С. Е. Козлов

ТОПОЛОГИЯ И ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНАЯ ПСЕВДОРИМАНОВА МЕТРИКА МНОГООБРАЗИЯ НАПРАВЛЕНИЙ В ФИЗИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Введение. В четырехмерном точечном пространстве Минковского M каждая времениподобная кривая

$$x = x(t), \quad (x'(t))^2 > 0 \tag{1}$$

интерпретируется как частица вещественной и положительной массы $|x'(t)|$ (см. [1], с. 12). Инерциальной частице $x(x'(t) = a = \text{const},\ a^2 > 0)$ можно сопоставить ее *физическое пространство* $M(x) := M/\mathrm{Lin}\,(x')$. Каждая двумерная плоскость V, содержащая инерциальную частицу x, задает прямую $\ell = \mathrm{pr}_x(V)$ в физическом пространстве этой частице. Здесь отображение

$$\mathrm{pr}_x : M \to M(x) \tag{2}$$

есть проекция пространства M на свое фактор-пространство. Поэтому говорят (см. [1], с. 13), что двумерная плоскость, содержащая линию вещественной длины, задает *одномерное направление* в физическом пространстве.

1.2. Любая инерциальная частица $\widetilde{x}$, лежащая в плоскости V и отличная от x, однозначно проектируется на прямую ℓ. Если в векторном пространстве Минковского M_0 фиксировать временну́ю ориентацию (см. [2], §8), то инерциальная частица $\widetilde{x}$ приобретает естественную временну́ю ориентацию. Эта ориентация переносится на прямую ℓ отображением проекции (2). Отсюда видно, что задание ориентации плоскости V эквивалентно выбору направления на прямой ℓ (при фиксированной временно́й ориентации пространства M_0). Класс плоскостей, параллельных и одинаково ориентированных с V, естественно представить двумерным подпространством V_0 пространства M_0 с соответствующей ориентацией. Причем плоскость V_0 содержит времениподобное направление, а значит является двумерным пространством Минковского. Множество таких плоскостей мы обозначим G^1. Через G^2 обозначим множество пространственноподобных плоскостей, а множество изотропных плоскостей обозначим G^0. Тогда грассманово многообразие $G_2^+(M_0)$ ориентированных 2-плоскостей разлагается в дизъюнктное объединение

$$G_2^+(M_0) = G^0 \cup G^1 \cup G^2. \tag{3}$$

Очевидно, что подмножества G^1 и G^2 открыты в многообразии $G_2^+(M_0)$. В п. 2.4 будет показано, что G^0 является замкнутым трехмерным подмногообразием в $G_2^+(M_0)$.

Сказанное выше позволяет интерпретировать многообразие G^1 как многообразие одномерных направлений в физическом пространстве.

Настоящая работа посвящена изучению топологии и метрической геометрии многообразия G^1.

2.1. Топология многообразий $\mathbf{G^0}$, $\mathbf{G^1}$, $\mathbf{G^2}$. Группа ограниченных преобразований Лоренца $L_+^\dagger$ транзитивно действует на многообразиях G^i. Напомним, что набор ограниченных преобразований Лоренца образует компоненту единицы группы Лоренца L. Рассмотрим какую-либо ориентированную плоскость $\alpha \in G^i$. Через H_α обозначим стационарную подгруппу плоскости α. Тогда имеет место диффеоморфизм (см. [4], §30])

$$G^i \simeq L_+^\dagger / H_\alpha. \tag{1}$$

2.2. Многообразия G^1 и G^2 диффеоморфны. Этот диффеоморфизм осуществляется переходом к ортогональному дополнению

$$\perp : G^1 \to G^2, \quad \perp(\alpha) = \alpha^\perp. \tag{2}$$

По определению ориентация плоскости $\alpha^\perp$ вместе с ориентацией α дает положительную ориентацию пространства Минковского M_0. Стационарная подгруппа H_α изоморфна произведению группы $L_+^\dagger(\alpha)$ гиперболических поворотов плоскости α на группу $SO(\alpha^\perp)$ ортогональных поворотов плоскости $\alpha^\perp$ ([2], §14), поэтому из (1) следует

$$G^1 \simeq G^2 \simeq L_+^\dagger / \big(L_+^\dagger(\alpha) \times SO(\alpha^\perp)\big) \simeq SO(1,4)/(R^1 \times S^1). \tag{3}$$

