С. Е. Козлов

О ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ЭЛЛИПС

1.1. Ряд работ (см., например, [1, 2]) посвящен вопросу о возможности вписать плоский четырехугольник, подобный некоторому описанному четырехугольнику, в замкнутую плоскую кривую, принадлежащую какому-то заданному классу. Классическим результатом является теорема Шнирельмана [1] о возможности вписать квадрат в гладкую жорданову кривую. В [2] сформулирована гипотеза о возможности вписать в произвольную жорданову кривую четырехугольник, подобный фиксированному описанному окружностью четырехугольнику, при соблюдении некоторых требований на гладкость и регулярность заданной кривой. В настоящей заметке рассматривается узкий класс кривых – эллипсы. Зато четырехугольник не предполагается описанным.

1.2. Множество строго выпуклых четырехугольников на плоскости обозначим M_0, а множество эллипсов – Γ_0. Пусть на плоскости заданы выпуклый четырехугольник M и эллипс Γ. Под выпуклостью мы будем понимать строгую выпуклость, а окружность будем считать эллипсом с нулевым эксцентриситетом. Запись $M \sim \Gamma$ означает, что четырехугольник M вписан в эллипс Γ или, что то же, Γ описан вокруг M. Очевидно, вокруг каждого выпуклого четырехугольника M можно описать эллипс с минимальным эксцентриситетом $e_0(M)$. Для произвольного четырехугольника M определим множество эллипсов

$$\Gamma_0(M) := \{\Gamma \in \Gamma_0 \mid M \sim \Gamma,\, e(\Gamma) = e_0(M)\}. \tag{1}$$

В (1) через $e(\Gamma)$ обозначен эксцентриситет эллипса Γ. По произвольному эллипсу Γ построим множество четырехугольников

$$M_0(\Gamma) := \{M \in M_0 \mid M \sim \Gamma,\, e(\Gamma) = e_0(M)\}. \tag{2}$$

Легко показать, что $M_0(\Gamma) \neq \varnothing$ для любого $\Gamma \in \Gamma_0$. Эллипсы Γ из множества $\Gamma_0(M)$ будем называть *экстремальными эллипсами* для данного четырехугольника M, а четырехугольники M из

$M_0(\Gamma)$ – *экстремальными четырехугольниками* для данного эллипса Γ. Непосредственно из определений (1), (2) следует эквивалентность

$$M \in M_0(\Gamma) \Longleftrightarrow \Gamma \in \Gamma_0(M). \tag{3}$$

1.3. В настоящей работе дан ответ (теорема 3.5) на вопрос: как по характеристикам четырехугольника $M \in M_0$ и эллипса $\Gamma \in \Gamma_0$ определить, можно ли в эллипс Γ вписать четырехугольник $\widetilde{M}$, подобный M? Найдено количество решений этой задачи, когда $e_0(M) = e(\Gamma)$ ((3) п. 5). Сформулировано наглядно геометрическое условие принадлежности четырехугольника M к множеству $M_0(\Gamma)$ (теорема 4.3).

2.1. Фиксируем четырехугольник $M \in M_0$. Выберем какой-либо экстремальный эллипс $\Gamma \in \Gamma_0(M)$. В канонической для эллипса Γ системе координат (x, y) его уравнение имеет вид

$$m_0x^2 + n_0y^2 = 1,\ m_0 = a^{-2},\ n_0 = b^{-2},\ 0 < b \leqslant a,\ e(\Gamma) = e_0(M). \tag{1}$$

Циклически занумеруем стороны L_i, $i \in [1, 4]$ четырехугольника M. Выберем одну из двух пар $(L, \widetilde{L})$ противоположных сторон четырехугольника M и выпишем их уравнения в системе координат (x, y)

$$L : ax + by + c = 0, \quad \widetilde{L} : \widetilde{a}x + \widetilde{b}y + \widetilde{c} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим уравнение пучка кривых второго порядка $\Gamma(t)$, $t \in R$, описанных вокруг M

$$(m_0x^2 + n_0y^2 - 1) + t(ax + by + c)(\widetilde{a}x + \widetilde{b}y + \widetilde{c}) = 0. \tag{3}$$

