В. В. Макеев

О ПЯТИУГОЛЬНИКАХ, ВПИСАННЫХ В ЗАМКНУТУЮ ВЫПУКЛУЮ КРИВУЮ

Всюду в дальнейшем под выпуклой фигурой понимаем непустое компактное выпуклое множество на плоскости. Говорим, что многоугольник вписан (аффинно вписан) в выпуклую фигуру K, если его вершины (вершины некоторого его аффинного образа) лежат на границе ∂K фигуры K. В [1, 2] доказано, что в любую выпуклую фигуру K можно вписать аффинный образ правильного пятиугольника с вершиной в наперед заданной точке границы ∂K. Нечнем с теоремы, которая обобщает сформулированное утверждение, а также теорему 1 работы [3].

Теорема 1. *Пусть сумма любых двух соседних углов выпуклого пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$ больше π, а A_0 – фиксированная точка границы ∂K выпуклой фигуры $K \subset \mathbb{R}^2$. Тогда существует аффинный образ пятиугольника, вписанный в K так, что вершина A_1 лежит в точке A_0.*

Обозначим Aff_2^+ группу сохраняющих ориентацию аффинных преобразований плоскости. Рассмотрим множества

$$A = \{(a(A_1), a(A_2), a(A_3), a(A_4), a(A_5)) \in R^{2\times 5} \mid a \in \mathrm{Aff}_2^+\}$$

и $B = (\partial K)^5 \subset R^{2\times 5}$. Пусть $\pi : B = (\partial K)^5 \to \partial K$ проекция на первый сомножитель. Мы должны доказать, что $\pi(A \cap B) = \partial K$.

Докажем это сначала для некоторого плотного в C^1-топологии множества выпуклых фигур K с гладкой границей ∂K. Для выпуклой фигуры K с гладкой границей ∂K множество B есть гладко вложеннный в $R^{2\times 5}$ пятимерный тор T^5. Множество A есть гладко вложенный в $R^{2\times 5}$ образ группы Aff_2^+. Для плотного в C^1-топологии множества выпуклых фигур K с гладкой границей, которые мы будем называть фигурами общего положения, подмногообразия A и B трансверсальны, и, если $A \cap B$ непусто, то оно является одномерным ориентированным и, как мы увидим ниже, компактным многообразием. Докажем, что элемент группы гомологий $H_1(B;\mathbb{Z})$, который реализуется подмногообразием $A \cap B$, не зависит от выбора фигуры K общего положения.

Любые две выпуклые фигуры K_0, $K_1 \subset R^2$ общего положения гладко изотопны и пусть $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ соответствующая изотопия в классе выпуклых фигур с гладкой границей, и пусть $F : T^5 \times [0,1] \to R^{2\times 5}$ соответствующая изотопия пятимерного тора. Малым возмущением изотопии $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, тождественным вблизи краев K_0 и K_1, приведем изотопию F в общее положение с подмногообразием A. Тогда $F^{-1}(A)$ есть ориентированная двумерная пленка, соограничивающая $F^{-1}(A)\cap(T^5\times 0)$ и $F^{-1}(A)\cap(T^5\times 1)$. Покажем, что множество $F^{-1}(A)$ компактно. Для этого нам понадобится

Лемма. *Пусть сумма любых двух соседних углов выпуклого пятиугольника $A_1 \ldots A_5$ больше π. Тогда существует такое $C > 0$, что для всякой выпуклой фигуры K, в которую этот пятиугольник вписан, выполняется $S \geqslant CS(K)$, где S – площадь пятиуголька, а $S(K)$ – площадь фигуры K.*

Действительно, если пятиугольник вписан в выпуклую фигуру K, то K содержится в невыпуклом десятиугольнике, полученном продолжением сторон пятиугольника (рис. 1)

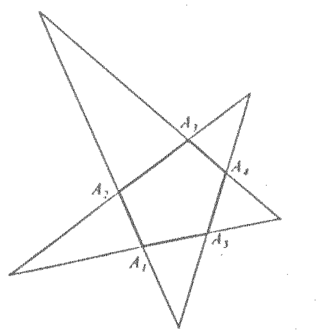

Рис. 1.

Рассматриваемый десятиугольник будет ограниченным в силу того, что сумма любых соседних углов исходного пятиугольника больше π. Тогда в качестве C можно взять S/S_1, где S_1 – площаль десятиугольника на рис. 1.

Из леммы следует, что множество аффинных образов пятиугольника $A_1 \dots A_5$, вписанных в компактное семейство выпуклых фигур, само компактно, так как оно замкнуто и диаметры этих пятиугольников равномерно ограничены сверху, а площади по лемме равномерно ограничены снизу положительным числом.

Докажем, что гомологический класс, реализуемый $A \cap B$ в $H_1(B; \mathbb{Z})$, равен классу диагонали тора $(\partial K)^5$ для фигуры K общего положения.