2.3. Каждому классу смежности $[xH]$, $x \in \Lambda_+^\dagger$, из правой части равенства (1) взаимно однозначно соответствует стационарная подгруппа $H_{\widetilde{\alpha}} = x^{-1}H_\alpha x$ ориентированной плоскости $\widetilde{\alpha} = x^{-1}(\alpha)$. В модели Кэли–Клейна трехмерного пространства Лобачевского (см. [2]) каждой двумерной ориентированной плоскости Минковского пространства M_0 взаимно однозначно соответствует направленная хорда некоторого единичного евклидова шара D. Множество таких хорд задается упорядоченной парой точек на сфере $S^2 = \partial D$. Поэтому

$$G^1 \simeq G^2 \simeq (S^2 \times S^2) \setminus \operatorname{diag}(S^2 \times S^2). \tag{4}$$

Из (4) следует, что многообразие G^1 связно.

2.4. Пусть ориентированная плоскость $\alpha \in G^0$. На сфере S^2, введенной в п. 2.3, такой плоскости взаимно однозначно соответствует пара x, ℓ, где $x \in S^2$, а ℓ – направленная прямая в касательной плоскости T_xS^2. Следовательно,

$$G^0 \simeq S^1(S^2) \subset TS^2. \tag{5}$$

В (5) через $S^1(S^2)$ обозначено сферическое расслоение окружностей над двумерной сферой.

3.1. Лоренц-инвариантное скалярное произведение на внешней алгебре $\Lambda(M_0^{n+1})$. Скалярное произведение в пространстве Минковского M_0^{n+1} канонически распространяется на всю внешнюю алгебру $\Lambda(M_0^{n+1})$ (см. [3], п. 1.5). При этом (см. (3)) группа Лоренца L действует на этой алгебре изометриями. Каждой тетраде Минковского

$$e = \{e_0, e_i\}_{i=1}^n, \quad e_0^2 = -e_i^2 = 1, \quad \langle e_0, e_i \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \tag{1}$$

соответствует базис

$$\begin{gathered}\{e_\lambda\}, \quad \lambda = (i_1, \dots, i_p) \in \Lambda(n+1, p) = \{(i_1, \dots, i_p) | 0 \leqslant \\ \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n\}, \quad e_\lambda = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}\end{gathered} \tag{2}$$

пространства p-векторов $\Lambda_p(M_0)$. Так как для любого простого поливектора $\omega = f_1 \wedge \dots \wedge f_p$ справедливо

$$\omega^2 = \langle \omega, \omega \rangle = \det(\langle f_i, f_j \rangle), \tag{3}$$

то базис $\{e_\lambda\}$ в (2) ортонормированный. При $n = 3$, $p = 2$ верно

$$e_{01}^2 = e_{02}^2 = e_{03}^2 = -e_{12}^2 = -e_{13}^2 = -e_{23}^2 = 1, \ \langle e_\lambda, e_\mu \rangle = 0 \ \lambda \neq \mu. \tag{4}$$

Таким образом, пространство бивекторов $\Lambda_2(M_0^4)$ является псевдоевклидовым пространством с сигнатурой $(+++---)$.

