В. Р. Крым

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА КИНЕМАТИЧЕСКОГО ТИПА

§1. Введение

1.1. Продолжая изучение мыслимых моделей пространственно-временных структур, развитое Буземаном [1] и Пименовым [2], рассмотрим строение пространств, обладающих одновременно тремя структурами: структурой конечномерного линейного пространства над полем $\mathbb{R}$, топологической структурой (системой Δ открытых множеств) и частичным упорядочением. В физике последнее трактуют как предшествование или отношение *причинности*. Нас интересуют свойства, вытекающие из следующей системы аксиом.

Определение. *Тройку $(L, \Delta, <)$ назовем линейной кинематикой, если она удовлетворяет следующим трем группам аксиом.*

1.2. Первая группа аксиом.

H_1. Отображение сложения $+ : L \times L \to L$ непрерывно.

H_2. При любом $\alpha \in \mathbb{R}$ отображение умножения на α непрерывно.

Отсюда легко вывести, что при любом $a \in L$ транслят $a + U$ открытого множества $U \in \Delta$ открыт, транслят замкнутого множества замкнут, гомотетия $a \mapsto \alpha a$ с ненулевым коэффициентом переводит открытые множества в открытые и замкнутые в замкнутые.

1.3. Вторая группа аксиом.

O_1. Отношение порядка транзитивно: из $a < b$ и $b < c$ следует, что $a < c$.

O_2. Отношение порядка строгое: невозможно $a < a$.

1.4. Третья группа аксиом.

ЛК_1. $\forall\, a, b \in L \quad a < b \Rightarrow \forall\, u \in L \quad a + u < b + u$.

ЛК_2. $\forall\, a, b \in L \quad a < b \Rightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha a < \alpha b$, где $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

ЛК$_3$. $\forall a \in L \quad \forall U \in \Delta \quad a \in U \Rightarrow \exists b \in U \quad a < b$, т.е. во всякой окрестности U любой точки a существует хоть одна точка, следующая за a.

ЛК$_4$. Прошлое нулевой точки $Q_0^- := \{u \in L \mid u < 0\}$ открыто.

Аксиомы ЛК$_1$–ЛК$_4$ аналогичны аксиомам ВК$_1$–ВК$_4$ работы [2], стр. 15, но в отличие от этой работы мы не предполагаем, что топология в пространстве L обязательно евклидова. В связи с этим возникают две задачи. 1. Выяснить, какие топологии совместимы с данной системой аксиом. 2. Определить, какие из структур, построенных в [2], сохраняются при переходе к данной системе аксиом.

§2. Простейшие следствия из аксиом

2.1. Из ЛК$_3$ следует, что топология в L не является дискретной. Иначе в одноточечной окрестности не будет следующей точки. Из ЛК$_4$ следует, что топология в L не антидискретна.

2.2. $\forall a, b \in L \quad a < b \Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}_- \quad \alpha a > \alpha b$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0)$.

Доказательство. $a < b \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow -b < -a \Rightarrow \forall \beta \in \mathbb{R}_+$ $\beta(-b) < \beta(-a)$, т.е. $-\beta a > -\beta b$.

2.3. $\forall a \in L \; \forall U \in \Delta \; a \in U \Rightarrow \exists c \in U \; c < a$, т.е. во всякой окрестности U любой точки a существует хотя бы одна предшествующая точка.

Доказательство. Сначала докажем, что во всякой окрестности V нулевой точки есть точка, предшествующая нулевой. Обозначим $W := (-1)V$, $0 \in W$. По ЛК$_3$ в W найдется $e > 0$, тогда $-e$ – искомая точка. Пусть теперь $a \in L$ и U – окрестность точки a. Тогда $-a + U$ открыто и содержит нулевую точку. Найдется $d \in -a + U$, $d < 0$, следовательно, $d + a \in U$ и $d + a < a$.

2.4. Для любой точки $a \in L$ ее прошлое $Q_a^- := \{u \in L \mid u < a\}$ и ее будущее $Q_a^+ := \{u \in L \mid u > a\}$ открыты.

Доказательство. Для нулевой точки Q_0^- открыто по ЛК$_4$, а $Q_0^+ = (-1)Q_0^-$ открыто по Н$_2$. Для любого $a \in L$ имеем, что $Q_a^+ = a + Q_0^+$, $Q_a^- = a + Q_0^-$ – открыты по Н$_1$.

2.5. $\forall a, b \in L \quad a < b \Rightarrow Q_a^+ \supset Q_b^+$, $Q_a^- \subset Q_b^-$. Это следует из транзитивности порядка.

2.6. Для любого $a \in L$ множества Q_a^+, Q_a^- выпуклы.

Доказательство. Заметим, что из $a > 0$, $b > 0$ следует, что $a + b > b > 0$. Так как выпуклость сохраняется при трансляциях и гомотетии, нам достаточно проверить, что Q_0^+ выпукло. Пусть $u, v \in Q_0^+$ и $w = (1-\lambda)u + \lambda v$, $0 < \lambda < 1$. Тогда $(1-\lambda)u > 0$ и $\lambda v > 0$, откуда $w > 0$.

2.7. Для любого $a \in L$ множества Q_a^+, Q_a^- – конусы с вершиной a. Это следует из легко проверяемого факта, что Q_0^+ – конус с вершиной в нуле. Из аксиомы O_2 следует, что вершины конусам не принадлежат.

§3. Возможные топологии

3.1. Приступим к вопросу, какие топологии совместимы с данной системой аксиом. Зная, что выпуклые конусы Q_0^+ и $Q_0^- = -Q_0^+$ открыты и что открытость множеств сохраняется при трансляциях, нетрудно найти в линейном пространстве L *слабейшую* топологию, совместимую с этими двумя фактами. Очевидно, что слабейшая топология в L тесно связана с видом конуса Q_0^+. Начнем со следующего замечания.

3.2. Если $\operatorname{aff} Q_0^+ \neq L$, то все пространство L естественно разложить в прямое произведение подпространств $L' = \operatorname{aff} Q_0^+$ и $M = L/L'$. При этом порядок и слабейшая топология в L' определяется конусом Q_0^+, само L' и все его трансляты открыты, так что топология в M дискретна. Поэтому ответ на поставленный в 3.1 вопрос достаточно найти для случая $\operatorname{aff} Q_0^+ = L$.

Рассмотрим сначала пространства малых размерностей.

3.3. Пусть $L = \mathfrak{R}^1$. Представим $\mathfrak{R}^1$ точками числовой оси $\mathbb{R}^1$, Q_0^+ – открытый луч. Тогда луч Q_0^- тоже открыт. Открыты и пересечения любых двух их транслятов, т.е. все отрезки вида $a < t < b$. Значит, слабейшая топология – евклидова. Это совместимо с аксиомами §1.

3.4. Пусть $L = \mathfrak{R}^2$. Представим $\mathfrak{R}^2$ точками декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ (с сохранением линейной структуры). Рассмотрим 5 возможностей.

1. Q_0^+ – открытый в плоскости $\mathbb{R}^2$ острый (т.е. не содержащий прямых) выпуклый сектор (его угол меньше π).

2. Q_0^+ – открытый в плоскости $\mathbb{R}^2$ выпуклый сектор, содержащий прямые, т.е. открытая полуплоскость.

3. Q_0^+ – аналогичный (2) сектор с включением одного из его крайних лучей.

4. Q_0^+ – аналогичный (1) сектор с включением одного из его крайних лучей.

5. Q_0^+ – аналогичный (1) сектор с включением обоих крайних лучей. В случае (2) включение обоих лучей невозможно в силу аксиомы O_2.

3.4.1. В случае (1) слабейшая топология евклидова. Если на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ ввести координаты (x, t), направив ось t по биссектрисе конуса Q_0^+, то видно, что это – модель двумерного пространства-времени специальной теории относительности. Аксиомы §1 выполнены.

