В. В. Макеев

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

В статье доказывается несколько теорем об аппроксимации плоских сечений выпуклых тел аффинно-правильными многоугольниками, эллипсами, кругами. Под выпуклым телом $K \subset \mathbb{R}^n$ понимается компактное выпуклое множество с непустой внутренностью; под аффинно-правильным многоугольником – аффинный образ правильного многоугольника; символом $|A|$ обозначается количество элементов множества A.

Теорема 1. *Через произвольную внутреннюю точку O выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ проходит двумерное сечение, в которое можно вписать хоть один аффинно-правильный шестиугольник с центром в точке O. Через произвольную внутреннюю точку O выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^4$ проходит двумерное сечение, в которое можно вписать хоть один аффинно-правильный восьмиугольник с центром в точке O.*

Доказательство начнем с размерности три. Обозначим G_{23} многообразие Грассмана неориентированных двумерных плоскостей, проходящих через точку O, а γ_{23}^6 обозначим каноническое расслоение над G_{23}: слоем над плоскостью является она же, рассматриваемая как двумерное векторное пространство. Пусть γ_{23}^6 – шестикратная сумма Уитни расслоения γ_{23}^6 с самим собой. Рассмотрим подмногообразие A тотального пространства γ_{23}^6, пересечение которого со слоем над плоскостью $E \in G_{23}$ есть $\{(A_1, \dots, A_6) \in E^6 \mid A_1A_2\dots A_6$ – аффинно-правильный шестиугольник в E с центром $O\}$. Очевидно, что A – шестимерное связное некомпактное подмногообразие тотального пространства γ_{23}^6. Пусть ∂K – граница выпуклого тела K. Рассмотрим подмножество B тотального пространства γ_{23}^6, пересечение которого со слоем над плоскостью $E \in G_{23}$ есть $(\partial K \cap E)^6$. Мы должны доказать, что $A \cap B \neq \varnothing$.

Докажем это сначала для выпуклых тел K с гладкой границей ∂K. В этом случае B есть компактное гладкое восьмимерное подмногообразие тотального пространства расслоения γ_{23}^6. Для открытого плотного в C^1-топологии множества выпуклых тел K, которые мы будем называть телами общего положения, подмногообразия A и B трансверсальны и, следовательно, пересекаются в конечном числе точек. Симметрическая группа S_6 действует на тотальном пространстве расслоения γ_{23}^6 перестановками координат точек в слоях E^6 над плоскостями $E \in G_{23}$. По построению множества A и B инвариантны относительно описанного действия группы S_6. Поэтому $A \cap B$ также инвариантно относительно действия группы S_6. Докажем, что для тела K общего положения $|A \cap B/S_6| \equiv 1 \pmod 2$.

Любые два выпуклые тела $K_0, K_1 \subset \mathbb{R}^n$ с гладкими границами гладко изотопны. Пусть $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ – соответствующая изотопия в классе выпуклых тел с гладкой границей, а $\{B_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ – соответствующая ей изотопия подмногообразий B_0 и B_1. Пусть K_0 и K_1 – тела общего положения. Малым возмущением изотопии $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, тождественным вблизи K_0 и K_1, приведем подмногообразие $\{B_t \times t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ в общее положение с подмногообразием $A \times [0,1]$ в произведении тотального пространства расслоения γ_{23}^6 на отрезок $[0,1]$. Тогда пересечение описанных подмногообразий есть одномерное многообразие с краем $((A \times 0) \cap B_0) \cup ((A \times 1) \cap B_1)$. Ниже мы докажем, что пересечение указанных подмногообразий компактно, поэтому край $((A \times 0) \cap B_0) \cup ((A \times 1) \cap B_1)$ есть край некоторого одномерного компактного многообразия C. После факторизации по свободному действию группы S_6 получаем, что $((A \times O) \cap B_0)/S_6 \cup ((A \times 1) \cap B_1)/S_6$ есть край одномерного компактного многообразия C/S_6, поэтому

$$|((A \times 0) \cap B_0)/S_6| \equiv |((A \times 1) \cap B_1)/S_6| \pmod 2.$$

Для вычисления вышеописанного вычета рассмотрим тетраэдр $ABCD$ с такой выделенной внутренней точкой O, что луч AO пересекает грань BCD в точке E и $OE > 2OA$.

Нам будет полезна простая лемма.

Лемма 1. *Если O – центр вписанного в выпуклую фигуру $K \subset \mathbb{R}^2$ аффинно-правильного шестиугольника, а AB – проходящая через точку O хорда фигуры K, то $OA \leqslant 2OB$.*

Действительно, если аффинно-правильный шестиугольник S вписан в K, то K содержится в невыпуклом двенадцатиугольнике S', ограниченном продолжениями сторон шестиугольника S рис. 1.