3.2. Операция внутренного умножения. Билинейное отображение

$$\llcorner\colon \Lambda_p(M_0)\times\Lambda_q(M_0)\to\Lambda_{p-q}(M_0),\quad p\geqslant q\geqslant 0 \tag{5}$$

называется операцией *внутреннего умножения*, если для любых $\omega\in\Lambda_p(M_0)$, $\tau\in\Lambda_q(M_0)$, $\varphi\in\Lambda_{p-q}(M_0)$ справедливо

$$\langle\,\omega\llcorner\tau,\,\varphi\,\rangle=\langle\,\omega,\tau\wedge\varphi\,\rangle. \tag{6}$$

Разлагая поливектор $\omega\llcorner\tau$ по базису, определенному в (2), приходим к формуле

$$\omega\llcorner\tau=\sum_{\lambda\in\Lambda(n+1,p-q)}\big(e_\lambda^2\langle\,\omega,\,\tau\wedge e_\lambda\,\rangle e_\lambda\big). \tag{7}$$

Из (7) легко следует существование и единственность операции (5).

3.3. Оператор Ходжа. Далее мы будем рассматривать четырехмерное пространство Минковского с раз и навсегда фиксированной временно́й ориентацией и соответствующей функцией временно́й ориентации Ψ_T (см. [2], §10). В одномерном пространстве $\Lambda_4(M_0)$ выберем один из двух возможных единичных 4-векторов E, $E^2=-1$. При фиксированной временно́й ориентации Ψ_T этот выбор эквивалентен выбору пространственной ориентации Ψ ([2], §10). Рассмотрим какую-нибудь тетраду Минковского $e=(e_0,e_i)_{i=1}^3$, для которой $\Psi_T(e)=\Psi_T(e_0)=\Psi(e)=1$. Тогда

$$E=e_0\wedge e_1\wedge e_2\wedge e_3. \tag{8}$$

Линейный оператор

$$\circledast\,:\Lambda_2(M_0)\to\Lambda_2(M_0),\quad \circledast\,\omega:=E\llcorner\omega \tag{9}$$

называется *оператором Ходжа.*

Утверждение. *Для любых $\omega,\,\widetilde\omega\in\Lambda_2(M_0)$ имеет место равенство*

$$\langle\,\circledast\,\omega,\circledast\,\widetilde\omega\,\rangle=-\langle\,\omega,\widetilde\omega\,\rangle. \tag{10}$$

Доказательство. Из формул (7) и (9) следует, что для бивекторов из базиса (2) верны равенства

$$\circledast\,e_{01}=-e_{23},\ \circledast\,e_{02}=e_{13},\ \circledast\,e_{03}=-e_{12},$$

$$\circledast e_{12} = e_{03}, \ \circledast e_{13} = -e_{02}, \ \circledast e_{23} = e_{01}. \tag{11}$$

Из (11) и (4) следует (10). $\square$

Из (10), (11) вытекает, что

$$\circledast\circledast = -\mathrm{id}\,, \tag{12}$$

$$\langle \circledast\omega, \tau \rangle = \langle \omega, \circledast\tau \rangle, \quad \omega, \tau \in \Lambda_2(M_0), \tag{13}$$

$$\mathrm{tr}\,\circledast = 0. \tag{14}$$

3.4. Конус простых бивекторов обозначим K_2.

Утверждение. *Справедлива эквивалентность*

$$\omega \in K_2 \Longleftrightarrow \langle \circledast\omega, \omega \rangle = 0. \tag{15}$$

Доказательство. Разложим бивекторы ω и $\circledast\omega$ по базису $\{e_\lambda\}$

$$\omega = \big(\omega^{01}e_{01} + \omega^{23}e_{23}\big) + \big(\omega^{02}e_{02} + \omega^{13}e_{13}\big) + \big(\omega^{03}e_{03} + \omega^{12}e_{12}\big),$$

$$\circledast\omega = \big(-\omega^{01}e_{23}+\omega^{23}e_{01}\big)+\big(\omega^{02}e_{13}-\omega^{13}e_{02}\big)+\big(-\omega^{03}e_{12}+\omega^{12}e_{03}\big). \tag{16}$$

