_p(V)$ и $\omega \notin K_p$. Из (2) следует, что для некоторого $e \in V_\omega$ существует $(p+1)$-вектор $\Phi = \omega \wedge e \neq 0$. Так как $\Phi \in \Lambda_{p+1}(V_\omega)$, то и $g = \Phi \llcorner \omega \in V_\omega$. Заметим, что

$$\langle g, e \rangle = \langle (\omega \wedge e) \llcorner \omega, e \rangle = \langle \omega \wedge e, \omega \wedge e \rangle = |\Phi|^2 \neq 0.$$

Значит $g \neq 0$. Из (3) следует, что $\omega \llcorner g = 0$, что противоречит утверждению 2. Тем самым, $\omega \in K_p$. $\square$

Так как $\dim \Lambda_n(V) = 1$, то из доказательства теоремы следует

$$\Lambda_{n-1}(V) = K_{n-1}, \tag{4}$$

т.е. все $(n-1)$-векторы простые.

§6. Три модели вещественных грассмановых многообразий $G^+_{p,n}$

6.1. Грассманово многообразие $G^+_{p,n}$. Обозначим $G^+_{p,n}$ множество p-мерных ориентированных подпространств вектороного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Напомним классическую конструкцию гладкого атласа, превращающего это множество в гладкое $p(n-p)$-мерное многообразие. С каждой (для краткости не повторяем слов p-мерной) плоскостью $V_0 \in G^+_{p,n}$ связывают окрестность $U(V_0)$, состоящую из плоскостей, однозначно ортогонально проектирующихся на плоскость V_0. Выберем какие-либо ортонормированные базисы $\{e_i\}_1^p$ и $\{n_\alpha\}_1^q$, $n = p + q$ пространств V_0 и $V_0^\perp$, соответственно. Каждый вектор e_i можно рассматривать как ортогональную проекцию вектора $e_i(V) \in V$, $V \in U(V_0)$ на плоскость V_0. Этим однозначно определены вектора $N_i \in V_0^\perp$ такие, что

$$e_i(V) = e_i + N_i.$$

Очевидно набор векторов $\{e_i(V)\}_1^p$ линейно независим и определяет некоторую ориентацию плоскости V.

Разложим вектор N_i по базису $\{n_\alpha\}$

$$N_i = a_i^\alpha n_\alpha, \quad a = (a_i^\alpha) \in \mathbb{R}^{pq}. \tag{1}$$

Элементы $p \times q$ матрицы a можно рассматривать как локальные координаты плоскости V в окрестности $U(V_0)$. Аналитическая согласованность карт $U(V_0)$ для разных $V_0 \in G^+_{p,n}$ легко проверяется.

6.2. Плюккерова модель грассманова многообразия $G^+_{p,n}$. Опишем каноническое гладкое вложение многообразия $G^+_{p,n}$ во внешнюю алгебру $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, точнее в $\binom{n}{p}$-мерное евклидово подпространство $\Lambda_p(\mathbb{R}^n)$ этой алгебры. Каждой ориентированной p-плоскости $V \in G^+_{p,n}$ взаимно однозначно соответствует простой единичный p-вектор $P(V) = \omega \in \Lambda_p$ (см. Следствие 3.5). Тем самым, возникает отображение

$$P : G^+_{p,n} \to \Lambda_p. \tag{2}$$

Теорема 1. *Отображение* (2) *является гладким (аналитическим) вложением.*

Доказательство. Достаточно доказать гладкость и регулярность отображения P в произвольной точке $V_0 \in G^+_{p,n}$. Воспользуемся локальными координатами (1), введенными в 6.1. Положим

$$\widetilde{\omega}(V) = (e_1 + N_1) \wedge \ldots \wedge (e_p + N_p), \quad \omega(V) = \widetilde{\omega}(V)/|\widetilde{\omega}(V)|. \tag{3}$$

Тогда $P(V) = \omega(V)$, откуда следует гладкость отображения P.