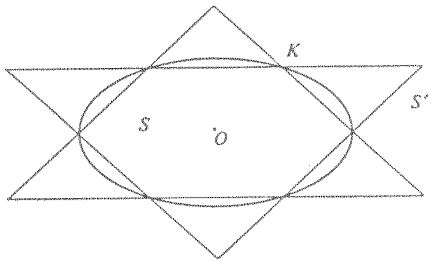

Рис. 1.

Очевидно, что S' содержится в гомотетичном S шестиугольнике с коэффициентом гомотопии 2 и центром в точке O, что и доказывает лемму.

Двумерные сечения рассмотренного выше тетраэдра $ABCD$, имеющие точку O центром вписанного аффинно-правильного шестиугольника, в силу доказанной леммы и выбора точки O не пересекают грань BCD. Не пересекающие грань BCD и проходящие через точку O двумерные сечения тетраэдра $ABCD$ являются треугольниками, среди которых лишь один имеет точку O своим центром тяжести, а значит и центром единственного, вписанного в него, аффинно-правильного шестиугольника.

Теперь для завершения доказательства того, что искомый вычет есть $1 \pmod 2$ нужно лишь проверить, что рассматриваемый тетраэдр $ABCD$ после сглаживания границы в малых окрестностях ребер является телом общего положения.

Для этого достаточно проверить, что любую из шести вершин вписанного аффинно-правильного шестиугольника можно независимо от других сдвигать с границы тетраэдра. Пусть T – треугольное сечение тетраэдра $ABCD$, имеющее O своим центром тяжести. Обозначим B', C', D' – вершины T, лежащие соответственно на ребрах AB, AC, AD. По определению сечения T имеем $3\overline{AO} = \overline{AB'} + \overline{AC'} = \overline{AD'}$. Очевидно, что для близких к T и проходящих через точку O сечений будет $\overline{AO} = \lambda\overline{AB'} + \mu\overline{AC'} = \nu\overline{AD'}$ для всевозможных достаточно близких к $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{3}$ значений барицентрических координат (λ, μ, ν). Пусть S – вписанный в T аффинно-правильный шестиугольник. Повернем одну из сторон T на малый угол φ вокруг одной из лежащих на ней вершин S (рис. 2). Получим близкий к T треугольник T_φ. Пусть A_φ – аффинное преобразование, переводящее T_φ в то близкое к T сечение тетраэдра $ABCD$, в котором точка O имеет те же барицентрические координаты, что и в T_φ. Тогда деформация $(A_\varphi S)_\varphi$ шестиугольника S сдвигает одну из вершин S трансверсально к границе тетраэдра.

Теперь воспользуемся тем, что площадь аффинно-правильного шестиугольника, вписанного в выпуклую фигуру, не меньше 2/3

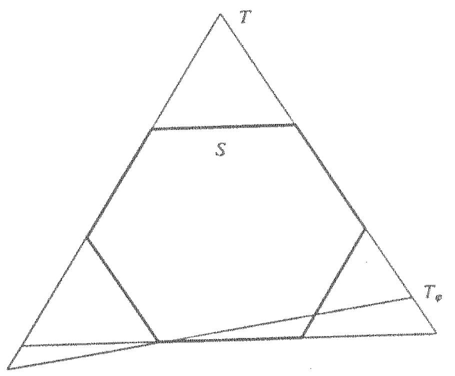

Рис. 2.

площади этой фигуры [1], задача 33. Из этого следует, что множество аффинно-правильных шестиугольников, вписанных в компактное семейство выпуклых фигур, само компактно, так как все они содержатся в компактной области, а их площади равномерно отделены от нуля, что позволяет из последовательности вписанных в фигуры семейства аффинно-правильных шестиугольников выделить подпоследовательность, сходящуюся к аффинно-правильному шестиугольнику, также вписанному в одну из фигур семейства. Это обосновывает независимость вышеопределенного вычета от выбора тела общего положения. Утверждение теоремы 1 для произвольного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^3$ получается теперь предельным переходом, так как множество тел общего положения всюду плотно.