Коэффициенты квадратичной формы $\mathcal{A} = mx^2 + 2rxy + ny^2$ в уравнении (3) задаются равенствами

$$\begin{gathered} m(t) = m_0 + a\widetilde{a}t,\ n(t) = n_0 + b\widetilde{b}t,\ r(t) = \frac{1}{2}(a\widetilde{b} + \widetilde{a}b)t, \\ p := a\widetilde{a},\ q := b\widetilde{b},\ r := \frac{1}{2}(a\widetilde{b} + \widetilde{a}b). \end{gathered} \tag{4}$$

2.2. Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} m & r \\ r & n \end{pmatrix}$$

квадратичной формы $\mathcal{A}$. Тогда характеристическое уравнение для собственных чисел матрицы A будет

$$\lambda^2 - (m+n)\lambda + mn - r^2 = 0. \tag{5}$$

Примем нумерацию так, что $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$. При $t = 0$

$$\lambda_1 = m(0) = m_0, \quad \lambda_2 = n(0) = n_0. \tag{6}$$

В некоторой окрестности нуля $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ определим две функции

$$x(t) := \lambda_1(t) \setminus \lambda_2(t), \;\; s(t) := (\lambda_1(t) + \lambda_2(t))^2 \setminus \lambda_1(t)\lambda_2(t), \tag{7}$$

$$x(0) = x_0 = \frac{m_0}{n_0}, \quad s(0) = \frac{(m_0 + n_0)}{m_0 n_0}.$$

Можно считать, что в этой окрестности функция $x \neq 0$. Из (7) следует

$$s'_t\big|_{t=0} \Longleftrightarrow x'_t(x^2 - 1)\big|_{t=0} = 0. \tag{8}$$

2.3. Из формул (4)–(7) следует

$$s'_t\big|_{t=0} = 0 \Longleftrightarrow (qx_0 - p)(x_0 - 1) = 0. \tag{9}$$

2.4. Эксцентриситет $e_0(M)$ экстремального эллипса $\Gamma \in \Gamma_0(M)$ совпадает с абсолютным минимум функции $e(t) = e(\Gamma(t))$ и достигается при $t = 0$.

Теорема. *Для любого числа $e \in [e_0(M), 1)$ существует эллипс $\widetilde{\Gamma}$ с эксцентрситетом $e(\widetilde{\Gamma}) = e$, описанный вокруг M.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{D}(t) = m(t)n(t) - r^2(t) = 0. \tag{10}$$

Из (4) следует

$$(10) \Longleftrightarrow (pq - r^2)t^2 + (pn_0 + qm_0)t + m_0 n_0 = 0, \tag{11}$$

$$pq - r^2 = -(a\widetilde{b} - b\widetilde{a})^2 \leqslant 0. \tag{12}$$

Напомним (см. (2)), что вектора $n = (a, b)$ и $\widetilde{n} = (\widetilde{a}, \widetilde{b})$ суть нормали к сторонам L и $\widetilde{L}$ четырехугольника M, поэтому (12) можно переписать в виде

$$pq - r^2 = -\langle n, \widetilde{n}^{\perp}\rangle^2 \leqslant 0. \tag{13}$$

Так как $\mathcal{D}(0) = m_0 n_0 > 0$, то при $\langle n, \widetilde{n}^{\perp}\rangle \neq 0$ или $pn_0 + qm_0 \neq 0$ из (11), (13) следует, что уравнение (10) имеет решение. Пусть