Кривая второго порядка, проходящая через точки $A_1, \dots, A_5$, является эллипсом, Действительно в силу выпуклости пятиугольника все пять точек должны лежать на одной ветви кривой, если это гипербола. Пусть точки занумерованы в порядке их следования на кривой, тогда $\angle A_1 + \angle A_5 < \pi$, если кривая есть парабола или гипербола, что противоречит условию теоремы 1.

Пусть точки $A_1, \dots, A_5$, лежат на границе ∂K эллипса K. Если эллипс K – круг, то множество преобразований из Aff_2^+, вписывающих пятиугольник $A_1 \dots A_5$, в K, есть группа поворотов K вокруг его центра. Пусть $a \in \mathrm{Aff}_2^+$ – преобразование, переводящее эллипс K в круг K'. Тогда множество преобразований из Aff_2^+, вписывающих $A_1 \dots A_5$ в эллипс K, есть подгруппа Aff_2^+, сопряженная с группой поворотов вокруг центра круга K' посредством преобразования a. Деформация преобразования a в тождественное преобразование дает изотопию пары $((\partial K)^5, (\partial K)^5 \cap A)$ в $R^{2\times 5}$ в соответствующую пару для круга K. Стягивая вершины $A_1, \dots, A_5$ к вершине A_1 по окружности ∂K круга K, получаем изотопию пары $((\partial K)^5, (\partial K)^5 \cap A)$ в пару $((\partial K)^5, \Delta)$, где Δ – диагональ произведения $(\partial K)^5$.

Эллипс K является фигурой общего положения. Это следует из возможности независимо сдвигать вершины пятиугольника трансверсально к границе эллипса K посредством малой деформации аффинного преобразования, вписывающего пятиугольник в эллипс. Эта возможность равносильна возможности сдвигать любую вершину пятиугольника трансверсально к границе эллипса малой деформацией самого эллипса, что следует из того, что через любую достаточно близкую к $A_1, \dots, A_5$ пятерку точек плоскости проходит единственный эллипс.

Из доказанного нами следует, что проекция $\pi : (A \cap B) \to \partial K$ для фигуры K общего положения индуцирует нетривиальный гомоморфизм в одномерных гомологиях, поэтому $\pi(A \cap B) = \partial K$.

Пусть K – произвольная выпуклая фигура с выделенной граничной точкой A. Пусть (K_n, B_n) – последовательность фигур общего положения с выделенными граничными точками B_n, сходящаяся к паре (K, A_0). Пусть a_n – аффинный образ пятиугольника $A_1 \dots A_5$, вписанный в фигуру K_n с образом вершины A_1 в точке B_n. Так как диаметры пятиугольников a_n равномерно ограничены сверху, а площади в силу леммы 1 равномерно ограничены снизу положительным числом, то из последовательности пятиугольников a_n можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому аффинному образу a пятиугольника $A_1 \dots A_5$, вписанному в фигуру K с образом вершины A_1 в точке A_0. Теорема 1 доказана.

Замечание. Очевидно, что для того, чтобы пятиугольник $A_1 \dots A_5$ мог быть аффинно вписан в любую выпуклую фигуру необходимо, чтобы точки $A_1, \dots, A_5$ лежали на некотором эллипсе. Однако *теорема* 1 *не обобщается на произвольный вписанный в эллипс пятиугольник* $A_1 \dots A_5$*.* Докажем это.

Рассмотрим точки $A_1, \dots, A_5$, лежащие на окружности в порядке следования против часовой стрелки, причем $A_1A_2 = A_4A_5$, $A_2A_3 = A_3A_4$, $\angle A_5A_1A_2 < \frac{\pi}{2}$ и $\angle A_3CA_4 > \frac{\pi}{2}$, где C – точка пересечения прямых A_2A_3 и A_4A_5 (рис. 2). Заметим, что тогда $A_3C < A_4A_3 = A_2A_3$.

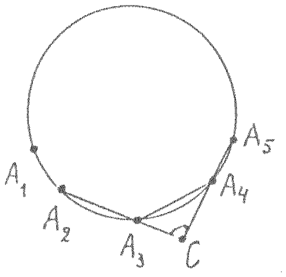

Рис. 2.

В этом случае аффинный образ $A_1 \dots A_5$ не может быть так вписан в треугольник T, что вершина A_3 перейдет в середину стороны треугольника T. Если бы это удалось сделать, что вместе с вершиной A_3 на сторону T должна попасть еще одна вершина пятиугольника, так как в противном случае отрезки A_1A_2 и A_4A_5 должны лежать на двух других сторонах треугольника T, чего не может быть, так как лучи с началом в точках A_2 и A_4 и проходящие через точки A_1 и A_5 соответственно не пересекаются в силу выбора пятиугольника. Итак, вместе с вершиной A_3 на стороне T лежит вершина A_2 или A_4 пятиугольника, что безразлично в силу симметрии пятиугольника $A_1 \dots A_5$. Пусть вершины A_2 и A_3 лежат на одной стороне треугольника. Тогда на некоторой другой стороне треугольника T лежат вершины A_1 и A_5 или вершины A_4 и A_5 (рис. 3). Буквами A, B, C