3.4.2. В случае (2) введем на $\mathbb{R}^2$ координаты, направив ось x по краю полуплоскости Q_0^+. Слабейшую топологию можно определить, приняв за базу все полосы $a < t < b$. Топология отлична от евклидовой, $L = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_a$, где $\mathbb{R}^1_a$ – числовая прямая с *антидискретной* топологией на ней. Это – модель двумерного галилеева пространства-времени. Аксиомы §1 выполнены.

3.4.3. В случае (3) введем на $\mathbb{R}^2$ координаты (x_1, x_2), направив ось x_2 по краю полуплоскости Q_0^+, причем в направлении того крайнего луча, который включен в состав $Q_0^+ = Q^+_{(0,0)}$, рис. 1. Порядок, вводимый таким конусом, соответствует строгому лингвистическому упорядочению: $(x_1, x_2) < (y_1, y_2) \Leftrightarrow (x_1 < y_1$ или $(x_1 = y_1$ и $x_2 < y_2))$. В этом случае из открытости конусов $Q^+_{(0,a)}$ и $Q^-_{(0,b)}$ следует, что открыто их пересечение, т.е. отрезок $a < x_2 < b$ на оси x_2. Поэтому сама ось x_2 и все прямые $x_1 = \mathrm{const}$ суть открытые множества. Следовательно, слабейшая топология $\mathfrak{R}^2$ есть топология произведения оси x_2 (с евклидовой топологией на ней) на ось x_1 с *дискретной* топологией, $\mathfrak{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1_d$. Аксиомы §1 выполнены.

3.4.4. В случае (4), рис. 2, упорядочивание отлично от лингвистического, т.к. это лишь частичное упорядочивание. Но по тем же причинам, что и в случае (3), все прямые $x_1 = \mathrm{const}$ – открытые множества, и $\mathfrak{R}^2$ имеет топологию произведения оси x_2 с евклидовой топологией на ось x_1 с дискретной топологией. Аксиомы §1 выполнены.

3.4.5. В случае (5) введем на $\mathfrak{R}^2$ косоугольные координаты, направив оси x, y по двум крайним лучам конуса Q_0^+. По тем же соображениям, что и в 3.4.3., каждая прямая, параллельная осям, должна быть открытым множеством. Но тогда и их пересечение – точка – открыта, и топология в $\mathfrak{R}^2$ дискретная. Это

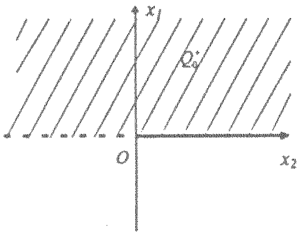

Рис. 1.

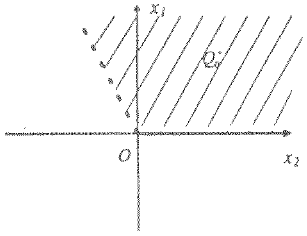

Рис. 2

несовместимо с аксиомой ЛК$_3$. Поэтому случай (5) для линейной кинематики невозможен.

3.5. Для произвольной конечной размерности n изобразим $L = \mathfrak{R}^n$, сохраняя линейную структуру, точками евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и выделим случай, когда конус Q_0^+ открыт не только в $\mathfrak{R}^n$, но и в $\mathbb{R}^n$. Открытый выпуклый конус $Q_0^+ \subset \mathbb{R}^n$, не содержащий своей вершины и потому отличный от всего $\mathbb{R}^n$, всегда можно представить в виде $Q_0^+ = C \times \mathbb{R}^k$, где C – острый (т.е. не содержащий прямых) конус, и $0 \leqslant k < n$. В связи с этим все пространство можно представить как декартово произведение линейных пространств $\mathfrak{R}^n = \mathfrak{R}^{n-k} \times \mathfrak{R}^k$. Выпуклый острый конус C открыт в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n-k}$ и следовательно, слабейшая топология, которую он индуцирует в $\mathfrak{R}^{n-k}$, является евклидовой. Поэтому в $\mathfrak{R}^{n-k}$ за базу топологии можно принять все $(n-k)$-мерные открытые шары B. Соответственно в $\mathfrak{R}^n$ базой топологии будут "трубчатые" окрестности $B \times \mathfrak{R}^k$ подпространства $\mathfrak{R}^k$ и их трансляты. Следовательно, топологическое пространство $\mathfrak{R}^n$ допускает разложение $\mathfrak{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k_a$, где $\mathbb{R}^k_a$ есть k-мерное линейное пространство с *антидискретной* топологией. Все аксиомы §1 выполнены. Подчеркнем, однако, что всюду в этом разделе речь идет о слабейшей топологии, совместимой с этими аксиомами.

3.6. Допустим, что при изображении $\mathfrak{R}^n$ в виде $\mathbb{R}^n$ к конусу Q_0^+ причислен хотя бы один луч, идущий по границе ∂Q_0^+ (граница в смысле евклидовой топологии в $\mathbb{R}^n$). Найдется опорная к Q_0^+ гиперплоскость P в $\mathbb{R}^n$, которой этот луч принадлежит. Трансляция открытых в $\mathfrak{R}^n$ n-мерных конусов Q_0^+ и Q_0^- позволяют убедиться, что открыты оба замкнутых (в евлидовой топологии) полупространства, на которые гиперплоскость P делит $\mathfrak{R}^n$. Следовательно, открыта сама гиперплоскость P и все ее трансляты. Поэтому $\mathfrak{R}^n$ разлагается в произведение прямой $\mathbb{R}_d$ с *дискретной* топологией и гиперплоскости P, причем топология в P определяется конусом $Q_0^+ \cap P$. Повторяя с $\mathfrak{R}^{n-1} = P$ тот же процесс, мы, понижая размерность, придем к случаю 3.5, ибо полная дискретность топологии исключена.

Итак, доказана следующая теорема.

3.7. Теорема 1. *Пусть в линейной кинематике* $(L, \Delta, <)$ *размерность конуса* Q_0^+ *равна* $\dim L$, *и пусть* Δ – *слабейшая топология линейной кинематики. Тогда* L *разлагается в декартово произведение трех линейных топологических пространств,* $L = L' \times A \times D$, *причем на* L' *реализуется евклидова топология, на* A – *антидискретная и на* D – *дискретная. Если конус будущего* Q_0^+ *содержит прямые или ему принадлежит хотя бы один луч, идущий по его границе (границе в смысле евклидовой топологии в* L*), то это разложение является нетривиальным, причем в первом случае* $\dim A > 0$, *а во втором* $\dim D > 0$.

3.8. Наличие дискретной компоненты иллюстрирует концепцию "параллельных миров" [3]. Пусть, например, $\dim D > 0$. Тогда не существует пути (непрерывного отображения, отрезка), соединяющего точки (x_1, d_1) и (x_2, d_2), $d_1 \neq d_2$, из различных слоев. В то же время отношение причинности является общим для всех слоев, т.е. причинная связь между "мирами" (слоями пространства-времени) сохраняется.

3.9. Если $\dim Q_0^+ < \dim L$, то в разложении $L = L' \times A \times D$ добавится еще один сомножитель D' (как и D, с дискретной топологией), на который не распространяется отношение причинности.

3.10. Повторим, что все результаты этого параграфа относятся к слабейшей топологии, совместимой с заданным отношением порядка. Разумеется, эту топологию можно усилить так, что топологическое пространство L уже не будет декартовым произведением своих подпространств (например, к расслоению $L = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_a^k$ можно добавить дополнения всех конечных множеств, объявив их открытыми).

Перейдем с другим алгебраическим структурам, связанным с линейными кинематиками.

§4. Предпорядок и пространство слоев одновременности

4.1. Определение. *Введем отношение предпорядка* $\leqslant$, *определяя его условием* $\forall\, a, b \in L \quad a \leqslant b \Leftrightarrow \quad a \in \operatorname{Cl} Q_b^-$.

Отношение $\leqslant$ действительно является отношением предпорядка, т.е. рефлексивно и транзитивно. Отметим сначала свойства конусов Q_a^+, Q_a^-.