$$\langle n, \widetilde{n}^{\perp}\rangle = 0, \quad pn_0 + qm_0 = 0. \tag{14}$$

В этом случае при $m_0 = n_0$ произведение $\langle n, \widetilde{n}\rangle = p + q = 0$, что противоречит (14). Эллипс $\Gamma(0) = \Gamma$ является экстремальным для четырехугольника M, поэтому $x'_t\big|_{t=0} = 0$. При $m_0 \neq n_0$ из (8), (9) следует $pn_0 - qm_0 = 0$, что вместе с (14) влечет равенства $p = q = 0$ и $\langle n, \widetilde{n}\rangle = 0$, что противоречит (14). Таким образом уравнение (10) всегда имеет решение в точке $t = t_0$. Можно считать, что на полузамкнутом промежутке J $(0 \in J)$ от нуля до t_0 верно $\mathcal{D}(t) > 0$, $\lambda_1(t) > 0$. Допустим, что $\lambda_2(t_0) = 0$. Тогда матрица A обращается в ноль и из (14) следует

$$m_0 n_0 = ab\widetilde{a}\widetilde{b}t_0^2 = -(a\widetilde{b})^2 t_0^2,$$

что противоречит условию $m_0, n_0 > 0$. Значит $\lambda_2(t_0) > 0$, функция $e^2(t) = 1 - x(t)$ непрерывна на отрезке $\overline{J}$ и принимает все значения в промежутке $[e_0(M), 1)$. $\square$

2.5. Следствие. *Пусть на плоскости заданы эллипс Γ и строго выпуклый четырехугольник M. В эллипс Γ можно вписать четырехугольник, подобный M тогда и только тогда, когда*

$$e(\Gamma) \geqslant e_0(M). \tag{15}$$

Доказательство. Пусть P – произвольное преобразование подобия, тогда $e(\Gamma) = e(P(\Gamma))$, для любого эллипса Γ. Поэтому $e_0(\Gamma) = e_0(P(\Gamma))$. Ероме того, два эллипса с одинаковым эксцентриситетом подобны. Теперь наше утверждение следует из теоремы 2.4. $\square$

3.1. В этом разделе мы выразим величину $e_0(M)$ через характеристики четырехугольника M. Если четырехугольник M описанный, то $e_0(M) = 0$ и, в силу (15), в любой эллипс можно вписать четырехугольник, подобный M. Далее везде будем считать, что

$$0 < m_0 < n_0 \Longleftrightarrow 0 < x_0 < 1. \tag{1}$$

В системе координат, выбранной в п. 2.1, единичная внешняя нормаль n_i к стороне L_i четырехугольника M имеет координаты $(\cos\alpha_i,\ \sin\alpha_i)$. Выберем нумерацию сторон так, чтобы

$$0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 < 2\pi. \tag{2}$$

Полагая $(L,\widetilde{L})=(L_1,L_3)$ и $(L,\widetilde{L})=(L_2,L_4)$, перепишем (4) из 2.1 в виде

$$p_{ij}=\cos\alpha_i\cos\alpha_j,\ \ q_{ij}=\sin\alpha_i\sin\alpha_j,\ \ (i,j)=(1,3),(2,4). \tag{3}$$

Введем обозначения

$$\alpha_{ij}:=\alpha_i+\alpha_j,\ \ \delta_{ij}=\alpha_j-\alpha_i,\ \ i,j\in[1,4]. \tag{4}$$

Из (3), (4) следует

$$p_{ij}=\frac{1}{2}(\cos\alpha_{ij}+\cos\delta_{ij}),\ \ q_{ij}=-\frac{1}{2}(\cos\alpha_{ij}-\cos\delta_{ij}). \tag{5}$$

Так как эллипс $\Gamma=\Gamma(0)\in\Gamma_0(M)$, то $x'_t\big|_{t=0}=0$. Из (8), (9) п.2 и (1) следует

$$p_{ij}n_0-q_{ij}m_0=0,\ \ (i,j)=(1,3),(2,4). \tag{6}$$

Отсюда, с использованием (4), (5), (6), находим

$$p_{13}q_{24}-p_{24}q_{13}=0\iff\cos\alpha_{24}\cos\delta_{13}-\cos\alpha_{13}\cos\delta_{24}=0. \tag{7}$$

3.2. В силу (6), параметры p_{ij} и q_{ij} могут обращаться в ноль лишь одновременно.

