В. В. Макеев

ОБ АФФИННЫХ ОБРАЗАХ РОМБОДОДЕКАЭДРА, ОПИСАННЫХ ВОКРУГ ТРЕХМЕРНОГО ВЫПУКЛОГО ТЕЛА

Всюду в дальнейшем под выпуклым телом понимаем компактное выпуклое множество с непустой внутренностью. В [1] доказано, что во всякое выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$, кроме нижеперечисленных, можно вписать аффинный образ кубооктаэдра. Кубооктаэдр есть выпуклая оболочка середин ребер куба. Возможные исключения составляют выпуклые тела, содержащие параллелограм P и содержащиеся в цилиндре с направляющим множеством P. В данной работе доказывается двойственное утверждение. Ромбододекаэдром называется многогранник двойственный к кубооктаэдру.

Теорема. *Вокруг всякого выпуклого тела в $\mathbb{R}^3$, кроме ниже указанных, может быть описан аффинный образ ромбододекаэдра. Возможные исключения представляют собой тела, содержащие параллелограм P и содержащиеся в цилиндре с направляющим множеством P.*

Поскольку доказательство этой теоремы аналогично доказательству упомянутой выше теоремы 5 [1], мы наметим лишь его основные этапы.

Пусть A – ромбододекаэдр с гранями $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{12}$ и с числовыми осями $l_1, \ldots, l_{12}$, проведенными из его центра перпендикулярно к граням $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{12}$ соответственно. Обозначим Aff_3^+ группу сохраняющих ориентацию аффинных преобразований евклидова пространства $\mathbb{R}^3$, а $H \subset \mathrm{Aff}_3^+$ ее подгруппу, состоящую из преобразований, переводящих ромбододекаэдр A в себя. Для всякого ограниченного выпуклого $K \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой опорной функцией определим гладкое отображение $F : \mathrm{Aff}_3^+ \to \mathbb{R}^{12}$. Для всякого $a \in \mathrm{Aff}_3^+$ и $1 \leqslant i \leqslant 12$ обозначим x_i точку пересечения оси $a(l_i)$ с гранью $a(\Gamma_i)$, а y_i – правую из точек пересечения оси $a(l_i)$ с опорными к телу K плоскостями, параллельными грани $a(\Gamma_i)$. Положим $F(a) = (x_1 - y_1, \ldots, x_{12} - y_{12})$. Очевидно, что многогранник $a(A)$ описан вокруг $K \subset \mathbb{R}^3$ тогда и только тогда, когда $a(A) = (0, 0, \ldots, 0) = 0 \in \mathbb{R}^{12}$. Назовем ограниченное выпуклое тело $K \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой опорной функцией телом общего положения, если $0 \in \mathbb{R}^{12}$ является регулярным значением для отображения F. Тела общего положения составляют открытое плотное множество в C^1-топологии во множестве C^1-гладких выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$. Очевидно, что $F^{-1}(0)$ есть H-инвариантное подмножество в группе Aff_3^+. Для тел общего положения множество $F^{-1}(0)/H$ конечно, то есть количество различных аффинных образов A, описанных вокруг K конечно. По стандартным топологическим соображениям вычет по модулю 2 числа элементов множества $F^{-1}(0)/H$ не зависит от выбора тела K общего положения. Докажем, что этот вычет равен единице.

В [1] доказано, что во всякое C^1-гладкое тело K, достаточно близкое в C^1-топологии к сглаженному в малых окрестностях ребер тетраэдру, можно вписать ровно пять аффинных образов кубооктаэдра. При уменьшении возмущения тетраэдра эти вписанные аффинные образы кубооктаэдра сходятся к изображенным на Рис. 1 а) и б) аффинным образам кубооктаэдра, вписанных в тетраэдр K. На обоих рисунках вершины вписанных аффинных образов кубооктаэдра лежат в трех параллельных плоскостях, нижняя из которых совпадает с плоскостью грани тетраэдра K, в которой содержится треугольная грань образа кубооктаэдра. Верхняя плоскость пересекает тетраэдр по треугольнику, середины сторон (вершины) которого совпадают с тремя вершинами вписанного аффинного образа кубооктаэдра на Рис. а) (Рис. б)). Средняя плоскость пересекает тетраэдр по треугольнику, каждую сторону которого делят на три равные части две вершины аффинно вписанного в тетраэдр кубооктаэдра. Барицентрические координаты центра аффинно вписанного кубооктаэдра Рис. 1 а) есть $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ и соответственно $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ с точностью до перестановки координат на Рис. 1 б). Таким образом, имеется единственный вписанный в тетраэдр, аффинный образ кубооктаэдра, изображенный на Рис. 1 а) и четыре типа Рис. 1 б).

Если аффинный образ A кубооктаэдра с центром в точке O вписан в близкое к тетраэдру тело T с гладкой опорной и лучевой функцией относительно точки O, то полярные им относительно единичного шара с центром в точке O тела A' и T' представляют собой аффинный образ ромбододекаэдра, описанный

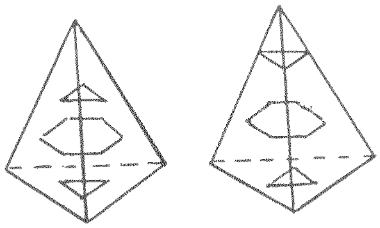

Рис. 1.