Плоскость V имеет координаты $\{a^\alpha_i\}$, поэтому из (1), (3) следует

$$\begin{aligned}\eta_{i\alpha} := \frac{\partial \omega}{\partial a^\alpha_i}\Big|_{V=V_0} = \left(\frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial a^\alpha_i}/|\widetilde{\omega}|\right)_{a=0} + \left(\frac{\left\langle \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial a^\alpha_i}, \widetilde{\omega}\right\rangle}{|\widetilde{\omega}|}\right)_{a=0} = \\ = \frac{\partial \widetilde{\omega}}{\partial a^\alpha_i}\Big|_{a=0} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_{i-1} \wedge n_\alpha \wedge e_{i+1} \wedge \ldots \wedge e_p.\end{aligned} \tag{4}$$

Набор векторов $\{\eta_{i\alpha}\} \in \Lambda_p$, $i \in [1,p]$, $\alpha \in [1,q]$ ортонормирован, следовательно, отображение P регулярно. $\square$

Из доказанного непосредственно следует

Теорема 2. 1) *Множество $P(G^+_{p,n})$ является pq-мерным подмногообразием евклидова пространства Λ_p, которое можно представить в виде*

$$P(G^+_{p,n}) = K_p \cap S^{\binom{n}{p}-1}, \tag{5}$$

где K_p – конус простых p-векторов, а $S^{\binom{n}{p}-1}$ – единичная сфера евклидова пространства Λ_p с центром в начале.

2) *Пусть $\omega \in P(G^+_{p,n})$, $\{e_i\}^p_{i=1}$ и $\{n_\alpha\}^q_{\alpha=1}$ – ортонормированные базисы в V_ω и $V^\perp_\omega$ соответственно. Тогда набор векторов $\{\eta_{i\alpha}\}$ (см. (4)) является ортонормированным базисом касательного пространства $T_\omega P(G^+_{p,n})$.*

Подмногообразие $P(G^+_{p,n}) \subset \Lambda_p$ называется *плюккеровой моделью* грассманова многообразия $G^+_{p,n}$, а отображение P – *плюккеровым вложением*.

Теорема 3. *Многообразие $P(G^+_{p,n})$ является алгебраическим подмногообразием евклидова пространства Λ_p.*

Доказательство. Рассмотрим ортонормированный базис $\{e_i\}$ пространства R^n и соответствующие ему базисы e_λ, $\lambda \in \Lambda(n,p)$ и

e_μ, $\mu \in \Lambda(n, p-1)$ пространств Λ_p и Λ_{p-1} соответственно. Напомним критерий 5.2 простоты p-вектора ω

$$\omega \in K_p \Longleftrightarrow \omega \wedge (\omega \llcorner \xi) \quad \forall \xi \in \Lambda_{p-1}.$$

Операции внутреннего и внешнего умножения билинейны, поэтому достаточно потребовать выполнения нашего критерия не для всех $(p-1)$-векторов ξ, а только для элементов базиса e_μ. Кроме того, эти операции алгебраически выражаются через координаты поливекторов ω и ξ в базисах e_λ, e_μ (см. доказательство 5.2). Теперь наше утверждение следует из (5). $\square$

Другое доказательство этой теоремы можно найти в [6].

6.3. Грассмановы многообразия $G^+_{p,n}$ как однородные пространства. Определим действие группы $SO(n)$ на внешней алгебре Λ. Так как любой элемент $g \in SO(n)$ является изоморфизмом пространства $\mathbb{R}^n$, то он однозначно распространяется до автоморфизма внешней алгебры Λ (см. [5]), который мы будем обозначать той же буквой g. Поэтому, если $\omega = a_1 \wedge \ldots \wedge a_p$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, то

$$g(\omega) = g(a_1) \wedge \ldots \wedge g(a_p). \tag{6}$$

Следовательно, простые поливекторы при автоморфизме g переходят в простые. Отсюда, в частности, получаем, что действие группы $SO(n)$ на внешней алгебре Λ не транзитивно. Из формул (6) и (4) п.1 следует, что изоморфизмы