Утверждение. *Для любого выпуклого четырехугольника M справедливо*

$$p_{13}^2+q_{13}^2+p_{24}^2+q_{24}^2\neq 0. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что (8) не выполнено. Тогда из (5) следует

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_3=\pi k_1+\frac{\pi}{2},\ \ \alpha_2+\alpha_4=\pi k_2+\frac{\pi}{2},\ \ \alpha_3-\alpha_1=\pi k_3+\frac{\pi}{2},\\ \alpha_4-\alpha_2=\pi k_4+\frac{\pi}{2},\quad k_i\in\mathbb{Z}.\end{gathered} \tag{9}$$

Из (9) находим, что $\delta_{12}=\frac{\pi}{2}(k_2+k_3-k_1-k_4)$, $\delta_{23}=\frac{\pi}{2}(k_1+k_3-k_2+1)$. Так как повороты δ_{12}, $\delta_{23}\in(0,\pi)$, то последние два равенства противоречат условию $k_i\in\mathbb{Z}$. $\square$

3.3. Рассмотрим ортонормированный базис $(\widetilde{e}_1,\widetilde{e}_2)$, полученный из базиса (e_1,e_2) ортов системы координат (x,y) поворотом на некоторый угол φ. Координаты единичных внешних нормалей n_i в этих базисах связаны соотношениями

$$\begin{gathered} n_i = e_1 \cos\alpha_i + e_2 \sin\alpha_i = \widetilde{e}_1 \cos\beta_i + \widetilde{e}_2 \sin\beta_i, \\ \alpha_i = \beta_i + \varphi, \quad \alpha_{ij} = \beta_{ij} + 2\varphi. \end{gathered} \tag{10}$$

Равенство (7) в новом базисе примет вид

$$\cos(\beta_{24} + 2\varphi) \cdot \cos\delta_{13} - \cos(\beta_{13} + 2\varphi)\cos\delta_{24} = 0. \tag{11}$$

Заметим, что если изначально ввести произвольную декартову систему координат $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ с ортами осей $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2)$, то равенство (11) можно рассматривать как уравнение с неизсвестным углом φ. Выделим в (11) коэффициенты при $\cos 2\varphi$ и $\sin 2\varphi$

$$\begin{gathered} \cos 2\varphi[\cos\beta_{24} \cdot \cos\delta_{13} - \cos\beta_{13}\cos\delta_{24}] + \\ + \sin 2\varphi[-\sin\beta_{24} \cdot \cos\delta_{13} + \sin\beta_{13}\cos\delta_{24}] = A\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi. \end{gathered} \tag{12}$$

Здесь через A и B обозначены квадратные скобки из (12).

Утверждение. *Для любого не описанного окружностью строго выпуклого четырехугольника M справедливо*

$$A^2 + B^2 \neq 0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $A = B = 0$. Тогда

$$0 = \sin\beta_{13}\cos\beta_{24} - \sin\beta_{24} \cdot \beta_{13} = \sin(\beta_{13} - \beta_{24}) =$$

$$= \sin(\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_4) = -\sin(\delta_{12} + \delta_{34}),$$

откуда следует, что M описанный. $\square$

Определим вектор $\overline{d}$ его координатами в базисе $(\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2)$

$$\begin{gathered} \overline{d} = (A, B) = (\cos\beta_{24}\cos\delta_{13} - \cos\beta_{13}\cos\delta_{24}, \\ \sin\beta_{13}\cos\delta_{13}\cos\delta_{24} - \sin\beta_{24}\cos\delta_{13}). \end{gathered} \tag{14}$$

В силу (13) вектор $\overline{d} \neq 0$.