Доказательство второй части теоремы 1 совершенно аналогично. Пусть γ_{24} – каноническое двумерное расслоение над многообразием Грассмана G_{24} неориентированных двумерных плоскостей, проходящих через точку $O \in K \subset \mathbb{R}^4$. Пусть γ_{24}^8 – восьмикратная сумма Уитни расслоения γ_{24} с самим собой. Обозначим A – восьмимерное подмногообразие тотального пространства расслоения γ_{24}^8, пересечение которого со слоем над плоскостью $E \in G_{24}$ есть $\{(A_1, \ldots, A_8) \in E^8 \mid A_1A_2\ldots A_8$ – аффинно-правильный восьмиугольник с центром в точке $O\}$. Для выпуклого тела K с границей ∂K рассмотрим подмножество B тотального пространства γ_{24}^8, пересечение которого со слоем над плоскостью $E \in G_{24}$ есть $(E \cap \partial K)^8$. Мы должны доказать, что $A \cap B \neq \varnothing$.

Для этого мы сначала докажем это для плотного множества тел $K \subset \mathbb{R}^4$ с гладкой границей ∂K. Для остальных тел, как и в первой части теоремы, доказательство получается предельным переходом. Для тел $K \subset \mathbb{R}^4$ с гладкой границей ∂K множество B является двенадцатимерным компактным подмногообразием тотального пространства расслоения γ_{24}^8, которое для плотного множества тел общего положения $K \subset \mathbb{R}^4$ трансверсально к A; в этом случае $A \cap B$ конечно. На тотальном пространстве расслоения S_8 перестановками координат точек в слоях E^8 над $E \in G_{24}$. По построению многообразия A и B инвариантны относительно вышеописанного действия S_8 и, как и в первой части теоремы, для тел общего положения корректно определен вычет $|\,(A \cap B)/S\,| \pmod 2$. Мы докажем, что этот вычет равен 1 (mod 2), что и завершит доказательство теоремы 1.

Для вычисления вышеописанного вычета рассмотрим четырехмерный симплекс $ABCDE$ с такой внутренней точкой O, что луч AO пересекает грань $BCDE$ в точке F и $OF > 3AO$.

Лемма 2. *Пусть O – центр вписанного в выпуклую фигуру $K \subset \mathbb{R}^2$ аффинно-правильного восьмиугольника, а AB – проходящая через точку O хорда фигуры K. Тогда $AO \leqslant \sqrt{2}OB$.*

Действительно, если аффинно-правильный восьмиугольник S вписан в K, то K содержится в невыпуклом шестнадцатиугольнике S', ограниченном продолжениями сторон восьмиугольника S, рис. 3.

Очевидно, что S' содержится в гомотетичном S восьмиугольнике с коэффициентом гомотетии $\sqrt{2}$ и центром в точке O, что и

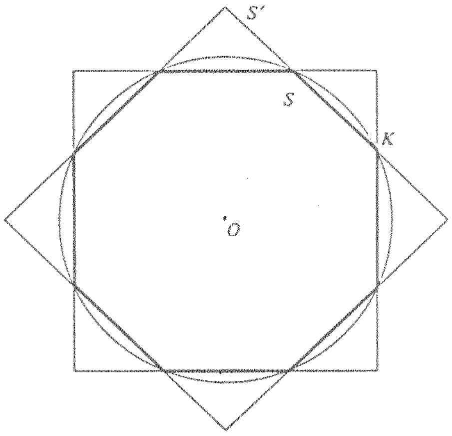

Рис. 3.

доказывает лемму.

По лемме 2 проходящие через точку O двумерные сечения симплекса $ABCDE$, имеющие точку O центром вписанного аффинно-правильного восьмиугольника, не могут пересекать грань $BCDE$. Остальные двумерные сечения симплекса $ABCDE$ являются треугольниками и четырехугольниками. Вписать аффинно-правильный восьмиугольник можно лишь в четырехугольник, являющийся параллелограммом. Легко проверить, что существуют ровно три проходящие через точку O двумерные сечения, являющиеся параллелограммами с центром в точке O. Опишем их. Рассмотрим на ребрах AB, AC, AD, AE соответственно такие точки B', C', D', E', что $4\overline{AO} = \overline{AB'}+\overline{AC'}+\overline{AD'}+\overline{AE'}$ (которые существуют в силу выбора точки $O : OF > 3AO$). Таким образом, O есть центр тяжести тетраэдра $B'C'D'E'$ и через O проходят три плоских сечения, параллельные парам скрещивающихся ребер тетраэдра, являющиеся параллелограммами с центром в точке O. Условие трансверсальности пересечения (то есть, что симплекс $ABCDE$ после сглаживания вблизи граней коразмерности два является телом общего положения) проверяется также, как и в правой части теоремы, что и завершает ее доказательство.