4.1.1. $\forall\, a \in L \quad Q_a^+ = a + Q_0^+$, $Q_a^- = a + Q_0^-$.

4.1.2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \alpha Q_0^+ = Q_0^+$, $\alpha Q_0^- = Q_0^-$, $\alpha \operatorname{Cl} Q_0^+ = \operatorname{Cl} Q_0^+$, $\alpha \operatorname{Cl} Q_0^- = \operatorname{Cl} Q_0^-$ (самоподобие).

Отсюда следует, что отношение $\leqslant$ устойчиво к сложению и умножению на скаляры из $\mathbb{R}_+$.

4.1.3. $\forall\, a, b \in L \quad a \leqslant b \Rightarrow \forall\, u \in L \quad a + u \leqslant b + u$.

4.1.4. $\forall\, a, b \in L \quad a \leqslant b \Rightarrow \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha a \leqslant \alpha b$.

Рефлексивность $\leqslant$ следует из 2.3.

4.1.5. $\forall\, a \in L \quad a \leqslant a$.

Перед доказательством транзитивности отметим два полезных свойства.

4.1.6. $\forall\, a, b, c \in L \quad a < b \ \&\ b \leqslant c \Rightarrow a < c$;
$\forall\, a, b, c \in L \quad a \leqslant b \ \&\ b < c \Rightarrow a < c$.

4.1.7. $\forall\, a, b, c \in L \quad a \leqslant b \ \&\ b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$ (транзитивность).

Доказательство. Пусть $a \in \operatorname{Cl} Q_b^-$, $b \in \operatorname{Cl} Q_c^-$, U – любая окрестность точки a. Тогда существует $u \in U \cap Q_b^- \neq \varnothing$, и по свойству (6) имеем $u < b \leqslant c \Rightarrow u < c \Rightarrow u \in Q_c^- \Rightarrow U \cap Q_b^- \subset Q_c^- \Rightarrow U \cap Q_c^- \neq \varnothing$, т.е. всякая окрестность точки a пересекается с Q_c^-. Следовательно, $a \in \operatorname{Cl} Q_c^-$, т.е. $a \leqslant c$.

4.1.8. Для любого $a \in L$ множества $\operatorname{Cl} Q_a^+$, $\operatorname{Cl} Q_a^-$ суть выпуклые конусы с вершиной a (вершина принадлежит конусу по свойству (5)).

Доказательство вполне аналогично доказательствам свойств 2.6 и 2.7 с заменой $<$ на $\leqslant$.

4.1.9. $\forall\, a \in L \quad \operatorname{Int} \operatorname{Cl} Q_a^+ = Q_a^+$, $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} Q_a^- = Q_a^-$.

Доказательство. Проверим для примера первое утверждение. Очевидно, что $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} Q_a^+ \supset Q_a^+$. Докажем, что ни одна точка $u \in \operatorname{Cl} Q_a^+$, $u \notin Q_a^+$ не может принадлежать $\operatorname{Int} \operatorname{Cl} Q_a^+$. Любая такая точка $u \in \partial Q_a^+$. По аксиоме ЛК$_3$ во всякой окрестности U точки u найдется точка $v < u$. Если $v \in \operatorname{Cl} Q_a^+$, то $a \leqslant v < u$, что противоречит $u \notin Q_a^+$. Значит, в каждой окрестности точки u есть точки, не принадлежащие $\mathrm{Cl}\,Q_a^+$, т.е. $u \notin \mathrm{Int}\,\mathrm{Cl}\,Q_a^+$. (Мы воспользовались легко проверяемым фактом, что $a \in \mathrm{Cl}\,Q_v^- \Leftrightarrow v \in \mathrm{Cl}\,Q_a^+$).

4.2. Определение. *Отношение предпорядка $\leqslant$ порождает на L отношение эквивалентности: $\forall\, a, b \in L \ \ a \sim b \Leftrightarrow a \leqslant b \ \&\ b \leqslant a$.*

В физике это отношение называют отношением *абсолютной одновременности*. Оно симметрично по определению, а также рефлексивно и транзитивно по 4.1.5 и 4.1.7.

4.3. Определение. *Класс эквивалентности точки $a \in L$ по отношению $\sim$ обозначим $\widetilde{a} := \{b \in L \mid a \sim b\}$. Это множество естественно назвать слоем одновременности точки a.*

Сразу же отметим связь этого понятия с результатами §3. Пусть L разлагается в декартово произведение трех линейных топологических пространств, $L = L' \times A \times D$ с евклидовой, антидискретной и дискретной топологией, соответственно. Тогда класс эквивалентности точки $a = (a_{L'}, a_A, a_D)$ есть $\widetilde{a} = a_{L'} \times A \times a_D$, т.е. если конус Q_0^+ содержит прямые, то слой одновременности $\widetilde{a}$ состоит в точности из объединения всех транслятов этих прямых, проходящих через точку a. Действительно, наличие операции замыкания в определении 4.1 приводит к тому, что все A (точнее, его транслят) попадает в $\widetilde{a}$. С другой стороны, слой одновременности не может быть шире, так как конус $Q_0^+ \cap L'$ является острым.

4.3.1. Для $\forall\, a \in L$ множества Q_a^+, Q_a^-, $\mathrm{Cl}\,Q_a^+$, $\mathrm{Cl}\,Q_a^-$ состоят из полных классов эквивалентности.

4.3.2. Класс $\widetilde{0}$ есть линейное подпространство в L. (В условиях теоремы 1 $\widetilde{0}$ совпадает с A).

4.3.3. Для $\forall\, a \in L$ $\widetilde{a} = a + \widetilde{0}$.

4.3.4. Для $\forall\, a \in L$ множество $\widetilde{a}$ замкнуто ($\widetilde{a} = \mathrm{Cl}\,Q_a^+ \cap \mathrm{Cl}\,Q_a^-$).

4.3.5. Для $\forall\, a \in L$ $\mathrm{Int}\,\widetilde{a} = \varnothing$. (Следствие 4.3.4 и 4.1.9). (В условиях теоремы 1 это означает, что $\dim L' \geqslant 1$).

4.4. Пространство слоев одновременности.

Определение. *Множество классов по отношению эквивалентности $\sim$ обозначим $\widetilde{L}$, $\widetilde{L} := L/\sim$.*

Поскольку все классы эквивалентности являются транслятами подпространства $\widetilde{0}$ (пп. 4.3.2, 4.3.3), множество $\widetilde{L}$ наследует от

L линейную структуру, при которой L есть прямое произведение линейных пространств $L = \widetilde{L} \times \widetilde{0}$.

Как фактор-пространство $\widetilde{L}$ обычным образом наследует от L топологическую структуру $(\widetilde{\Delta})$. Обозначим $\pi : L \to \widetilde{L}$ отображение проекции при факторизации. Тогда $A \subset \widetilde{L}$ открыто в том и только в том случае, когда $\pi^{-1}(A)$ открыто в L.

В силу теоремы 1 §3 следующее утверждение очевидно: *пространство* $\widetilde{L}$ *хаусдорфово.*

Действительно, факторпространство хаусдорфово даже в слабейшей топологии линейной кинематики L.

4.4.1. Лемма. $\pi : L \to \widetilde{L}$ *– открытое отображение, т.е. если* $A \subset L$ *открыто, то и* $\pi(A) \subset \widetilde{L}$ *открыто.*

Доказательство. Достаточно дополнить A до полных классов всех элементов из A и убедиться, что так расширенное множество $B := \pi^{-1}(\pi(A))$ открыто.

Пусть $b \in B$, тогда $\exists a \in A$ такой, что $a \sim b$ и найдется открытое множество U такое, что $a \in U \subset A$. Рассмотрим открытое (по аксиоме H_1) множество $V := (b - a) + U$, $b \in V$. Мы утверждаем, что $V \subset B$. Действительно, для любого $v \in V \;\; \exists u \in U \; v = b - a + u$. Но $a \sim b \Rightarrow a - b \sim 0 \Rightarrow v \sim u$, что вместе с $u \in A$ дает $v \in B$. Итак, каждая точка $b \in B$ принадлежит B вместе с некоторой своей окрестностью, значит, B открыто.