Из (12) следует

$$\cos 2\varphi = \pm\frac{B}{d}, \quad \sin 2\varphi = \mp\frac{A}{d}, \tag{15}$$

где

$$d = |\overline{d}| = [\cos^2\delta_{13} + \cos^2\delta_{24} - 2\cos\delta_{13}\cos\delta_{24}\cos\delta]^{\frac{1}{2}}, \quad \delta = \delta_{12} + \delta_{34}. \tag{16}$$

3.4. Теорема. *Пусть строго выпуклый четырехугольник M вписан в эллипс Γ, задаваемый уравнением*

$$m_0 x^2 + n_0 y^2 = 1, \quad 0 < m_0 < n_0. \tag{17}$$

Тогда, если параметры α_i, α_{ij}, δ_{ij}, p_{ij}, q_{ij}, δ, α, определенные равенствами (2)–(4), (16), *удовлетворяют соотношениям*

$$p_{ij} n_0 - q_{ij} m_0 = 0, \quad (i,j) = (1,3),(2,4), \tag{18}$$

то

$$e(\Gamma) = \frac{2|\sin\delta|}{d + |\sin\delta|}. \tag{19}$$

Доказательство. В п. 3.2 доказано, что $(p_{13}q_{13})^2 + (p_{24}q_{24})^2 \neq 0$. Не нарушая общности считаем, что p_{13}, $q_{13} \neq 0$. Из (5), (10), (18) следует

$$\frac{m_0}{n_0} = \frac{p_{13}}{q_{13}} = -\frac{\cos\alpha_{13} + \cos\delta_{13}}{\cos\alpha_{13} - \cos\delta_{13}} = -\frac{\cos(\beta_{13} + 2\varphi) + \cos\delta_{13}}{\cos(\beta_{13} + 2\varphi) - \cos\delta_{13}}. \tag{20}$$

В п. 3.3 показано как из (10) формально следует (15). Используя формулы (15) для верхних знаков, находим

$$\begin{aligned} d\cos(\beta_{13} + 2\varphi) &= \cos\beta_{13}[\sin\beta_{13}\cos\delta_{24} - \sin\beta_{24}\cos\delta_{13}] + \\ &+ \sin\beta_{13}[\cos\beta_{24}\cos\delta_{13} - \cos\beta_{13}\cos\delta_{24}] = \\ &= \cos\delta_{13}\cdot\sin(\beta_{13} - \beta_{24}) = -\cos\delta_{13}\cdot\sin\delta. \end{aligned} \tag{21}$$

Так как p_{13}, $q_{13} \neq 0$, то $\cos\delta_{13} \neq 0$ и $\sin\delta \neq 0$. Это означает, что стороны L_1 и L_3 четырехугольника M не перпендикулярны, а сам M не описанный. При выборе нижнего знака в (15) выкладки проводятся аналогично. Подставляя (21) в (20), получаем

$$\frac{m_0}{n_0} = \frac{d \mp \sin\delta}{d \pm \sin\delta}. \tag{22}$$

Так как $\frac{m_0}{n_0} \in (0,1)$, то верхний знак в (22), а значит и в (15), нужно выбирать, когда $\sin\delta > 0$, а нижний – когда $\sin\delta < 0$. Поэтому

$$\cos 2\varphi = \operatorname{sign}(\sin\delta)\frac{B}{d}, \quad \sin 2\varphi = -\operatorname{sign}(\sin\delta)\frac{A}{d}, \tag{23}$$

$$e(\Gamma) = 1 - \frac{m_0}{n_0} = \frac{2|\sin\delta|}{d + |\sin\delta|}. \quad \square$$

3.5 Для эллипса Γ и четырехугольника M из п. 2.1 выполнены все условия теоремы 3.4, поэтому

$$\begin{aligned} e_0(M) &= \frac{2|\sin\delta|}{d+|\sin\delta|}, \quad \delta \neq \pi, \\ e_0(M) &= 0, \qquad\qquad \delta = \pi. \end{aligned} \tag{24}$$

Из теоремы 2.4 и формул (24) непосредственно следует

Теорема. *Пусть заданы произвольный четырехугольник $M \in M_0$ и эллипс $\Gamma \in \Gamma_0$. Если четырехугольник M описан окружностью, то ему подобный можно вписать в любой эллипс (сравни с [2]). Если же четырехугольник M не описанный, то для того, чтобы в Γ можно было вписать четырехугольник, подобный M, необходима и достаточна справедливость неравенства*

$$e(\Gamma) \geqslant \frac{2|\sin\delta|}{d+|\sin\delta|}. \tag{25}$$

Заметим, что характеристики четырехугольника M, входящие в правую часть (25), однозначно определены углами M, но не определяют четырехугольник M с точностью до подобия.