Следствие 1. *Через внутреннюю точку O выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^4$*

проходит двумерное сечение, содержащее некоторый эллипс с центром в точке O и содержащееся в гомотетичном эллипсе с тем же центром и коэффициентом гомотетии $\sqrt{2}$. Оценка $\sqrt{2}$ неулучшаема.

Действительно, эллипс, вписанный в восьмиугольник S (рис. 3), и описанный вокруг S', гомотетичны с коэффициентом $\sqrt{2}$ и имеют общий центр O. Константа $\sqrt{2}$ неулучшаема в примере, рассмотренном при доказательстве теоремы 1, так как очевидно, что для треугольных и четырехугольных сечений она не может быть уменьшена.

Замечания 1. Первая часть теоремы 1 вместе с доказательством обобщается для аффинного образа произвольного заданного центрально-симметричного выпуклого шестиугольника (вместо аффинно-правильного).

2. Аналогичное теореме 1 утверждение имеет место и может быть подобными же средствами доказано для аффинно-правильных описанных шести- и восьмиугольников.

Известно, что для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ существует единственный содержащий K эллипсоид Э_1 минимального объема, причем гомотетичный ему с тем же центром и коэффициентом гомотетии $1/n$ эллипсоид $\text{Э}_1'$ содержится в K. Аналогично существует единственный содержащийся в K эллипсоид Э_2 максимального объема и гомотетичный ему с тем же центром и коэффициентом гомотетии n эллипсоид $\text{Э}_2'$, содержащий тело K, см. [3], стр. 19.

Теорема 2. *Пусть $K_1, \dots, K_m$ – выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ с общей внутренней точкой O и $m < n$. Существует такая $(n-m)$-мерная, проходящая через точку O, плоскость H и такие m-мерные эллипсоиды $E_1, \dots, E_m$ с центром в точке O, что $E_i \subset H \cap K_i$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ и $H \cap K_i \subset (n-m)E_i$, где $(n-m)E_i$ – гомотетичный E_i эллипсоид с центром в точке O и коэффициентом гомотетии $(n-m)$. Коэффициент гомотетии $(n-m)$ не может, вообще говоря, быть заменен на меньший.*

Доказательство. Для произвольной, проходящей через точку O, $(n-m)$-мерной плоскости H обозначим $E_i(H)$ вписанный в $H \cap E_i$ эллипсоид максимального объема. Как следует из теоремы 4 [4] существует такая $(n-m)$-мерная плоскость H, что для $1 \leqslant i \leqslant m$ центры эллипсоидов $E_i(H)$ совпадают с O.

Покажем, что коэффициент гомотетии $(n-m)$, вообще говоря, минимален. Рассмотрим в качестве K_1 n-мерный симплекс T с вершинами $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$ и такой внутренней точкой O, что $OB > (n-m)A_1O$, где B – точка пересечения проведенной через точки A_1 и O прямой с гранью $A_2, A_3, \dots, A_{n+1}$. Для $2 \leqslant i \leqslant m$ в качестве тела K_i выберем такой, содержащий внутри себя точку O симплекс, одна из граней которого совпадает с противолежащей вершине A_i гранью T, а последняя вершина A'_1 лежит внутри симплекса T и $OB'_i > (n-m)OA'_i$, где B'_i – точка пересечения проведенной через точки A'_i и O прямой с противолежащей A_i гранью T. Тогда по построению искомая плоскость H не может пересекать никакие грани T, противолежащие вершинам $A_1, A_2, \dots, A_m$, так как проходящая через точку O хорда симплекса K_i и пересекающая противолежащую A'_i грань K_i делится в этой точке в отношении $>(n-m)$. Следовательно, H пересекает не более $n-m+1$ граней старшей регулярности симплекса K_1; поэтому $H \cap K_1$ есть $(n-m)$-мерный симплекс и отношение объемов содеражщего и содержашегося в $H \cap K_1$ эллипсоидов не меньше $(n-m)^{n-m}$, что и доказывает неулучшаемость константы $n-m$.

Теорема 3. *Пусть $K_1, \dots, K_{n-2}$ – выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ с общей внутренней точкой O. Через точку O, проходит такая двумерная плоскость H, что все эллипсы максимальной (минимальной) площади, вписанные (описанные вокруг) $E_i \cap K_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n-2$ являются кругами.*

