Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 248, 1998 г.

**Л. Ю. Колотилина**

# ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ ВЕЙЛЯ И НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕГО

## §1. Введение

Как хорошо известно (см., например, [4, теорема 3.3.16]), аддитивные неравенства Вейля в своем общем виде устанавливают соотношения между сингулярными значениями двух произвольных прямоугольных матриц с комплексными элементами, размеры которых совпадают. Для полноты изложения мы приводим этот результат в виде теоремы 1.

**Теорема 1. Аддитивные неравенства Вейля.** *Пусть $A$, $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $n$, $m \geqslant 1$, и пусть $q = \min\{m,n\}$. Сингулярные значения $\sigma_k(A)$, $\sigma_k(B)$ и $\sigma_k(A-B)$ матриц $A$, $B$ и $A-B$, соответственно, упорядоченные по невозрастанию, удовлетворяют неравенствам*

$$\sigma_{i+j-1}(A) \leqslant \sigma_i(B) + \sigma_j(A-B), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant q, \quad i+j \leqslant q+1. \qquad (1.1)$$

*В частности,*

$$\big|\sigma_i(A) - \sigma_i(B)\big| \leqslant \|A-B\|_2, \quad 1 \leqslant i \leqslant q. \qquad (1.2)$$

Неравенства (1.1) можно рассматривать как обобщение неравенств Вейля для сингулярных значений квадратных матриц одинакового размера ($m=n$), которые имеют вид

$$\sigma_{i+j-1}(A) \leqslant \sigma_i(B) + \sigma_j(A-B), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad i+j \leqslant n+1, \qquad (1.3)$$

где $A$, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

В данной работе, основываясь на теореме 1, мы устанавливаем другое обобщение неравенств (1.3), а именно, мы обобщаем их на случай двух квадратных матриц различных порядков (см. теорему 2, § 2). Соответствующие неравенства, которые мы называем обобщенными аддитивными неравенствами Вейля, описывают

Работа выполнена при финансовой поддержке ИНТАСа, грант INTAS-93-377 EXT.

взаимосвязь между сингулярными значениями матриц $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и выглядят следующим образом:

$$\sigma_{n-k+i+j-1}(A) \leqslant \sigma_i(B) + \sigma_j(R), \quad 1 \leqslant i,j \leqslant k, \quad i+j \leqslant k+1, \quad (1.4)$$

где $R = AX - XB$ – матрица невязки, $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ и $X^*X = I_k$. В (1.4), как и выше, предполагается, что сингулярные значения матриц $A$, $B$ и $R$ упорядочены по невозрастанию.

В качестве следствия из обобщенных аддитивных неравенств Вейля мы выводим теорему 3, касающуюся собственных значений эрмитовых матриц, и показываем, как из этой теоремы можно получить теорему Кахана о кластеризованных собственных значениях (см. теорему 4, §2). Далее, на основе обобщенных неравенств Вейля мы доказываем обобщение основного результата работы [3] (см. теорему 5, §2). В заключение статьи мы устанавливаем соотношение между теоремами 3, 4 и 5, относящимися к эрмитовому случаю.

На протяжении всей статьи используются следующие обозначения:

- $H_n(\mathbb{C})$ – множество эрмитовых матриц порядка $n$;
- $\sigma_i(A)$ $(i = 1, \dots, \min\{m,n\})$ – сингулярные значения матрицы $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, причем всегда предполагается, что сингулярные значения занумерованы в порядке невозрастания, т.е., что

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{\min\{m,n\}}(A);$$

- $\|A\| = \|A\|_2 = \sigma_1(A)$, где $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$;
- $\lambda_i(A)$ $(i = 1, \dots, n)$ – собственные значения квадратной матрицы $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, и если все эти собственные значения вещественны, то предполагается, что

$$\lambda_1(A) \geqslant \lambda_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n(A);$$

- $I_n$ – единичная матрица порядка $n$.

## §2. Результаты

Сперва мы докажем, что аддитивные неравенства Вейля (1.3) допускают следующее обобщение на случай квадратных матриц различных порядков.

**Теорема 2. Обобщенные аддитивные неравенства Вейля.** *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $n \geqslant 2$; $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, *и пусть матрица* $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ *состоит из ортонормированных столбцов, т.е.* $X^*X = I_k$. *Тогда*

$$\sigma_{n-k+i+j-1}(A) \leqslant \sigma_i(B) + \sigma_j(R), \quad 1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad i + j \leqslant k + 1, \quad (2.1)$$

*где* $R = AX - XB$. *В частности,*

$$\sigma_{n-k+i}(A) \leqslant \sigma_i(B) + \|R\|. \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Пусть сперва $k = n$. В этом случае матрица $X$ унитарна, а поскольку $R = (A - XBX^*)X$, то

$$\sigma_i(A - XBX^*) = \sigma_i(R), \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.3)$$

В силу соотношений (2.3) и неравенств Вейля (1.3) мы имеем

$$\sigma_{i+j-1}(A) \leqslant \sigma_i(XBX^*) + \sigma_j(A - XBX^*) = \sigma_i(B) + \sigma_j(R),$$
$$1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i + j \leqslant n + 1,$$

что совпадает с (2.1) в случае $k = n$.