4.4.2. Мы уже отмечали, что эквивалентность $\sim$ устойчива к сложению векторов и к умножению на скаляры. Кроме того, отношение порядка $<$ также устойчиво к эквивалентности. Это немедленно следует из 4.1.6.

1. $\forall a, b, c \in L \;\; a < b \;\&\; b \sim c \Rightarrow a < c$.
2. $\forall a, b, c \in L \;\; a \sim b \;\&\; b < c \Rightarrow a < c$.

Следовательно, факторпространство $\widetilde{L}$ наследует отношение причинности из L.

Теорема 2. *Пространство* $\widetilde{L}$ *с отношением порядка* $\widetilde{<}$ *и фактортопологией* $\widetilde{\Delta}$ *является линейной кинематикой.*

Доказательство. Проверим, что все аксиомы линейной кинематики выполнены.

Непрерывность сложения следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} L\times L \arrow[r, "+"] \arrow[d, "{(\pi,\pi)}"'] & L \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{L}\times\widetilde{L} \arrow[r, "+"] & \widetilde{L} \end{tikzcd} \qquad \forall\, a, b \in L \qquad \pi(a)+\pi(b)=\pi(a+b).$$

Пусть $A \subset \widetilde{L}$ открыто. Тогда $\pi^{-1}(A) \subset L$ также открыто. Сложение в L непрерывно, следовательно, прообраз B множества $\pi^{-1}(A)$ при отображении $+: L \times L \to L$ открыт в $L \times L$. $\pi : L \to \widetilde{L}$ – открытое отображение, следовательно, $(\pi,\pi) : L \times L \to \widetilde{L} \times \widetilde{L}$ – также открытое отображение. Значит, образ $C := (\pi,\pi)(B)$ при этом отображении открыт в $\widetilde{L}\times\widetilde{L}$. В силу коммутативности диаграммы множество C совпадает с прообразом множества A при отображении $+ : \widetilde{L} \times \widetilde{L} \to \widetilde{L}$. Следовательно, этот прообраз открыт, и сложение в факторпространстве $\widetilde{L}$ непрерывно.

Проверим аксиому H_2: для $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ отображение $\alpha_0 : \widetilde{L} \to \widetilde{L}$: $\widetilde{a} \mapsto \alpha\widetilde{a}$ непрерывно. Если $\alpha = 0$, то это отображение постоянное и, следовательно, непрерывное. Пусть $\alpha \neq 0$. Соответствующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[d, "\pi"'] & L \arrow[d, "\pi"] \\ \widetilde{L} \arrow[r, "\alpha_0"] & \widetilde{L} \end{tikzcd} \qquad \pi \circ \alpha_0 = \alpha_0 \circ \pi.$$

Те же рассуждения, что и в предыдущем случае, доказывают утверждение.

Проверка остальных аксиом тривиальна.

4.4.3. Отметим, что слои одновременности могут появлятся в линейных кинематиках в силу разных физических обстоятельств. Так, в примере галилеевой кинематики $\mathbb{R}^3\times t$, где конус будущего – полупространство $t > 0$, слоем одновременности является $\mathbb{R}^3$. В примере кинематики $\mathbb{R}^4_1\times\mathbb{R}$ (пространство Минковского со слоем $\mathbb{R}$ над каждой точкой, используемом в [2], стр. 399, для моделирования электромагнетизма) слоем одновременности является $\mathbb{R}$.

§5. Метрические линейные кинематики

5.1. Основные определения. В §1 мы сначала ввели отношение порядка, а затем по нему построили конус будущего Q_0^+. Здесь нам будет удобнее поступить наоборот.

Определение. *Пусть L – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, Q_0^+ – выпуклый конус в L с вершиной в точке 0, $0 \notin Q_0^+$. Обозначим $Q_0^- := (-1)Q_0^+$, $F := Q_0^+ \cup Q_0^- \cup \{0\}$. Мы будем рассматривать только такие конусы, для которых выполняется следующая аксиома:*

M_1. $\forall\, a \in Q_0^+ \ \ \forall\, b \in L \ \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \ a + \alpha b \in Q_0^+$.

Всякий выпуклый конус задает отношение частичного порядка на L: пусть a, $b \in L$, полагаем $a < b \Leftrightarrow b - a \in Q_0^+$.

Отношение $<$ транзитивно ($\forall\, a, b \in L \ a < b \ \&\ b < c \Rightarrow b - a \in Q_0^+ \ \&\ c - b \in Q_0^+ \Rightarrow c - a \in Q_0^+ \Rightarrow a < c$) и антирефлексивно ($0 \notin Q_0^+ \Rightarrow \forall\, a \in L\ \neg(a < a)$). Т.о., выполнены аксиомы O_1 и O_2 из §1.

Определение. *Функцию $f : F \to \mathbb{R}$, строго положительную на Q_0^+, назовем времениподобной нормой (или псевдонормой) в F, если выполняются следующие две аксиомы:*

M_2. $\forall\, a, b \in L \ a > 0 \ \&\ b > 0 \Rightarrow f(a+b) \geqslant f(a) + f(b)$ *(неравенство Эйнштейна, или неравенство времени).*

M_3. $\forall\, a \in F \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \ \ f(\alpha a) = \alpha f(a)$ *(однородность).*

Поскольку Q_0^+ – выпуклый конус, формулировка M_2 корректна ($a \in Q_0^+ \ \&\ b \in Q_0^+ \Rightarrow a+b \in Q_0^+$). Корректность M_3 следует из того, что F – конус, симметричный относительно нуля. Кроме того, так как конус Q_0^+ непуст, то $f(0) = f(0x) = 0f(x) = 0$ $(x \in Q_0^+)$.

Поскольку f строго положительна только на Q_0^+, можно дать другое определение частичного порядка, эквивалентное первому:

$$\forall\, a, b \in L \ \ a < b \Leftrightarrow b - a \in F \ \&\ f(b - a) > 0.$$

При таком определении транзитивность отношения $<$ следует из неравенства Эйнштейна, антирефлексивность – из того, что $f(0) = 0$. С учетом всего сказанного, аксиома M_1 может быть сформулирована чисто функционально:

M_1'. $\forall\, a \in F \ f(a) > 0 \Rightarrow \forall\, b \in L \ \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \ \ a + \alpha b \in F \ \&\ f(a + \alpha b) > 0$.

Определение. *Обозначим* $W := \{(a,b) \mid a,b \in L,\ b-a \in F\} \subset L \times L$. *Времениподобной метрикой (или псевдометрикой) в* W *назовем функцию* $\rho : W \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) := f(x-y)$. (*В физике псевдометрика имеет смысл ориентированного расстояния между двумя событиями, интервал между которыми времениподобен*).

Неравенство Эйнштейна для времениподобной метрики имеет вид

M_2'. $\forall\, a,b,c \in L \quad a > b \,\&\, b > c \Rightarrow \rho(a,c) \geqslant \rho(a,b) + \rho(b,c)$.

Буземан ([1], стр. 5) писал, что метрика, удовлетворяющая неравенству Эйнштейна, не определяет топологии на пространстве L. Мы докажем, что при наличии дополнительных аксиом M_1 и M_3 псевдометрика определяет на пространстве L топологию, причем эта топология сильно отличается от евклидовой. Мы также найдем дополнительное условие, при котором линейное пространство L с заданной на некотором конусе в нем псевдонормой является линейной кинематикой.

5.2. Следствия из аксиом

5.2.1. $\forall\, a \in Q_0^+ \quad \forall\, b \in L \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad a + \alpha b \in Q_0^+ \;\Rightarrow\; (\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+\ \beta < \alpha \Rightarrow a + \beta b \in Q_0^+)$.