Поскольку случаи вписанных и описанных эллипсов совершенно аналогичны, то все рассуждения будем проводить для вписанных эллипсов. Рассмотрим три исходящих из точки O единичные вектора $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$, лежащие в одной плоскости H и составляющие попарно углы $\frac{2\pi}{3}$. Для $1 \leqslant i \leqslant n-2$ рассмотрим эллипсы $E_i \subset H$ с центром в точке O, полученные параллельным переносом из эллипсов максимальной площади, вписанных в $H \cap K_i$. Поставим в соответствие тройке векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ точку $(X, Y, Z) \in (\mathbb{R}^{n-2})^3$, определив для $1 \leqslant i \leqslant n-2$ i-ю координату точки X (соответственно Y и Z) равной длине отрезка, высекаемого эллипсом E_i на натянутом на вектор $\overline{e}_1$ (соответственно $\overline{e}_2$ и $\overline{e}_3$) луче. Таким образом мы определили отображение F множества вышеописанных троек векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ в $(\mathbb{R}^{n-2})^3$. На множестве троек векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, которое гомеоморфно многообразию Штифеля 2 -реперов V_{2n} и пространстве $(\mathbb{R}^{n-2})^3$ действует циклическая группа $\mathbb{Z}_3$ циклическими перестановками векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$ и точек (X, Y, Z) соответственно. По построению вышеописанное отображение $F : V_{2n} \to (\mathbb{R}^{n-2})^3$ непрерывно и сохраняет действие группы $\mathbb{Z}_3$. Тогда, как следует из доказательства теоремы 4 [5] или теоремы 2.2 [6], для некоторой точки $F(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3) = (X, Y, Z)$ выполняется $X = Y = Z$ и плоскость H, натянутая на $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3)$, искомая. Действительно, для $1 \leqslant i \leqslant n-2$ эллипс E_i высекает на трех исходящих из его центра неколлинеарных лучах равные отрезки, поэтому E_i – круг.

Следствие 2. *Пусть $K_1, \dots, K_{n-2}$ – выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$ с общей внутренней точкой O. Тогда через точку O, проходит такая двумерная плоскость H, что для $1 \leqslant i \leqslant n-2$ существует такой круг $E_i \subset H \cap K_i$, что гомотетичный ему с коэффициентом 2 круг с тем же центром содержит $H \cap K_i$.*

Замечания. 1. При $n = 3$ теорема 3 доказана в [7], близкий результат был получен уже в [8].

2. Все предыдущие теоремы о k-мерных сечениях выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ могут быть обобщены следующим образом. Вместо k-мерных сечений выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать сечение s_{kn} локально-тривиального расслоения над многообразием Грассмана G_{kn} неориентированных k-плоскостей, проходящих через точку $O \in \mathbb{R}^n$, со слоем над $E \in G_{kn}$, состоящем из выпуклых k-мерных тел в E. Теорема 1, например, может быть переформулирована следующим образом: для любого сечения s_{23} (s_{24}) найдется такая $E \in G_{23}$ (G_{24}), что фигура $s_{23}(E)$ ($s_{24}(E)$) имеет аффинно-правильный вписанный шестиугольник (восьмиугольник) с центром в точке O. Доказательство совершенно аналогично изложенному выше. Заметим также, что близкие к теореме 1 утверждения доказаны в [2] и могут быть обобщены описанным способом.

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. И. Яглом, В. Болтянский, *Выпуклые фигуры*. Гостехиздат, М. 1951.
2. В. Макеев, *Аффинно вписанные и описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1996), 286–298.
3. Б. Грюнбаум, *Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.* Наука, М. 1971.

4. В. Дольников, *Трансверсали семейств множеств в* $\mathbb{R}^n$ *и связь между теоремами Хелли и Борсука.* — Мат. сб. **184**, No. 5 (1993), 111–131.
5. D. Bourgin, *Deformation and mapping theorems.* — Fund. Math **46**, No. 3 (1959), 285–303.
6. S. Vrecia, R. Zivaljevic, *The ham sandwich theorem revisited.* — Israel J. of Math. **78** (1992), 21–32.
7. В. Макеев, *Оценки асферичности сечений выпуклых тел.* — Украинский геом. сб. вып. **28** (1985), 76–79.
8. F. John, *An inequality for convex bodies.* — Univ. Kentucky Research Club. Bull. **6** (1940), 26.

Makeev V. V. On approximation of the plane sections of convex bodies.

Topological methods are applied to the proof of three theorems concerning approximation of plane sections of convex bodies by affine-regular polygons, ellipses, or circles. One of the theorems is as follows. For every interior point O of any convex body $K \subset \mathbb{R}^3$ there is a plane section of K that passes through O and admit an inscribed affine-regular hexagon centered at O. For every interior point O of any convex body $K \subset \mathbb{R}^4$ there is a two-dimensional plane section of K that passes through O and admits an inscribed affine-regular octagon centered at O.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило 24 апреля 1996 г.