$$g : \Lambda_p \to \Lambda_p \text{ и } g : \Lambda \to \Lambda \tag{7}$$

являются собственными изометриями соответствующих евклидовых пространств, поэтому группа $SO(n)$ действует на каждом многообразии $P(G^+_{p,n})$ при $p \in [0, n]$. Покажем, что при $p \in [1, n-1]$ это действие транзитивно. Заметим, что при $p = 0, n$ наши многообразия – двоеточия. Пусть $\omega, \widetilde{\omega} \in P(G^+_{p,n})$, $\omega = e_1 \wedge \ldots \wedge e_p$, $\widetilde{\omega} = \widetilde{e}_1 \wedge \ldots \wedge \widetilde{e}_p$, где $\{e_i\}$ и $\{\widetilde{e}_i\}$ ортонормированные базисы пространств V_ω и $V_{\widetilde{\omega}}$ соответственно. Дополним эти базисы наборами $\{n_\alpha\}_1^q$, $\{\widetilde{n}_\alpha\}_1^q$ до ортонормированных одинаково ориентированных базисов всего пространства $\mathbb{R}^n$. Определяя движение $g \in SO(n)$ равенствами $g(e_i) = \widetilde{e}_i$, $g(n_\alpha) = \widetilde{n}_\alpha$, получаем $g(\omega) = \widetilde{\omega}$. Ясно, что подгруппа изотропии H_ω элемента $\omega \in P(G^+_{p,n})$ изоморфна группе $SO(p) \times SO(q)$.

Группа $SO(n)$ естественным образом транзитивно действует на грассмановом многообразии $G^+_{p,n}$, при этом для любого движения $g \in SO(n)$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G^+_{p,n} & \xrightarrow{P} & P(G^+_{p,n}) \\ {\scriptstyle g}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ G^+_{p,n} & \xrightarrow{P} & P(G^+_{p,n}) \end{array} \tag{8}$$

коммутативна. Эта диаграмма позволяет отождествить многообразия $G^+_{p,n}$ и $P(G^+_{p,n})$, имея ввиду их $SO(n)$-однородную структуру. Фиксируя элемент $V \in G^+_{p,n}$, мы стандартным способом (см., напр., [8], 30.2) получим изоморфизм этих однородных пространств с однородным пространством

$$SO(n)/SO(p) \times SO(q). \tag{9}$$

6.4. Инвариантные метрики на грассмановых многообразиях. В предыдущих пунктах описаны три изоморфные модели однородного грассманова многообразия: $G^+_{p,n}$, $P(G^+_{p,n})$ и многообразие (9). Возникает естественный вопрос о существовании и единственности римановых метрик на таком многообразии, для которых группа $SO(n)$ действует изометриями. Заметим, что многообразие $P(G^+_{p,n})$ является подмногообразием евклидова пространства Λ_p, и поэтому обладает внутренней римановой метрикой, которую мы будем далее называть *стандартной*. При этом действие группы $SO(n)$ на многообразии $P(G^+_{p,n})$ осуществляется движениями объемлющего пространства Λ_p (см. [11]). Значит риманова метрика, индуцированная на $G^+_{p,n}$ плюккеровым вложением, $SO(n)$-инвариантна. В работах [7, 9] доказана единственность (с точностью до постоянного множителя) $SO(n)$-инвариантной римановой метрики на $G^+_{p,n}$ для всех (p,n), кроме $(p,n) = (2,4)$. В [9] приведена явная локальная формула для двухпараметрического семейства таких метрик при $(p,n) = (2,4)$. Многообразие $G^+_{2,4}$ диффеоморфно $S^2 \times S^2$ (см. [7]), и любая метрика, задаваемая как риманово произведение сфер произвольных радиусов R_1 и R_2, является $SO(4)$-инвариантной [10]. Заметим, что по теореме Хаара все меры, индуцированные $SO(4)$-инвариантными метриками, пропорциональны. Оказывается (см. [10]), что при нормировке объема многообразия $G^+_{2,4}$ стандартная метрика обладает наименьшим диаметром.

6.5. В геометрии калибровок (см. обзор [11]) особый интерес представляет вопрос о строении множеств контакта многообразия (5) с опорными к $P(G^+_{p,n})$ гиперплоскостями пространства Λ_p. Ответ на этот вопрос зависит от знания внешней геометрии плюккерова подмногообразия $P(G^+_{p,n})$.