Тогда

$$\langle \circledast\omega, \omega \rangle = 2\big(\omega^{01}\omega^{23} + \omega^{02}\omega^{13} - \omega^{03}\omega^{12}\big). \tag{17}$$

Бивектор ω прост тогда и только тогда, когда $\omega\wedge\omega = 0$ (см. [3], 7.2), что вместе с (17) влечет (15). $\square$

4.1. Модель многообразия $\mathbf{G^1}$ в пространстве бивекторов $\mathbf{\Lambda(M_0)}$. Рассмотрим ориентированную плоскость $\alpha \in G^1$. В этой плоскости можно выбрать такой базис $e = \{e_0, e_1\}$, что

$$e_0^2 = -e_1^2 = \Psi_T(e_0) = \Psi^\alpha(e) = 1. \tag{1}$$

Здесь Ψ^α означает функцию пространственной ориентации плоскости α. Любой другой базис $\widetilde{e} = \{\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_1\}$, удовлетворяющий соотношениям (1), получается из базиса e гиперболическим поворотом

$$\widetilde{e}_0 = \mathrm{ch}\,te_0 + \mathrm{sh}\,te_1, \quad \widetilde{e}_1 = \mathrm{sh}\,te_0 + \mathrm{ch}\,te_1. \tag{2}$$

Тогда

$$\widetilde{e}_0\wedge\widetilde{e}_1 = e_0\wedge e_1 := \omega, \quad \omega^2 = -1. \tag{3}$$

Значит каждому элементу $\alpha \in G^1$ однозначно сопоставлен простой мнимоединичный бивектор $P(\alpha) := \omega$. Тем самым построено отображение

$$P : G^1 \to K_2 \cap S^- := \overline{G}^{\,1}, \tag{4}$$

где

$$S^- = \{\omega \in \Lambda_2(M_0) \mid \omega^2 = -1\}. \tag{5}$$

Точно так же как и в [3, п. 6.2] устанавливается, что отображение P есть диффеоморфизм многообразия G^1 на подмногообразие $\overline{G}^{\,1} \subset \Lambda_2(M_0)$. Из (15) п. 3.4 и (4), (5) следует, что справедлива

Теорема. *Подмногообразие $\overline{G}^{\,1}$ пространства $\Lambda_2(M_0)$ можно задать системой из двух уравнений*

$$\langle\, \omega, \omega \,\rangle = -1, \quad \langle\, \circledast\, \omega, \omega \,\rangle = 0. \tag{6}$$

Отображение P (см. (4)) осуществляет канонический диффеоморфизм между многообразиями G^1 и $\overline{G}^{\,1}$, что позволяет отождествить эти многообразия.

4.2. Многообразие G^1 (отождествленное с $\overline{G}^{\,1}$) лежит в псевдоевклидовом пространстве $\Lambda_2(M_0)$, поэтому оно несет на себе индуцированную псевдориманову метрику. Каждое преобразование $h \in L_+^\dagger$, как линейное преобразование пространства $\Lambda_2(M_0)$, можно отождествить со своим дифференциалом dh. Так как преобразование Лоренца h не меняет скалярное произведение в $\Lambda_2(M_0)$ (см. (3) п. 3.1), то группа $L_+^\dagger$ действует на многообразие G^1 изометриями. Тем самым индуцированная псевдориманова метрика на $G^1 \subset \Lambda_2(M_0)$ является Лоренц-инвариантной.