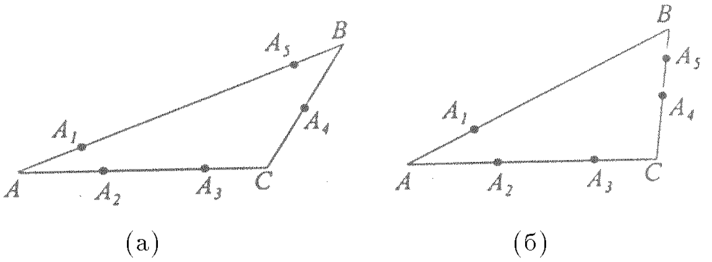

Рис. 3.

обозначены вершины треугольника T. На рис. 3(б) имеем $A_2A_3 > A_3C$ по построению пятиугольника, поэтому точка A_3 не середина стороны AC. Аналогично на рис. 3(а) $A_2A_3 > A_3C' > A_3C$, где C' – точка пересечения AC и A_5A_4, поэтому точка A_3 также не середина стороны AC.

Однако имеет место теорема, анонсированная в [4].

Теорема 2. *Пусть точки $A_1, \dots, A_5$ лежат на некотором эллипсе, а K – выпуклая фигура с C^4-гладкой границей ∂K положительной кривизны с выделенной точкой $A \in \partial K$. Тогда некоторый аффинный образ пятиугольника $A_1 \dots A_5$ так вписан в фигуру K, что точка A_1 переходит в точку A.*

Доказательство теоремы 2 в точности следует доказательству теоремы 1 за исключением обоснования компактности множества вписанных аффинных образов пятиугольника, так как лемма 1 для произвольного вписанного в эллипс пятиугольника $A_1 \dots A_5$ не выполняется.

Пусть $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ – гладкая класса C^4 деформация фигуры K_0 в классе фигур с C^4-гладкой границей с положительной гауссовой кривизной. Докажем, что множество аффинных образов пятиугольника $A_1 \dots A_5$, вписанных в фигуры $\{K_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, компактно. Очевидно, что диаметры этих пятиугольников равномерно ограничены и достаточно доказать, что их площади ограничены снизу положительным числом. Если это не так, то из рассматриваемых аффинных образов пятиугольника $A_1 \dots A_5$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому вырожденному линейному образу пятиугольника, то есть отрезку или точке. Если линейный образ пятиугольника $A_1 \dots A_5$, вписанный в некоторую фигуру K_t есть отрезок, то одна из вершин пятиугольника переходит внутрь этого отрезка, что противоречит тому, что граница фигуры K_t имеет положительную кривизну. Если же последовательность a_n аффинных образов пятиугольника $A_1 \dots A_5$ сходится к некоторой точке $a \in \partial K_t$, то, как известно, последовательность γ_n кривых второго порядка, проходящих через вершины a_n сходится к кривой второго порядка, имеющей четырехкратный контакт с ∂K_t в точке a. Это противоречит тому, что проходящие через вершины пятиугольника a_n кривые второго порядка суть эллипсы со стремящимися к нулю диаметрами.

Замечание. Теоремы 1 и 2 данной работы без труды переносятся на описанные пятиугольники, что частично сделано в [3]. Автору не известно обобщаются ли эти теоремы на невыпуклые несамопересекающиеся замкнутые кривые.

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. W. Böhme,, *Ein satz über ebene konvexe figuren.* — Math. Phys. Semesterber **6** (1958), 153–156.
2. B. Günbaum,, *Affineregular polygons inscribed in plane convex sets.* — Riveon Lematematika **13** (1959), 20–24.
3. V. Makeev,, *Applications of topology to some problems in combinatorial geometry.* — Amer. Math. Soc. Transl. (2) **174** (1996), 223–228.
4. V. Makeev,, *Polygons inscribed in a convex body.* Abstracts. Convex and discrete geometry. Institut Mathematyki i Fizyki ATR Budgoszcz, Poland, June 27–July

2, 1994.

Makeev V. V. On pentagons incribed in closed convex curve.

The following two theorems are proved in the paper.

1. Suppose that the sum of any two neighbouring angles of a pentagon $A_1 \dots A_5$ exceeds π. Let A_0 be any point on the boundary ∂K of a convex set $K \subset \mathbb{R}^2$. Then there is an affine image of that pentagon such that this image is inscribe in K and A_0 is the image of A_1.

2. The above theorem does not admit generalization to all pentagons inscribed in an ellipse.

3. Let $A_1, \dots, A_5$ be points of some ellipse, let $K \subset \mathbb{R}^2$ be a convex set with C^4-smooth boundary ∂K of positive curvature, and let $A_0 \in \partial K$ be a distinguished point of the boundary. Then there is an affine image of the pentagon $A_1 \dots A_5$ such that this image is inscribed in K and A_0 is the image of A_1.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 2 июня 1996 г.