Это утверждение немедленно следует из выпуклости конуса Q_0^+. Оно допускает также функциональную формулировку. Пусть $a \in F$, $b \in L$, $f(a) > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a + \alpha b \in F$, $f(a+\alpha b) > 0$. Тогда $\forall\, \beta \in \mathbb{R}_+\ \beta < \alpha \Rightarrow a + \beta b \in F \,\&\, f(a+\beta b) > 0$.

5.2.2. $\forall\, a{\in}F\ \forall\, \varepsilon{\in}\mathbb{R}_+\ f(a){>}\varepsilon \Rightarrow \forall\, b{\in}L\ \exists \alpha{\in}\mathbb{R}_+\ a{+}\alpha b{\in}F \ \&\ f(a{+}\alpha b){>}\varepsilon$.

Доказательство. Возьмем $\delta > 0$ и запишем $a = a - \delta a + \delta a$. По M_1, $\exists\, \beta \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f(\delta a + \beta b) > 0$. Следовательно, $f(a+\beta b) \geqslant f(a-\delta a) + f(\delta a + \beta b) > (1-\delta) f(a) > (1-\delta)\varepsilon$. Левая часть этого неравенства от δ не зависит. Беря $\sup\limits_{\delta \in \mathbb{R}_+}$, получаем, что $f(a+\beta b) \geqslant \varepsilon$. Теперь возьмем $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha < \beta$. Тогда

$$f(a+\alpha b) = f\left(\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{\alpha}a + \beta b\right)\right) = \frac{\alpha}{\beta} f\left(a + \beta b + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) a\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{\beta}\left(f(a+\beta b) + \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) f(a)\right) \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\varepsilon + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) f(a) > \varepsilon,$$

поскольку при $\alpha = \beta$ в последнем утверждении имеет место равенство, и в левой части этого утверждения стоит линейная функция от α, которая возрастает, если α убывает.

5.2.3. Пусть $a \in F$, $b \in L$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $f(a) > \varepsilon$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $a+\alpha b \in F$, $f(a+\alpha b) > \varepsilon$. Тогда $\forall \beta \in \mathbb{R}_+ \ \beta < \alpha \Rightarrow a+\beta b \in F \,\&\, f(a+\beta b) > \varepsilon$. (Именно это было доказано при доказательстве предыдущего следствия).

5.3. Построение топологии с помощью псевдометрики.

5.3.1. Определение. *Назовем экстрашаром радиуса* ε *множество* $B_\varepsilon(a) := \{x \in L \mid x - a \in F \,\&\, \rho(x,a) > \varepsilon\}$.

Теорема 3. *Экстрашары* $\{B_\varepsilon(a) \mid a \in L,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}$ *составляют базу некоторой топологии на* L.

Доказательство. 1. Множества $\{B_\varepsilon(a) \mid a \in L, \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}$ покрывают все L. Действительно, возьмем произвольную точку $x \in L$. По определению нормы, найдется точка $u \in Q_0^-$. Тогда $x + u < x$, так как $f(x + u - x) = f(u) < 0$. Обозначим $f(u) =: -2\varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. Тогда $x \in B_\varepsilon(x+u)$.

2. Пересечение двух множеств базы представимо как объединение множеств базы. Действительно, пусть $c \in B_\varepsilon(a) \cap B_\delta(b)$. Проверим, что $\exists h \in L \ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ такие, что $c \in B_\alpha(h) \subset B_\varepsilon(a) \cap B_\delta(b)$. По условию, $f(c-a) > \varepsilon \ \ \& f(c-b) > \delta$. Пусть $u \in Q_0^-$. Из 5.2.2 следует, что существует $r_1 \in \mathbb{R}_+$ $f(c + r_1 u - a) > \varepsilon$, и существует $r_2 \in \mathbb{R}_+$ $f(c + r_2 u - b) > \delta$. Обозначим $r := \min\{r_1, r_2\}$, $h := c + ru$. Теперь $f(h-a) > \varepsilon \,\&\, f(h-b) > \delta$, т.е. $h \in B_\varepsilon(a) \cap B_\delta(b)$. Очевидно, что $h < c$, т.к. $f(h-c) = rf(u) < 0$. Обозначим $f(h-c) =: -2\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Теперь $c \in B_\alpha(h)$. Далее, $B_\alpha(h) \subset B_\varepsilon(a) \cap B_\delta(b)$. Действительно, если $x \in B_\alpha(h)$, то $f(x-a) \geqslant f(x-h) + f(h-a) > \varepsilon$ и $f(x-b) \geqslant f(x-h) + f(h-b) > \delta$.

Определение. *Топологию на пространстве* L, *базой которой является семейство множеств* $\Gamma := \{B_\varepsilon(a) \mid a \in L,\ \varepsilon \in \mathbb{R}_+\}$, *назовем времениподобной топологией, порожденной псевдонормой* f.

5.3.2. Известно, что в конечномерном линейном пространстве все нормы задают одну и ту же топологию. Докажем (без использования условия конечномерности), что *времениподобная топология, порожденная псевдонормой* f, *фактически зависит только от области ее задания* ($\operatorname{dom} f$). Обозначим $Q_a^+ = a + Q_0^+$, $\Gamma' := \{Q_a^+ \mid a \in L\}$.

Лемма 1. *Конусы из* Γ' *составляют базу некоторой топологии на* L.

Доказательство. 1. Множества из Γ' покрывают все L (очевидно).

2. Пересечение двух множеств базы представимо как объединение множеств базы. Действительно, пусть $c \in Q_a^+ \cap Q_b^+$. Возьмем $u \in Q_0^-$. Так как $c \in Q_a^+$, то по M_1 существует $\alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $c + \alpha u \in Q_a^+$. Так как $c \in Q_b^+$, то существует $\beta \in \mathbb{R}_+$ такое, что $c + \beta u \in Q_b^+$. Обозначив $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$, получим, что $c \in Q_{c+\gamma u}^+ \subset Q_a^+ \cap Q_b^+$.

Лемма 2. *В топологии с базой из экстрашаров* Γ *все конусы из* Γ' *открыты.*

Доказательство. Проверим, что $Q_0^+ = \bigcup\limits_{\varepsilon > 0} B_\varepsilon(0)$. Действительно, если $u \in \bigcup\limits_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(0)$, то существует $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ такое, что $u \in B_\varepsilon(0)$, следовательно, $u > 0$. Обратно, если $u > 0$, то существует $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\rho(u, 0) > \varepsilon > 0 \Rightarrow u \in B_\varepsilon(0) \Rightarrow u \in \bigcup\limits_{\varepsilon>0} B_\varepsilon(0)$. Так как $Q_a^+ = a + Q_0^+$ и отображение сложения непрерывно (доказательство см. п. 5.4.2), то все доказано.

Лемма 3. *В топологии с базой из конусов* Γ' *все экстрашары из* Γ *открыты.*

Доказательство. Пусть $x \in B_\varepsilon(a)$. Так же, как и выше, проверяется (с использованием 5.2.2), что существует $y \in B_\varepsilon(a)$ такой, что $x > y$. Следовательно, $B_\varepsilon(a)$ есть объединение всех конусов Q_y^+.

Итак, доказана

Теорема 4. *Топологии с базой* Γ *и с базой* Γ' *совпадают.*

5.3.3. Построенная топология сильно отличается от топологии классического метрического пространства. В частности, она не может быть хаусдорфовой. Например, если $a < b$ и $a \in B_r(x)$, то $b \in B_r(x)$. Действительно, $a < b \,\&\, a \in B_r(x) \Rightarrow f(b - x) \geqslant f(b - a) + f(a - x) > r \Rightarrow b \in B_r(x)$.

Кроме того, операция умножения на -1 в этой топологии не является непрерывным отображением. Это связано с тем, что все множества базы направлены в сторону “увеличения времени” Q_0^+ и ограничены с другой стороны.

5.4. Усиление топологии и построение линейной кинематики. Для построения линейной кинематики времениподобную топологию необходимо усилить. Обозначим $\Delta := \{U \cap (-V) \mid U, V \in \Gamma\}$.