4.3. Рассмотрим бивектор $\omega \in G^1$. Тетрады Минковского e, удовлетворяющие условию $\Psi_T(e) = \Psi_T(e_0) = 1$, будем называть *допустимыми*. Пусть для некоторой допустимой тетрады e верно $\omega = e_0 \wedge e_1$. Тогда бивекторы

$$\{e_{02},\, e_{03},\, e_{12},\, e_{13}\} \tag{7}$$

составляют ортонормированный базис касательного пространства $T_\omega G^1$. Действительно, для кривых на G^1, т.е. $\omega(t) = e_0 \wedge (\cos te_1 + \sin te_i)$, $i = 2, 3$ верно $\omega(0) = \omega$, $\omega'(0) = e_0 \wedge e_i$. А для кривых $\omega(t) = (\operatorname{ch} te_0 - \operatorname{sh} te_i) \wedge e_1$, $i = 2, 3$ будет $\omega(0) = \omega$, $\omega'(0) = e_1 \wedge e_i$. Из (4) п. 3.1 вытекает, что псевдориманова метрика многообразия G^1 имеет сигнатуру $(+ + - -)$.

5.1. Каноническое представление элемента $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{X}) \in \mathbf{TG^1}$. Рассмотрим простой ненулевой бивектор $\omega = f_1 \wedge f_2$. Определим плоскость

$$V_\omega := \operatorname{Lin}(\{f_1, f_2\}). \tag{1}$$

Лемма. *Пусть даны бивекторы $\omega \in G^1$, $X \in (T_\omega G^1 \cap K_2)$, $X \neq 0$. Тогда существует такой вектор $f \in M_0$, $f \neq 0$, что*

$$V_\omega \cap V_X = \operatorname{Lin}(f). \tag{2}$$

Доказателство. Разложим простой бивектор X по базису (8) п. 4.3

$$X = X^{02}e_{02} + X^{03}e_{03} + X^{12}e_{12} + X^{13}e_{13} = e_0 \wedge a + e_1 \wedge b, \quad \omega = e_{01}.$$

Так как бивектор X простой, то вектора a и b коллинеарны, значит найдутся такие λ, $\mu \in \mathbb{R}$ и вектор $c \in \operatorname{Lin}(e_2, e_3)$, коллинеарный a и b, что

$$X = (\lambda e_0 + \mu e_1) \wedge c = f \wedge c. \quad \square \tag{3}$$

Из (3) следует, что $X^2 = f^2 \cdot c^2 = -f^2|c^2|$. Поэтому

$$\operatorname{sign} X^2 = -\operatorname{sign} f^2. \tag{4}$$

5.2. Множество

$$K_0 := \left\{x \in \Lambda_2(M_0) \mid x^2 = 0\right\} \tag{5}$$

назовем *изотропным конусом*.

Теорема. *Пусть даны бивекторы $\omega \in G^1$, $X \in T_x G^1$ и*

$$X \notin K_0 \cap K_2. \tag{6}$$

Тогда существует, причем единственный набор попарно ортогональных векторов e_0, e_1, f_0, f_1 такой, что

$$\Psi_T(e_0) = 1, \quad e_0^2 = -e_1^2 = 1, \quad e_0 \wedge e_1 = \omega, \ f_0^2, \ f_1^2 < 0, \tag{7}$$

$$X = e_0 \wedge f_0 + f_1 \wedge e_1. \tag{8}$$

Доказательство. В силу (7) п. 4.3, для произвольной допустимой тетрады Минковского $\widetilde{e}$, удовлетворяющей условиям (7), справедливо разложение (8), но не обязательно будет $\langle \widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 \rangle = 0$. Повернем пару $(\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_1)$ на угол t по правилу $\widetilde{e}_0 = e_0 \operatorname{ch} t + e_1 \operatorname{sh} t$, $\widetilde{e}_1 = e_0 \operatorname{sh} t + e_1 \operatorname{ch} t$. Тогда будет

$$e_0 \wedge e_1 = \widetilde{e}_0 \wedge \widetilde{e}_1 = \omega,$$

$$X = \widetilde{e}_0 \wedge \widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_1 \wedge \widetilde{e}_1 = e_0 \wedge (\widetilde{f}_0 \operatorname{ch} t - \widetilde{f}_1 \operatorname{sh} t) + (-\widetilde{f}_0 \operatorname{sh} t + \widetilde{f}_1 \operatorname{ch} t) \wedge e_1 =$$

$$e_0 \wedge f_0(t) + f_1(t) \wedge e_1.$$

Вычисляя скалярное произведение $\langle f_0(t), f_1(t) \rangle$, убеждаемся, что

$$\langle f_0, f_1 \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle \widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 \rangle z^2 - (\widetilde{f}_0^2 + \widetilde{f}_1^2) z + \langle \widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 \rangle = 0, \;\; z = \operatorname{th} t. \quad (9)$$