Часть II. Бивекторы

§7. Уравнение конуса простых бивекторов

7.1. Пусть $\dim V = 4$ и $\omega \in \Lambda_2(V)$. Тогда

$$\omega = \sum_\lambda \omega^\lambda e_\lambda = e_1 \wedge (\omega^{12} e_2 + \omega^{13} e_3 + \omega^{14} e_4) + \widetilde{\omega},$$

где $\widetilde{\omega} \in \Lambda_2(W)$, $W = e_1^\perp$. В силу (4) из 5.3, бивектор $\widetilde{\omega}$ прост, поэтому

$$\omega = e_1 \wedge f + g \wedge h; \quad f, g, h \in W = e_1^\perp. \tag{1}$$

7.2. Теорема. *Пусть* $\dim V = 4$ *и* $\omega \in \Lambda_2(V)$. *Тогда бивектор* $\omega \in K_2$ *тогда и только тогда, когда*

$$\omega \wedge \omega = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость условия (2) очевидна. Пусть (2) выполнено для некоторого бивектора $\omega \in \Lambda_2(V)$. Из (1) следует $\omega \wedge \omega = 2e_1 \wedge f \wedge g \wedge h = 0$, поэтому векторы f, g, h линейно зависимы. Если $f = 0$, либо g и h линейно зависимы, то ω прост. В противном случае $g \wedge h = d \wedge f$, $d \in W$. Тогда $\omega = (e_1 + d) \wedge f \in K_2$. $\square$

Заметим, что для $\omega \in \Lambda_2(V)$ справедливо

$$\langle *\omega, \omega \rangle = \langle E \llcorner \omega, \omega \rangle = \langle E, \omega \wedge \omega \rangle = \pm |\omega \wedge \omega|.$$

Следовательно, уравнение (2) можно переписать в эквивалентной форме

$$\langle *\omega, \omega \rangle = 0, \tag{3}$$

§8. Специальные разложения пространства $\Lambda_2(V^4)$ и его элементов

8.1. В §4 было показано, что оператор Ходжа $*$ ортогонален. Сужение оператора $*$ на $\Lambda_2(V^4)$ также будем обозначать $*$. В силу (4) из 4.3, $** = \mathrm{id}$, поэтому для $\omega, \tau \in \Lambda_2(V^4)$

$$\langle \omega, *\tau \rangle = \langle *\omega, **\tau \rangle = \langle *\omega, \tau \rangle,$$

то есть оператор $*$ самосопряжен. Значит его собственные числа равны ± 1. Если бивектор ω простой, то $\langle *\omega, \omega \rangle = 0$, поэтому $\mathrm{tr}\, * = 0$, и собственные подпространства Λ^+ и Λ^- оператора $*$, соответствующие собственным числам ± 1, имеют одинаковую размерность $\binom{4}{2}/2 = 3$. Таким образом

$$\Lambda_2(V^4) = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-, \ \omega = \omega^+ + \omega^-, \ *\omega^+ = \omega^+, \ *\omega^- = -\omega^-. \qquad (1)$$

В силу самосопряженности оператора $*$ пространства Λ^+ и Λ^- ортогональны.

Из (1) и (3) п. 7.2 следует

$$\omega \in K_2 \Longleftrightarrow |\omega^+| = |\omega^-|. \qquad (2)$$

8.2. Теорема. *Пусть бивектор $\omega \in \Lambda_2(V^4)$. Тогда существуют такие $\tau \in K_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, что $|\tau| = 1$ и*

$$\omega = \alpha_1 \tau + \alpha_2 * \tau. \qquad (3)$$

Доказательство. 1) Рассмотрим случай, когда $\omega \notin \Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Для таких бивекторов $\omega^+, \omega^- \neq 0$. Положим $\tau_0 = \omega^+/|\omega^+| + \omega^-/|\omega^-|$ и вычислим коэффициенты α_1^0 и α_2^0, определяемые условием

$$\omega = \alpha_1^0 \tau_0 + \alpha_2^0 * \tau_0 = \alpha_1^0 \left(\frac{\omega^+}{|\omega^+|} + \frac{\omega^-}{|\omega^-|} \right) + \alpha_2^0 \left(\frac{\omega^+}{|\omega^+|} - \frac{\omega^-}{|\omega^-|} \right). \qquad (4)$$

Из (4) видно, что решение системы

$$\alpha_1^0 + \alpha_2^0 = |\omega^+|, \quad \alpha_1^0 - \alpha_2^0 = |\omega^-|$$

дает требуемые коэффициенты. Из (2) следует, что $\tau_0 \in K_2$. Равенство (3) получается из (4) подстановкой $\tau_0 = |\tau_0|\tau$, $\alpha_i^0 = \alpha_i/|\tau_0|$.