5.4.1. Лемма. *Семейство множеств Δ является базой некоторой топологии на L, причем эта топология сильнее, чем времениподобная топология.*

Доказательство. 1. Пересечение двух множеств базы представимо как объединение множеств базы. Действительно, для любых $U, V, U_1, V_1 \in \Gamma$

$$(U \cap -V) \cap (U_1 \cap -V_1) = (U \cap U_1) \cap -(V \cap V_1) =$$
$$= \left(\bigcup_i U_i'\right) \cap - \left(\bigcup_j V_j'\right) = \left(\bigcup_i U_i'\right) \cap \left(\bigcup_j -V_j'\right) = \bigcup_{i,j} U_i' \cap -V_j'$$

(мы пользовались тем, что Γ – база).

2. Топология с базой Δ сильнее, чем топология с базой Γ. Возьмем произвольное $U \in \Gamma$ и воспользуемся тем, что множества из Γ покрывают все пространство: $U = U \cap L = U \cap (\bigcup_{V \in \Gamma} V) = U \cap (-\bigcup_{V \in \Gamma} V) = U \cap (\bigcup_{V \in \Gamma} -V) = \bigcup_{V \in \Gamma} (U \cap -V)$. Следовательно, U открыто в топологии с базой Δ. Аналогично проверяется, что $-U$ также открыто в топологии с базой Δ.

3. Множества из Δ покрывают все пространство L. Это немедленно следует из п. 2.

Пример. В качестве линейного пространства возьмем $\mathbb{R}$, а в качестве псевдонормы $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Тогда времениподобная топология на $\mathbb{R}$ – это топология с базой из лучей $\{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$, а топология с базой Δ – евклидова топология на $\mathbb{R}$.

Определение. *Топологию на пространстве L с базой Δ назовем топологией, порожденной псевдонормой f.*

5.4.2. Теорема 5. *Линейное пространство f с топологией, порожденной псевдонормой f, и отношением порядка, порожденным той же псевдонормой, является линейной кинематикой.*

Доказательство. Аксиомы O_1, O_2 уже проверены при определении отношения порядка на L. Проверим аксиому H_1.

Лемма. *Введем обозначение* $B_{r,q}(a,b) := B_r(a) \cap -B_q(b)$, *где* $a, b \in L$, $r, q \in \mathbb{R}_+$. *Утверждаем, что* $\forall\, a, b, c, d \in L \quad \forall\, r, q, p, t \in \mathbb{R}_+$ $B_{r,q}(a,b) + B_{p,t}(c,d) \subset B_{r+p,q+t}(a+c,\, b+d)$.

Доказательство леммы. Обозначим множество в левой части последнего включения через S. $s \in S \Leftrightarrow \exists\, x, y \in L \quad s = x + y$, $\rho(x,a) > r$, $\rho(-x,b) > q$, $\rho(y,c) > p$, $\rho(-y,d) > t$. Найдем $\rho(x + y, a + c) = f(x - a + y - c) \geqslant f(x - a) + (y - c) > r + p$. Аналогично, $\rho(-(x+y),\, b+d) = f(-x-b-y-d) \geqslant f(-x-b) + f(-y-d) > q+t$. Это в точности означает, что $x + y \in B_{r+p}(a+c) \cap -B_{q+t}(b+d)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Пусть множество $U \subset L$ открыто. Надо проверить, что его прообраз при отображении $+ : L{\times}L \to L$ открыт в $L{\times}L$, т.е. что $\forall\,(x,y) \in L{\times}L$ $x{+}y \in U \Rightarrow \exists V,\, W{\subset}L$ – открытые множества такие, что $x{\in}V$, $y{\in}W$, $V{+}W \subset U$. Можно считать, что U, V, W – множества базы. Пусть $U = B_{\alpha,\beta}(u,v)$. Возьмем $e \in Q_0^+$ и $\gamma \in \mathbb{R}_+$ и рассмотрим $\rho(x, x - \gamma e) = \gamma f(e) > 0$. Выберем $\gamma_1 \in \mathbb{R}_+$ так, чтобы $f(\gamma_1 e) < \alpha$ и будем считать, что $\gamma < \gamma_1$. Тогда $x \in B_r(x - \gamma e)$, где обозначено $f(\gamma e) =: 2r < 2\alpha$. Рассмотрим $\rho(y, u-(x-\gamma e)) = f(x+y-u-\gamma e)$, причем по условию $f(x + y - u) > \alpha$. По 5.2.2 существует $\gamma_2 \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f(x + y - u - \gamma_2 e) > \alpha$. Выберем $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$ и обозначим $a := x - \gamma e$. Тогда $x \in B_r(a)$ и $y \in B_{\alpha-r}(c)$, где $c := u - a$.

Аналогично, найдутся $q < \beta$ и $b \in L$ такие, что $x \in -B_q(b)$ и $y \in -B_{\beta-q}(d)$, где $d := v - b$. Теперь включение $B_{r,q}(a,b) + B_{\alpha-r,\beta-q}(c,d) \subset B_{\alpha,\beta}(u,v)$ гарантировано по лемме.

Проверим аксиому Н_2. Поскольку умножение на скаляр $\alpha \in \mathbb{R}$ при $\alpha \neq 0$ является взаимно-однозначным отображением, непрерывности умножения эквивалентно следующее утверждение: *если* $U \subset L$ *открыто, то для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq 0)$ $\alpha U \subset L$ *также открыто*. Это утверждение достаточно проверить для множеств базы. Пусть $U = B_r(a) \cap -B_q(b)$. Если $\alpha{\in}\mathbb{R}_+$, то $\alpha B_r(a) = \{\alpha x | \rho(x,a) > r\} = \{\alpha x | \rho(\alpha x, \alpha a) > \alpha r\} = B_{\alpha r}(\alpha a)$. Если $\alpha \in \mathbb{R}_-$, то аналогично $\alpha B_r(a) = -B_{|\alpha| r}(|\alpha| a)$. Следовательно, αU открыто для всех $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Устойчивость отношения порядка $<$ к сложению (аксиома ЛК_1) следует непосредственно из определения. Устойчивость к умножению на скаляры (ЛК_2) следует из аксиомы М_3.

Проверим аксиому ЛК_3: во всякой окрестности любого вектора существует следующий вектор. Это утверждение достаточно проверить для множеств базы. Пусть $a \in B_{r,q}(u,v)$, т.е. $\rho(a,u) > r$, $\rho(-a,v) > q$. Возьмем $b \in Q_0^+$. Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{R}_+$ $a + \alpha b > a$ и $\rho(a + \alpha b, u) > r$. Из п. 5.2.2 следует, что существует $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\rho(-a - \alpha_1 b, v) > q$. Тогда $a + \alpha_1 b \in B_{r,q}(u,v)$. Это и есть следующий вектор, принадлежащий той же окрестности.

Аксиома ЛК$_4$ фактически уже была проверена в доказательстве леммы 2 п. 5.3.2. Там было доказано, что Q_0^+ открыто. Но $Q_0^- = -Q_0^+$, и умножение на -1 непрерывно. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть L – линейное пространство, $f : F \to \mathbb{R}$ – псевдонорма в F, $F := Q_0^+ \cup Q_0^- \cup \{0\}$. Тогда топология в L, порожденная псевдонормой, совпадает со слабейшей топологией линейной кинематики $(L, \Delta, <)$ с конусом будущего Q_0^+.*

Действительно, линейная кинематика с конусом будущего Q_0^+ должна иметь базу топологии вида $\{Q_a^+ \cap Q_b^- \mid a, b \in L\}$. Из 5.3.2 следует, что топологии с этой базой и с базой из пересечений экстрашаров $\{B_r(a) \cap -B_q(b) \mid a, b \in L, r, q \in \mathbb{R}_+\}$ совпадают.

5.5. Непрерывность псевдонормы.