Так как вектор $X \neq 0$, то $\widetilde{f}_0^2 + \widetilde{f}_1^2 \neq 0$. Если $\langle \widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 \rangle = 0$, то (9) имеет единственное решение и теорема доказана. Дискриминант уравнения (9) $\mathcal{D} = (\widetilde{f}_0^2 + \widetilde{f}_1^2)^2 - 4\langle \widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 \rangle^2 = (\widetilde{f}_0 + \widetilde{f}_1)^2 (\widetilde{f}_0 - \widetilde{f}_1)^2 \geqslant 0$, поэтому это уравнение относительно z всегда имеет два решения z и z^{-1}. Из неравенства $|z| = |\operatorname{th} t| < 1$ следует, что уравнение (9) относительно t всегда имеет единственное решение, за исключением варианта, когда

$$\mathcal{D} = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{f}_0 = \pm \widetilde{f}_1. \quad (10)$$

Но (10) противоречит требованию (6). $\square$

Следствие. *Если для пары $(\omega, X) \in TG^1$ выполнено условие (6), то найдутся такая допустимая тетрада Минковского e и числа α_0, $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, что*

$$\omega = e_{01}, \quad X = \alpha_0 e_{02} + \alpha_1 e_{31}. \quad (11)$$

5.3. Рассмотрим пару $(\omega, X) \in TG^1$ при условии

$$X \in (K_0 \cap K_2). \quad (12)$$

По лемме 5.1 и формулам (3), (4) вектор X можно представить в виде $X = f \wedge c$, где $f^2 = 0$, $c^2 < 0$, $\langle f, c \rangle = 0$. Следовательно, существует допустимая тетрада Минковского e, такая что

$$\omega = e_{01}, \quad X = \lambda (e_0 \pm e_1) \wedge e_3, \quad \lambda \neq 0. \quad (13)$$

6.1. Геодезические на многообразии G^1. Пусть $(\omega, X) \in TG^1$ и $X \notin (K_0 \cap K_2)$. Для пары (ω, X) имеет место разложение (11) п. 5.2. Определим вектора

$$e_0(t) := e_0 \operatorname{ch}(\alpha_1 t) + e_3 \operatorname{sh}(\alpha_1 t), \quad e_1(t) := e_1 \cos(\alpha_0 t) + e_2 \sin(\alpha_0 t),$$

$$e_3(t) := e_0 \mathrm{sh}\,(\alpha_1 t) + e_3 \mathrm{ch}\,(\alpha_1 t), \quad e_2(t) := -e_1 \sin(\alpha_0 t) + e_2 \cos(\alpha_0 t). \quad (1)$$

Из (1) вытекает, что при любом $t \in \mathbb{R}$ тетрада $e(t) = (e_0(t), e_i(t))_{i=1}^3$ является допустимой тетрадой Минковского. Поэтому

$$\omega(t) = e_0(t) \wedge e_1(t) \subset G^1. \qquad (2)$$

Из (6) п. 5.2 следует

$$\omega(0) = \omega, \quad \omega'(0) = X. \qquad (3)$$

Теорема. *Кривая $\omega(t)$ является геодезической на многообразии G^1.*

Доказательство. Из (1), (2) следует

$$\omega^2(t) = -1,\ \omega(t)' = \alpha_1 e_{31}(t) + \alpha_0 e_{02}(t),\ (\omega'(t))^2 = \alpha_1^2 - \alpha_0^2. \qquad (4)$$

$$\omega''(t) = (\alpha_1^2 - \alpha_0^2)\omega(t) - 2\alpha_0\alpha_1 e_{23}(t). \qquad (5)$$