2) Пусть теперь $\omega \in \Lambda^+$. В этом случае достаточно повторить рассуждение 1), заменив ω^- на произвольный элемент $e \in \Lambda^-$. Вариант $\omega \in \Lambda^-$ рассматривается аналогично. □

8.3. Следствие. *Для любого бивектора $\omega \in \Lambda_2(V^4)$ найдется такой ортонормированный базис $\{e_i\}$ пространства V^4, что*

$$\omega = \alpha_1 e_1 \wedge e_2 + \alpha_2 e_3 \wedge e_4. \tag{5}$$

Так как для $\tau \in K_2$, $V_\tau^\perp = V_{*\tau}$, то (5) следует из (3).

8.4. Для бивектора $\omega \notin K_2$ рассмотрим множество разложений

$$\omega = \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2, \quad |\tau_1| = |\tau_2| = 1, \quad \tau_1, \tau_2 \in K_2. \tag{6}$$

По соображениям компактности существует разложение, реализующее $\inf|\alpha_1\alpha_2| = a > 0$.

Теорема. *Пусть разложение* (6) *реализует* $\inf|\alpha_1\alpha_2|$. *Тогда*

$$\tau_2 = \pm * \tau_1. \tag{7}$$

Тем самым

$$V_{\tau_1}^\perp = V_{\tau_2}. \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим произведение

$$\langle\omega, *\omega\rangle = \langle\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2, \alpha_1 * \tau_1 + \alpha_2 * \tau_2\rangle = \alpha_1\alpha_2\langle\tau_1, *\tau_2\rangle + \\ + \alpha_1\alpha_2\langle\tau_2, *\tau_1\rangle = 2\alpha_1\alpha_2\langle\tau_1, *\tau_2\rangle.$$

Отсюда

$$|\alpha_1\alpha_2| = \frac{|\langle\omega, *\omega\rangle|}{2|\langle\tau_1, *\tau_2\rangle|} \geqslant \frac{|\langle\omega, *\omega\rangle|}{2},$$

причем равенство достигается только тогда, когда выполнено (7). В силу (3) такие разложения всегда существуют. □

§9. Ортогональные разложения бивекторов

9.1. В этом параграфе мы будем рассматривать бивекторы над пространством V произвольной размерности. Каждый элемент $\omega \in \Lambda_2(V)$ можно представить в виде суммы простых бивекторов с минимальным числом слагаемых. Если $\omega \in K_2$, то в этой сумме будет одно слагаемое, в противном случае, больше чем одно. По соображениям компактности существует представление с минимальным количеством слагаемых, которое реализует инфимум произведения модулей этих слагаемых.

9.2. Теорема (см. [12]). *Пусть $\omega \notin K_2$ и пусть бивектор ω представлен в виде суммы $N(\omega)$ простых слагаемых*

$$\omega = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \tau_i, \quad \alpha_1 \in \mathbb{R}, \quad \tau_i \in K_2, \quad |\tau_i| = 1, \tag{1}$$

и его нельзя представить в виде суммы простых с меньшим количеством слагаемых. Если на разложении (1) *достигается* $\inf |\alpha_1 \dots \alpha_N|$, *то при* $i \neq j$

$$V_{\tau_i} \perp V_{\tau_j}. \tag{2}$$

Доказательство. Положим $W = \mathrm{Lin}\,(V_{\tau_i}, V_{\tau_j})$. Размерность пространства W равна 4, так как в противном случае, можно было бы сократить количество слагаемых. Из Теоремы 8.4 для разложения $\widetilde{\omega} = \alpha_i \tau_i + \alpha_j \tau_j$ следует (2). □