Теорема 6. *Функция $f : F \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть прообразы лучей $(\varepsilon, +\infty)$ и $(-\infty, \varepsilon)$ (где $\varepsilon \in \mathbb{R}$) и показать, что они открыты. Если $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, то $f^{-1}((\varepsilon, +\infty)) = B_\varepsilon(0)$. Если $\varepsilon \in \mathbb{R}_-$, то $f^{-1}((-\infty, \varepsilon)) = -B_{|\varepsilon|}(0)$. Осталось рассмотреть случай, когда луч содержит точку ноль. Возьмем $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ и проверим формулу $f^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \cap F = F \setminus \operatorname{Cl} B_\varepsilon(0)$. (Если она верна, то из нее сразу следует открытость $f^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ в F). Для этого достаточно доказать два утверждения:

1. $F \subset f^{-1}((-\infty, \varepsilon)) \cup \operatorname{Cl} B_\varepsilon(0)$.
2. Это объединение – дизъюнктное.

Проверим (1). Если $x \in F$, то возможны три случая: $f(x) < \varepsilon$, $f(x) = \varepsilon$, $f(x) > \varepsilon$. Очевидно, что в первом случае $x \in f^{-1}((-\infty, \varepsilon))$, а в третьем $x \in B_\varepsilon(0) \subset \operatorname{Cl} B_\varepsilon(0)$. Утверждаем, что $f(x) = \varepsilon \Rightarrow x \in \operatorname{Cl} B_\varepsilon(0)$. Рассмотрим произвольную окрестность (из множеств базы) U точки x, $x \in U := B_r(a) \cap -B_q(b)$. Проверим, что $U \cap B_\varepsilon(0) \neq \varnothing$. Возьмем $y > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда $f(x + \alpha y) \geqslant f(x) + f(\alpha y) > \varepsilon \Rightarrow x + \alpha y \in B_\varepsilon(0)$. Так как $\rho(-x, b) > q$, то в силу 5.2.2 существует $\alpha_1 \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\rho(-(x + \alpha_1 y), b) > q$. Кроме того, $\rho(x + \alpha_1 y, a) \geqslant f(x - a) + f(\alpha_1 y) > r$. Следовательно,

$x + \alpha_1 y \in U$. Итак, мы нашли точку $x + \alpha_1 y \in U \cap B_\varepsilon(0)$, т.е. это пересечение не пусто.

Проверим (2). Возьмем $x \in f^{-1}((-\infty, \varepsilon))$ и покажем, что $x \notin \mathrm{Cl}\, B_\varepsilon(0)$. Если $f(x) \leqslant 0$, то $x \in Q_y^-$, где $y \in f^{-1}((0,\varepsilon))$, и следовательно, отделен окрестностью от $B_\varepsilon(0)$. Пусть $0 < f(x) < \varepsilon$. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f((1+\alpha)x) < \varepsilon$. Обозначим $2\beta := \rho((1+\alpha)x, x)$, $\beta > 0$. Следовательно, $x \in -B_\beta(-(1+\alpha)x)$. Итак, точка x содержится в $f^{-1}((0,\varepsilon))$ вместе с целой окрестностью $F \cap -B_\beta(-(1+\alpha)x)$, т.е. отделена от $B_\varepsilon(0)$.

Поскольку Буземан ([1], стр. 7) и Пименов ([2], стр. 257) считали, что псевдометрика не определяет топологию на L, оба они были вынуждены вводить топологию на L независимо, причем непрерывность псевдометрики ρ постулировалась. Наш подход свободен от этих недостатков.

5.6. Пространство слоев одновременности.

Определение. *Линейная кинематика* $(L, \Delta, <)$ *называется метрической, если существует псевдонорма* $f : F \to \mathbb{R}$ *такая, что топология* Δ *порождается псевдонормой* f *и отношение порядка* $<$ *согласовано с* f *(т.е.* $\{x \in L \mid x > 0\} = \{x \in L \mid f(x) > 0\}$*).*

5.6.1. Теорема. *Пусть* (L, f) *– метрическая линейная кинематика. Тогда факторпространство* $\widetilde{L}$ *– тоже метрическая линейная кинематика, причем существует топологическое вложение* $\widetilde{L} \hookrightarrow L$. *Для любого топологического вложения* $\phi : \widetilde{L} \hookrightarrow L$ *существует гомеоморфизм* $L \cong \phi(\widetilde{L}) \times \widetilde{0}$, *где* $\widetilde{0} \subset L$ *имеет антидискретную топологию, а топология в* $\phi(\widetilde{L})$ *хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть (L, f) – метрическая линейная кинематика, $\widetilde{L}$ – соответствующая факторкинематика. Покажем, что $\widetilde{L}$ – тоже метрическая кинематика с псевдонормой, определенной по следующему правилу. Обозначим $\pi : L \to \widetilde{L}$ – проекция при факторизации. Определим $\widetilde{f} : \widetilde{F} \to \mathbb{R}$. Пусть $\widetilde{a} \in \widetilde{F} := \pi(F)$. Тогда положим $\widetilde{f}(\widetilde{a}) := f(a)$.

Это определение корректно: если $a \sim b$, то $\widetilde{f}(\widetilde{a}) = \widetilde{f}(\widetilde{b})$. Предположим, напротив, что $a \sim b$, но $f(a) \neq f(b)$. Пусть для определенности $f(a) > f(b) > 0$ (если бы $f(a)$ и $f(b)$ имели разные знаки, получилось бы немедленное противоречие с устойчивость отношения порядка $<$ к эквивалентности $\sim$). Тогда существует

$\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ такое, что $f(a) > \varepsilon > f(b) > 0$. Следовательно, существует $\alpha \in \mathbb{R}$ такое, что $f(\alpha a) = \varepsilon$. Поэтому $f(a) > f(\alpha a) \Rightarrow (1-\alpha)f(a) > 0 \Rightarrow f(a - \alpha a) > 0$. Но $a - \alpha a \sim b - \alpha a$ и отношение порядка устойчиво к эквивалентности, следовательно, $f(b - \alpha a) > 0$. Поэтому $f(b) = f(b - \alpha a + \alpha a) \geqslant f(b - \alpha a) + f(\alpha a)$, но $f(\alpha a) > f(b)$ – противоречие.

Продолжим доказательство теоремы. Обозначим $\widetilde{Q}_0^+ := \pi(Q_0^+)$, $\widetilde{Q}_0^- := \pi(Q_0^-)$. Отображение проекции π линейно (следствие 4.3.2 и 4.3.3), поэтому $\widetilde{Q}_0^+$ – выпуклый конус в L с вершиной в точке $\widetilde{0}$, $\widetilde{0} \notin \widetilde{Q}_0^+$. Проверим аксиому M_1. Пусть $\widetilde{a} \in \widetilde{Q}_0^+$, $\widetilde{b} \in \widetilde{L}$. Тогда для любых представителей в этих классах $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$ $a + \alpha b \in Q_0^+$. Проектируя это в L, получаем $\widetilde{a} + \alpha\widetilde{b} \in \widetilde{Q}_0^+$, что и требовалось.

Мы определили функцию $\widetilde{f} : \widetilde{F} \to \mathbb{R}_+$ так, что $f = \widetilde{f} \circ \pi$. Очевидно, что она строго положительна только на $\widetilde{Q}_0^+$, следовательно, отношение порядка $\widetilde{<}$ согласовано с $\widetilde{f}$. Проверим аксиому M_2. Пусть $\widetilde{a} > \widetilde{0}$ и $\widetilde{b} > \widetilde{0}$. Тогда $a > 0$, $b > 0$ и $f(a + b) \geqslant f(a) + f(b)$. Пользуясь тем, что $f = \widetilde{f} \circ \pi$ и линейностью π, получаем неравенство Эйнштейна в факторкинематике $\widetilde{f}(\widetilde{a} + \widetilde{b}) \geqslant \widetilde{f}(\widetilde{a}) + \widetilde{f}(\widetilde{b})$. Проверка аксиомы M_3 осуществляется аналогично. Итак, функция $\widetilde{f}$ – псевдонорма.