4.1. Пусть на плоскости фиксирован какой-то эллипс Γ, $e(\Gamma)>0$. В этом разделе мы сформулируем геометрическое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы вписанный в эллипс Γ четырехугольник M принадлежал множеству $M_0(\Gamma)$. Свяжем с эллипсом Γ его каноническую систему координат (x, y). Рассмотрим четырехугольник $M \in M_0(\Gamma)$.

Пусть p_{13}, q_{13}, p_{24}, $q_{24} \neq 0$ (см. п. 3). Условие (6) п. 3 можно переписать в виде

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{p_{13}}{q_{13}} = \frac{p_{24}}{q_{24}} = \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_3 = \operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_4. \tag{1}$$

Угловой коэффициент стороны L_i обозначим k_i. Так как $k_i = \operatorname{tg}(\alpha_i - \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}\alpha_i$, то

$$k_1 k_3 = k_2 k_4 = \frac{b^2}{a^2}. \tag{2}$$

Условие сопряженности относительно эллипса Γ двух направлений l и $\widetilde{l}$ может быть выражено через их угловые коэффициенты равенством

$$k\widetilde{k} = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{3}$$

4.2. Соотношения (2), (3) позволяют наглядно геометрически сформулировать условие экстремальности вписанного в данный эллипс четырехугольника. Пусть Q_i обозначает середину стороны L_i четырехугольника M, а Q_i' – точку, симметричную точке Q относительно большой оси эллипса Γ. Допустим, что точка Q_i не совпадает с центром O эллипса Γ. Тогда из (2), (3) следует

$$k_i k_{i'} = \frac{b^2}{a^2} \Longleftrightarrow OQ_i' \parallel L_{i'}, \tag{4}$$

где i' номер противоположной к L_i стороны четырехугольника M. Из (4) при $Q_{i'} \neq O$ получаем

$$OQ_i' \parallel L_{i'} \Longleftrightarrow OQ_{i'}' \parallel L_i. \tag{5}$$

В силу выпуклости четырехугольника M точки Q_i и $Q_{i'}$ не совпадают, поэтому всегда в (5) какое-либо из двух условий осмыслено.

Определение. *Будем говорить, что для строго выпуклого четырехугольника M, вписанного в эллипс Γ, выполнено условие S, если справедливо*

$$OQ_i \parallel L_{i'} \tag{6}$$

для пар индексов $(i,i') = (1,3)$ или $(3,1)$, $(i,i') = (2,4)$ или $(4,2)$.

Заметим, что если две противоположные стороны четырехугольника M параллельны осям симметрии эллипса, то условие (2) теояет смысл, в то время как корректность условия S сохраняется. За искоючением этого случая условия (2) и S эквивалентны.

4.3. Теорема. *Вписанный в эллипс Γ, $(e(\Gamma) \neq 0)$ строго выпуклый четырехугольник M экстремален, если и только если выполнено условие S. Иными словами*

$$M \in M_0(\Gamma) \Longleftrightarrow S(M,\Gamma). \tag{7}$$

Доказательство. 1) Пусть $M \in M_0(\Gamma)$. Тогда, в силу (3) п. 1, $\Gamma \in \Gamma_0(M)$. Поэтому для пары M, Γ можно применить конструкции второго и третьего разделов. Если p_{ij}, $q_{ij} \neq 0$, то из (6) п. 3 следует (2), которое в этом случае эквивалентно условию S. Пусть теперь p_{13}, $q_{13} \neq 0$, $p_{24} = q_{24} = 0$. В этом случае стороны

L_2 и L_4 параллельны осям симметрии эллипса, поэтому для индексов (2,4) или (4,2) условие S тривиально. Для индексов (1,3) или (3,1), как и выше, это условие следует из (6) п. 3.