9.3. Следствие. *Для каждого бивектора $\omega \in \Lambda_2(V^n)$ существует такой ортонормированный базис $\{e_i\}$ пространства V^n, что*

$$\omega = \omega^{12} e_1 \wedge e_2 + \omega^{34} e_3 \wedge e_4 + \ldots + \omega^{2k-1\,2k} e_{2k-1} \wedge e_{2k}. \tag{3}$$

Откуда

$$N(\omega) \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]. \tag{4}$$

9.4. Теорема. *Бивектор $\omega \in \Lambda_2(V^n)$ является простым тогда и только тогда, когда*

$$\omega \wedge \omega = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость условия (5) очевидна. Из (3) следует, что бивектор ω можно представить в виде суммы простых бивекторов

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} a^i \tau_i, \ a^i \neq 0, \ \tau_i \wedge \tau_i = 0, \ \tau_i \wedge \tau_j = \tau_j \wedge \tau_i \text{ при } i \neq j. \tag{6}$$

Пусть $\omega \wedge \omega = 0$. Тогда из (5), (6) следует

$$\omega \wedge \omega = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} a^i a^j \tau_i \wedge \tau_j = 0.$$

Так как набор из $\binom{r}{2}$ 4-векторов $\{\tau_i \wedge \tau_j\}_{1\leqslant i<j\leqslant r}$ линейно независим и $a^i a^j \neq 0$, то из последнего равенства следует, что $r = 1$. $\square$

Другое доказательство этой теоремы можно найти, например, в [2].

§10. Бивекторы как кососимметрические операторы

10.1. Напомним, что линейный оператор $\mathcal{A} : V \to V$ называется *кососимметрическим*, если для любых $e, f \in V$

$$\langle \mathcal{A}e, f\rangle = -\langle e, \mathcal{A}f\rangle. \tag{1}$$

Кососимметрические операторы естественным образом образуют линейное пространство $\mathcal{A}^-(V)$. Выбор ортонормированного базиса $\{e_i\}$ пространства V индуцирует изоморфизм пространства $\mathcal{A}(V)$ на пространство кососимметрических матриц $A^-(V)$. Действительно

$$\mathcal{A}e_i = a_i^j e_j \Longrightarrow a_i^j = \langle \mathcal{A}e_i, e_j\rangle = -\langle \mathcal{A}e_j, e_i\rangle = -a_j^i.$$

Значит пространство таких операторов имеет размерность $n(n-1)/2$, где $n = \dim V$.

10.2. Утверждение. *Векторные пространства $\Lambda_2(V)$ и $\mathcal{A}^-(V)$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Построим отображение

$$\varphi : \Lambda_2(V) \to \mathcal{A}^-(V), \quad \varphi(\omega)(e) = \omega \llcorner e. \tag{2}$$

Так как $\langle \varphi(\omega)(e), f\rangle = \langle \omega\llcorner e, f\rangle = \langle \omega, e\wedge f\rangle = -\langle \omega, f\wedge e\rangle = -\langle \omega\llcorner f, e\rangle = -\langle \varphi(\omega)(f), e\rangle$, то оператор $\mathcal{A}_\omega = \varphi(\omega)$ кососимметричен. Поскольку операция внутреннего умножения билинейна, то отображение φ линейно. Выберем какой-нибудь ортонормированный базис $\{e_i\}$ пространства V. Тогда $\omega = \sum\limits_\lambda \omega^\lambda e_\lambda = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \omega^{ij} e_i \wedge e_j$, $\mathcal{A}_\omega(e_k) = \varphi(\omega)(e_k) = \omega\llcorner e_k = a_k^m e_m$. Пусть $k < m$. Тогда

$$a_k^m = \langle \omega\llcorner e_k, e_m\rangle = -\omega^{km}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что $\ker\varphi = 0$. Размерности пространства $\Lambda_2(V)$ и $\mathcal{A}^-(V)$ совпадают, поэтому φ есть изоморфизм. $\square$