Псевдонорма $\widetilde{f}$ задает на факторпространстве $\widetilde{L}$ топологию, которая совпадает с фактортопологией $L/\!\sim$. Действительно, база фактортопологии $\pi(B_\varepsilon(a) \cap -B_\delta(b)) = \widetilde{B}_\varepsilon(\widetilde{a}) \cap -\widetilde{B}_\delta(\widetilde{b})$ совпадает с базой топологии, порожденной псевдометрикой $\widetilde{f}$. Итак, $(\widetilde{L}, \widetilde{\Delta}, \widetilde{<})$ – метрическая линейная кинематика.

Построим вложение $\phi : \widetilde{L} \hookrightarrow L$. Для этого фиксируем какой-нибудь выбор представителей $\widetilde{a} \mapsto a =: \phi(\widetilde{a})$. Инъективность очевидна. Непрерывность отображения ϕ следует из формулы $\phi^{-1}(B_\varepsilon(a) \cap -B_\delta(b)) = \widetilde{B}_\varepsilon(\widetilde{a}) \cap -\widetilde{B}_\delta(\widetilde{b})$. Рассмотрим приведение отображения ϕ и покажем, что обратное к нему $\phi^{-1} : \operatorname{im}\phi \to L$ непрерывно. Это следует из равенства $\phi^{-1} = \pi|\operatorname{im}\phi$ и из непрерывности π. Итак, ϕ – топологическое вложение.

Пусть теперь $\phi : \widetilde{L} \hookrightarrow L$ – произвольное топологическое вложение. Тогда гомеоморфизм $\phi : L \to \phi(\widetilde{L}) \times \widetilde{0}$ можно задать формулой $\psi(a) := (\phi(\widetilde{a}), a - \phi(\widetilde{a}))$, $a \in L$. База топологии в L совпадает с базой топологии в $\phi(\widetilde{L}) \times \widetilde{0}$. Аналогично, существует гомеоморфизм $L \to \widetilde{L} \times \widetilde{0}$. Его можно задать формулой $a \mapsto (\widetilde{a}, a - \phi(\widetilde{a}))$.

Из 4.3.1 следует, что все открытые (и замкнутые) множества топологии метрической кинематики состоят из полных классов эквивалентности. В частности, на подмножестве $\widetilde{0} \subset L$ реализуется антидискретная топология. Действительно, это множество замкнуто (свойство 4.3.4) и состоит из единственного класса эквивалентности. Следовательно, в нем нет нетривиальных замкнутых подмножеств. Доказательство теоремы закончено.

Из доказательства теоремы видно, что отображение $\phi : \widetilde{L} \to L$, осуществляющее вложение, является произвольным. При доказательстве следствия нам будет удобно выбрать линейное вложение, но это совершенно не обязательно. Для физических приложений может оказаться естественным вложение евклидова пространства Минковского в линейное пространство некоторой большей размерности как подмногообразия. Этот метод применяется при построении теорий объединенных взаимодействий, включающих гравитацию [4].

5.6.2. Следствие. *Пусть (L, f) – метрическая линейная кинематика. Тогда L разлагается в декартово произведение двух линейных топологических пространств, $L = E \times A$, причем A имеет антидискретную топологию, а топология на E евклидова.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы и п. 4.4 непосредственно следует, что $L = H \times A$, где H, A – линейные пространства, топология на H хаусдорфова, на $A = \widetilde{0}$ – антидискретна. В силу теоремы 1 §3 слабейшая топология на L допускает разложение $L = E \times D \times A$, где E, D, A – линейные пространства с евклидовой, дискретной и антидискретной топологией, соответственно. С учетом следствия из теоремы 5 (п. 5.4.2) отсюда следует, что $H = E \times D$. Однако в силу аксиомы M_1 дискретное пространство D не может входить в это разложение, т.е. $\dim D = 0$. Предположим противное: пусть $\dim D > 0$. Тогда либо существует множество базы такое, что $\operatorname{aff}(B_\varepsilon(a) \cap -B_\delta(b)) \neq L$, либо конус Q_0^+ содержит хотя бы один луч, идущий по его границе. Во втором случае противоречие с M_1 очевидно. В первом случае возьмем точки $x \in B_{\varepsilon,\delta}(a, b)$, $y \in L \setminus \operatorname{aff} B_{\varepsilon,\delta}(a, b)$ и рассмотрим вектор $y - x$. По п.5.2.2, $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \; x - a + \alpha(y - x) \in F \& \rho(x + \alpha(y - x), a) > \varepsilon$. Аналогично, $\exists \beta \in \mathbb{R}_+ \; -x - b - \beta(y - x) \in F \& \rho(-(x + \beta(y - x)), b) > \delta$. Обозначим $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$. Из 5.2.3 следует, что $x + \gamma(y - x) \in B_{\varepsilon,\delta}(a, b)$ – противоречие ($y \notin \operatorname{aff} B_{\varepsilon,\delta}(a, b)$).

Таким образом, фактортопология метрической линейной кинематики всегда оказывается евклидовой. Евклидовы пространства с заданным в них отношением порядка были изучены Александровым [5, 6].

5.6.3. Случай "множественности миров" может быть частично описан с помошью метрической линейной кинематики, если ослабить формулировку аксиомы M_1:

$$\mathrm{M}_4.\ \forall\, a \in Q_0^+ \quad \forall\, b \in F \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad a + \alpha b \in Q_0^+,$$

или в функциональной формулировке

$$\mathrm{M}_4'.\ \forall\, a \in F\ f(a) > 0\ \Rightarrow \forall\, b \in F\ \exists \alpha \in \mathbb{R}_+\ a{+}\alpha b \in F \,\&\, f(a{+}\alpha b) > 0.$$

В этой формулировке условие $\forall\, b \in L$ заменено на более слабое $\forall\, b \in F$. Простейшие следствия из аксиом, приведенные в разделе 5.2, легко переформулировать с учетом этого изменения, заменяя $b \in L$ на $b \in F$. Формулировка следствия из п. 5.6.2 изменится:

Следствие. *Пусть (L, f) – метрическая линейная кинематика, удовлетворяющая аксиомам M_4, M_2, M_3. Тогда L разлагается в декартово произведение трех линейных топологических пространств, $L = E \times A \times D$, причем A имеет антидискретную топологию, D – дискретную, а топология на E евклидова.*

Заметим, что слои $E \times A$ не связаны отношением причинности.

Остальные утверждения §5 сохраняются без изменений.

5.6.4. Самый распространенный пример метрической кинематики – пространство Минковского. Рассмотрим пространство $L = \mathbb{R}^4$ и функцию $f(x, y, z, t) = \operatorname{sgn} t \cdot \sqrt{t^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ $(\operatorname{sgn} 0 := 0)$. Обозначим $F := \operatorname{Supp} f \cup \{0\}$. Это конус, и функция f есть времениподобная норма (аксиомы M_{1-3} выполнены). Функция f задает в L обычную евклидову топологию.

Автор признателен В. А. Залгаллеру за полезные обсуждения.

Литература

1. H. Busemann, *Timelike spaces.* — Rozpr. Mat. No. 53 (1967).
2. Р. И. Пименов, *Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени).* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **6** (1968).
3. H. Everett, *"Relative state" formulation of quantum mechanics.* — Rev. Mod. Phys. **29** (1957), 454.

4. T. Isse, *Unification of gravity, gauge and Higgs fields by confined quantum fields.* — Progr. Theor. Phys. Suppl. No. 114 (1993), 109.
5. А. Д. Александров, *A contribution to chronogeometry.* — Canad. J. Math. **19** (1967), 1119.
6. А. Д. Александров, *Конусы с транзитивной группой.* — ДАН СССР **189,** No. 4 (1969), 695.

Krym V. R. Linear spaces of kinematic type.

Linear topological spaces with partial ordering are studied. It is assumed that the above-mentioned three structures are related to each other by a set of 8 axioms. Most of the results are valid for both the finite-dimensional and the infinite-dimensional case. In applications to physics, partial ordering is interpreted as the causal structure. Both the Newtonian and the special relativity causal structure are studied, and some other possible types of causality are discussed.

Библиотека
Академии Наук

Поступило 29 мая 1996 г.