В силу (7) п. 4.3 бивектор $\omega''(t)$ ортогонален касательному пространству $T_{\omega(t)}\,G^1$. Значит кривая $\omega(t)$ – геодезическая. □

Теорема. *Пусть для пары $(\omega, X) \in T_\omega\, G^1$, $X \neq 0$ выполнено условие*

$$X \in (K_0 \cap K_2). \qquad (6)$$

Тогда прямая

$$\omega(t) = \omega + tX \qquad (7)$$

лежит в многообразии G^1 и, тем самым, является геодезической, на этом многообразии.

Доказательство. Из (13) п. 5.3 следует, что

$$\big(\omega(t)\big)^2 = \omega^2 = -1, \quad \langle \circledast\, \omega(t), \omega(t) \rangle = 0.$$

По теореме 4.1 бивектор $\omega(t) \in G^1$ □.

7.1. Индикатриса направлений физической частицы. В четырехмерном точечном пространстве Минковского M каждая времениподобная кривая

$$x = x(s), \quad \dot{x}^2(s) = 1 \qquad (1)$$

интерпретируется как физическая частица. Если частица инерциальна, то есть $\ddot{x}(s) = 0$, то все одномерные направления ее физического пространства $M(x) = M/\mathrm{Lin}\,(\dot{x})$ равноправны.

7.2. Пусть физическая частица x имеет ненулевое ускорение $\ddot{x}(s) \neq 0$. Ориентированное соприкасающееся пространство $V(s) = \mathrm{Lin}\,(\dot{x}(s), \ddot{x}(s)) \subset M$ назовем *одномерным направлением физического пространства частицы x в событии $x(s)$*. Ориентация плоскости $V(s)$ задается базисом $(\dot{x}(s), \ddot{x}(s))$.

Как показано в п. 4.1 такие плоскости можно отождествить с бивекторами многообразия G^1

$$\omega(s) = \frac{\dot{x}(s) \wedge \ddot{x}(s)}{|\dot{x}(s) \wedge \ddot{x}(s)|}. \tag{2}$$

Кривую $\omega = \omega(s) \subset G^1$ будем называть *индикатрисой направлений физической частицы x*. Из (2) следует, что $\dot{\omega} = \dot{x} \wedge a$, $a \in M_0$. Значит либо $\dot{\omega} = 0$, либо плоскость $V_{\dot{\omega}}$ содержит времениподобное направление, тогда $\dot{\omega}^2 < 0$.

Интеграл

$$\Psi(x, s_1, s_2) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \left[-(\dot{\omega}(t))^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt, \quad s_1 \leq s_2 \tag{3}$$

назовем *поворотом направления* физического пространства частицы x от события $x(s_1)$ до события $x(s_2)$.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени).* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **6** (1968), 1–496.
2. С. Е. Козлов, *Математические основы специальной теории относительности и пространство Лобачевского.* Изд. СПбГУ, СПб. (1995).
3. С. Е. Козлов, *Геометрия вещественных грассмановых многообразий. Части* I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **246** (1997).
4. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Введение в риманову геометрию.* Наука, СПб. (1994).

Kozlov S. E. The topology and the Lorentz-invariant pseudo-Riemannian metric of the manifold of directions in the physical space.

In the mathematical model of the special theory of relativity the two-dimensional Minkowski subspace is interpreted as a one-dimensional direction of the physical space. The manifold of such planes is naturally provided with the structure of a pseudoriemann manifold, the group of isochronous Lorentz transformations on which acts by isometries transitively. The present paper is dedicated to the study of the topology and metric geometry of this manifold.

С.-Петербургский
Государственный университет

Поступило 11 декабря 1996 г.