2) Пусть выполнено условие S. Из него легко следует справедливость условия (18) в теореме 3.4, поэтому

$$e(\Gamma) = \frac{2|\sin\delta|}{d + |\sin\delta|} = e_0(M).$$

Тогда по определению (2) п. 1 четырехугольник $M \in M_0(\Gamma)$. $\square$

5.1. Теорема. *Вокруг четырехугольника $M \in M_0$ можно описать единственный экстремальный эллипс Γ. Иными словами, найдется такой эллипс Γ, что*

$$\Gamma_0(M) = \{\Gamma\}. \tag{1}$$

Доказательство. Если четырехугольник M описанный, то равенство (1) тривиально. Пусть M не описанный и эллипсы Γ_1, $\Gamma \in \Gamma_0(M)$. Эти эллипсы подобны, так как имеют одинаковый эксцетриситет. Из (23) п. 3 следует, что большие оси этих эллипсов параллельны. Значит Γ_1 и Γ_2 гомотетичны, либо являются транслятами. Следовательно, существует аффинное преобразование плоскости, одновременно переводящее эти эллипсы в окружность. Эти окружности имеют четыре различные точки пересечения, поэтому совпадают. Применяя обратное преобразование, уьеждаемся, что $\Gamma_1 = \Gamma_2$. $\square$

5.2. Рассмотрим пару (M, Γ), $M \in M_0$, $\Gamma \in \Gamma_0$. Пусть $e(\Gamma) = e_0(M) \neq 0$. По теореме 3.5 в эллипс Γ можно вписать четырехугольник $\widetilde{M}$, подобный M. Спрашивается, сколько существует таких четырехугольников $\widetilde{M}$?

Подгруппа $G(\Gamma)$ группы движений плоскости, совмещающая эллипс Γ сам с собой состоит из четырех элементов. Это – тождественное преобразование, зеркальные симметрии f_a и f_b относительно осей симметрии Γ, центральная симметрия f_0 относительно центра эллипса.

Теорема. *Пусть даны эллипс $\Gamma \in \Gamma_0$, $e(\Gamma) \neq 0$ и два подобных четырехугольника $\widetilde{M}_1$, $\widetilde{M}_2 \in M_0(\Gamma)$. Тогда существует движение $g \in G(\Gamma)$ такое, что*

$$\widetilde{M}_2 = g(\widetilde{M}_1). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование подобия g, переводящее четырехугольник $\widetilde{M}_1$ в $\widetilde{M}_2$. Тогда эллипс $g(\Gamma) \in \Gamma_0(\widetilde{M}_2)$. Из (3) п. 1 следует, что $\Gamma \in \Gamma_0(\widetilde{M}_2)$. Отсюда по теореме 5.1 верно $g(\Gamma) = \Gamma$. Значит $g \in G(\Gamma)$. $\square$

Из теоремы 5.2 непосредственно получается

Следствие. *Пусть заданы эллипс* Γ *и подобные четырехугольники* $M \in M_0$, $\widetilde{M} \in M_0(\Gamma)$. *Тогда набор*

$$\{\widetilde{M},\, f_a(\widetilde{M}),\, f_b(\widetilde{M}),\, f_0(\widetilde{M})\} \tag{3}$$

исчерпывает множество четырехугольников, вписанных в эллипс Γ *и подобных* M.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. Л. Г. Шнирельман, *О некоторых геометрических свойствах замкнутых кривых.* — УМН вып. **10** (1944), 39–44.
2. В. В. Макеев, *О четырехуголниках, вписанных в замкнутую кривую.* — Мат. заметки **57, No. 1** (1995), 129–134.

Kozlov S. E. On the quadrangles inscribed in an ellips.

Some necessary and sufficient conditions ensuring that a quadrangle similar to a given quadrangle can be inscribed in a given ellipse are found. The class of quadrangles for which this problem is solvable is described.

С.-Петербургский
Государственный университет

Поступило 12 декабря 1996 г.