10.3. Для оператора $\mathcal{A}_\omega$ построим базис $\{e_i\}$ как в п. 9.3. Из (2) и (3) п. 9.3 следует, что в этом базисе матрица A_ω этого оператора примет вид

$$A_\omega = \left(\begin{array}{ccc|c}
\begin{array}{cc} 0 & -\omega^{12} \\ \omega^{12} & \mathrm{O} \end{array} & & \mathrm{O} & \\
& \ddots & & \mathrm{O} \\
\mathrm{O} & & \begin{array}{cc} \mathrm{O} & -\omega^{2k-1\,2k} \\ \omega^{2k-1\,2k} & \mathrm{O} \end{array} & \\
\hline
& \mathrm{O} & & \mathrm{O}
\end{array}\right) \tag{4}$$

10.4. Напомним, что в пространстве операторов есть стандартное *скалярное произведение*

$$\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = \mathrm{tr}\,(\mathcal{A}\mathcal{B}^\top), \tag{5}$$

где через $\mathcal{B}^\top$ обозначен оператор, сопряженный $\mathcal{B}$.

10.5. Утверждение. *Изоморфизм φ является гомотетией линейных пространств со скалярными произведениями* (3) *п.* 1.2 *и* (5).

Доказательство. Достаточно доказать равенство

$$|\mathcal{A}_\omega| = \sqrt{2}|\omega|. \tag{6}$$

Рассмотрим базис, выбранный в п. 9.3. Тогда из (4) следует

$$\mathcal{A}_\omega(e_1) = -\omega^{12}e_2,\ \mathcal{A}_\omega^2(e_1) = -(\omega^{12})^2 e_1.$$

$$\mathcal{A}_\omega(e_2) = -\omega^{12}e_1,\ \mathcal{A}_\omega^2(e_2) = -(\omega^{12})^2 e_2.$$

Аналогичные равенства имеют место и для других блоков матрицы (4). Отсюда

$$|\mathcal{A}_\omega|^2 = \mathrm{tr}\,(\mathcal{A}_\omega\mathcal{A}_\omega^\top) = \mathrm{tr}\,(-\mathcal{A}_\omega^2) = 2\Sigma(\omega^{ij})^2 = 2|\omega|^2. \ \square$$

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М, Наука, 1987.
2. С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии.* М, Мир, 1970.
3. P. Filliman, *Exterior algebra and projections of polytopes.* — Discrete Comput Geom. **5** (1990), 305–322.
4. Р. Бишоп, Р. Криттенден, *Геометрия многообразий.* М, Мир, 1967.
5. В. Ф. Осипов, *Структура пространств-времени: векторная алгебра и анализ. Часть 1.* Изд. СПбГУ, 1995.
6. А. Н. Кострикин, Ю. И. Манин, *Линейная алгебра и геометрия.* Изд. МГУ, 1980.
7. E. Cartan, *Oeuvres completes.* I. Paris, 1952.
8. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрия.* Санкт-Петербург, Наука, 1994.
9. K. Leichtweiss, *Zur Riemannschen Geometrie in Grassmannschen Mannigfaltigkeiten.* — Math. Z. **76**, No. **4** (1961), 334–366.
10. С. Е. Козлов, *Ортогонально инвариантные римановы метрики на вещественных грассмановых многообразиях.* Украина, Харьков (в печати), — Мат. физика. Анализ. Геом. **4, No. 1–2** (1997).
11. А. А. Борисенко, Ю. Н. Николаевский, *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий.* — Успехи мат. наук **46, No. 2** (1991), 41–81.
12. С. Е. Козлов, *Ортогонально совместимые бивекторы.* — Укр. геометр. сб. Вып. 27. 68–75.

Kozlov S. E. Geometry of the real Grassmannian manifolds. Parts I, II.

The properties of the exterior algebra $\Lambda(\mathbb{R}^n)$ studied in the paper are related to the Euclidean structure in this algebra induced by the scalar product in $\mathbb{R}^n$. A geometric interpretation of the interior multiplication for decomposable polyvectors is given. The Cartan criterion of decomposability for the polyvectors is formulated in a coordinateless form. The Pluccer model of the real Grassmannian manifold is realized as a submanifold of the Euclidean space $\Lambda(\mathbb{R}^n)$, and the isometry of this submanifold onto the classical Grassmannian manifold with $SO(n)$-invariant metric is indicated. For the bivectors the canonical decomposition is described.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 14 сентября 1996 г.