вокруг близкого к тетраэдру тела T' с гладкой опорной и лучевой функцией относительно точки O и наоборот. При этом, T' является телом общего положения по отношению к A' тогда и только тогда, когда T является телом общего положения по отношению к A. Действительно, возможность отодвигать одну из граней A' от границы T' малым возмущением аффинного образа A' равносильна возможности сдвигать одну из вершин A с границы T малым возмущением аффинного образа A. Так без труда проверяется, что вокруг тела T', полярного относительно единичного шара с центром O правильному тетраэдру T с тем же центром O, сглаженному вышеописанным способом в малых окрестностях ребер, можно описать ровно пять аффинных образов ромбододекаэдра, причем T' является телом общего положения. Очевидно, что при уменьшении возмущения T тело T' приближается в обычной метрике Хаусдорфа к правильному тетраэдру, а его аффинно-описанные ромбододекаэдры к пяти аффинно-описанным ромбододекаэдрам, имеющим с T' четыре общие вершины, причем в четырех вершинах одного сходятся по три грани, а в трех вершинах остальных сходятся по четыре грани, а в одной три грани ромбододекаэдра. Таким образом, вокруг всякого тела общего положения описано нечетное число различных аффинных образов ромбододекаэдра.

Нам понадобится следующее двойственное к лемме 3 [1] утверждение.

Лемма. *Пусть $\mathcal{K}$ – компактное множество выпуклых тел в $\mathbb{R}^3$. Если семейство всевозможных аффинных образов ромбододекаэдра, описанных вокруг тел из $\mathcal{K}$, не компактно, то в $\mathcal{K}$ найдется выпуклое тело K, содержащее некоторый параллелограм P и само содержащееся в цилиндре с направляющим множеством P.*

Завершим теперь доказательство теоремы. Пусть K – выпуклое трехмерное тело, не являющееся исключительным. Пусть $\{K_n\}$ – последовательность C^1-гладких тел общего положения, сходящихся в обычной метрике Хаусдорфа к телу K, и A_n – аффинный образ ромбододекаэдра, описанный вокруг K_n. По лемме множество аффинных образов ромбододекаэдра, описанных вокруг K или одного из K_n, компактно. Поэтому из последовательности $\{A_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к аффинному образу ромбододекаэдра, описанному вокруг K.

Замечание. Автору неизвестно, существует ли трехмерное выпуклое тело, вокруг которого не описан никакой аффинный образ ромбододекаэдра.

Следствие 1. *Всякое подмножество $K \subset \mathbb{R}^3$ диаметра d содержится в ромбододекаэдре с расстоянием d между противолежащими гранями.*

Действительно, всякое множество $K \subset \mathbb{R}^3$ диаметра d содержится в некотором подмножестве $K_1 \subset \mathbb{R}^3$ постоянной ширины d, которое заведомо не является исключительным. По доказанной теореме вокруг K_1 можно описать аффинный образ ромбододекаэдра, который и будет искомым, так как расстояние между его противолежащими гранями равно d.

Следствие 2. *Всякое подмножество $K \subset \mathbb{R}^3$ диаметра d содержится в ромбододекаэдре с расстоянием d между противолежащими гранями, усеченном тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими на расстоянии $\frac{d}{2}$ от центра ромбододекаэдра и отсекающими от него правильные четырехугольные пирамиды с вершинами в вершинах ромбододекаэдра.*

Рассмотрим шесть плоскостей, проведенных на расстоянии $\frac{d}{2}$ от центра ромбододекаэдра и отсекающих от него шесть правильных четырехугольных пирамид с вершинами в вершинах ромбододекаэдра. Любое содержащееся в ромбододекаэдре. Тело $K \subset \mathbb{R}^3$ диаметра d не имеет общих внутренних точек с одной из любых двух симметричных относительно центра ромбододекаэдра пирамид, удаленных друг от друга на расстояние d, а значит содержится в требуемом многограннике.

Элементарные вычисления показывают, что объем построенного усеченного ромбододекаэдра равен $(3.5 - 2\sqrt{2})d^3 < 0.672d^3$.

Л. Евдокимов с помощью компьютера нашел разбиение построенного усеченного многогранника на 4 части, диаметр которых меньше $0.98d$. Это улучшает рекордную ранее оценку Грюнбаума [2], которая была равна $0.9887d$.

Работа выполнена при частичной поддержке грантом РФФИ 96–01–00681.

Литература

1. В. Макеев, *Аффинно вписанные и описанные многоугольники и многогранники.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **231** (1996), 286–298.
2. B. Grünbaum, *A simple proof of Borsuk's conjecture in three dimensions.* — Proc. Cambridge Phylos. Soc. **53** (1957), 776–778.

Makeev V. V. Of affine images of a rhombododecaedron circumscribed about a convex body in $\mathbb{R}^3$.

The main result of the paper is dual to an earlier theorem by the author concerning affine images of a cubeoctahedron inscribed in a three-dimensional convex body. The rhombododecaedron is the polytope dual to the cubeoctahedron; the latter is the convex hull of the midpoints of the edges of a cube.

Theorem. Every convex body in $\mathbb{R}^3$ except for those mentioned below admits an affine-circumscribed rhombododecaedron. A possible exception is a body containing a parallelogram P and contained in a cylinder over P.

The author does not know whether there is a three-dimensional convex body exceptional on the sense of the above theorem.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 24 февраля 1997 г.