Если $k < n$, то, поскольку столбцы $X$ ортонормальны, существует матрица $Y \in \mathbb{C}^{n\times(n-k)}$, такая что матрица $Q = [X\ Y]$ унитарна. Обозначим

$$C = Q^*AQ = \begin{bmatrix} X^*AX & X^*AY \\ Y^*AX & Y^*AY \end{bmatrix}.$$

Очевидно,

$$\sigma_i(A) = \sigma_i(C), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

Далее, пусть

$$S = \begin{bmatrix} X^*AX - B \\ Y^*AX \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Как легко видеть, матрица $S$ может быть также представлена в виде

$$S = Q^*R, \quad (2.6)$$

откуда следует, что

$$\sigma_i(S) = \sigma_i(R), \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.7)$$

С другой стороны, ввиду теоремы 1 мы имеем

$$\sigma_{n-k+p}(A) \overset{(2.4)}{=} \sigma_{n-k+p}(C) \leqslant \sigma_p\left(\begin{bmatrix} X^*AX & 0 \\ Y^*AX & 0 \end{bmatrix}\right)$$
$$+\sigma_{n-k+1}\left(\begin{bmatrix} 0 & X^*AY \\ 0 & Y^*AY \end{bmatrix}\right) = \sigma_p\left(\begin{bmatrix} X^*AX \\ Y^*AX \end{bmatrix}\right), \quad 1 \leqslant p \leqslant k, \quad (2.8)$$

и, аналогично,

$$\sigma_{i+j-1}\left(\begin{bmatrix} X^*AX \\ Y^*AX \end{bmatrix}\right) \leqslant \sigma_i\left(\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \sigma_j(S) \overset{(2.7)}{=} \sigma_i(B) + \sigma_j(R),$$
$$1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad i + j \leqslant k + 1. \quad (2.9)$$

Для завершения доказательства нам осталось лишь заметить, что неравенства (2.1) следуют из неравенств (2.8) и (2.9), если положить $p = i + j - 1$. $\square$

Применяя теорему 2 к матрицам $A - tI_n$ и $B - tI_k$, где $t \in \mathbb{C}$ – произвольное комплексное число, мы немедленно получаем следующий результат.

**Следствие 1.** *В предположениях теоремы 2 справедливы неравенства*

$$\sigma_{n-k+i+j-1}(A - tI_n) \leqslant \sigma_i(B - tI_k) + \sigma_j(R),$$
$$1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad i + j \leqslant k + 1, \quad t \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Используя следствие 1, для эрмитовых матриц $A$ и $B$ мы докажем следующий основной результат.

**Теорема 3.** *Пусть $A \in H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$; $B \in H_k(\mathbb{C})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и пусть $X^*X = I_k$, где $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$. Тогда каждый интервал вида*

$$[\lambda_s(B) - \sigma_j(R),\ \lambda_r(B) + \sigma_j(R)], \quad 1 \leqslant r \leqslant s \leqslant k, \quad j \leqslant s - r + 1,$$

*где $R = AX - XB$, содержит по крайней мере $s-r-j+2$ собственных значения матрицы $A$.*

**Доказательство.** Положим

$$t = \frac{\lambda_r(B) + \lambda_s(B)}{2}, \quad \delta = \frac{\lambda_r(B) - \lambda_s(B)}{2}. \quad (2.11)$$

Тогда, очевидно,

$$\left|\lambda_p(B) - t\right| \leqslant \delta, \quad p = r, \ldots, s. \quad (2.12)$$

Поскольку для эрмитовой матрицы $B - tI_k$ мы имеем

$$|\lambda_q(B - tI_k)| = \sigma_{\pi(q)}(B - tI_k), \quad 1 \leqslant q \leqslant k, \tag{2.13}$$

где $\pi$ – некоторая перестановка на множестве $\{1, \dots, k\}$, то из (2.12) с необходимостью вытекает, что

$$\sigma_{k-s+r}(B - tI_k) \leqslant \delta. \tag{2.14}$$

Применяя следствие 1 с $i = k - s + r$, мы теперь имеем

$$\sigma_{n-s+r+j-1}(A - tI_n) \leqslant \delta + \sigma_j(R), \quad s - r - j + 1 \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Неравенство (2.15) означает, что по крайней мере $s - r - j + 2$ младших сингулярных значения матрицы $A - tI_n$ не превосходят $\delta + \sigma_j(R)$. В силу соотношений между собственными и сингулярными значениями эрмитовой матрицы $A - tI_n$, аналогичных (2.13), отсюда следует, что по крайней мере $s - r - j + 2$ ближайших к $t$ собственных значения $A$ лежат в интервале

$$[t - \delta - \sigma_j(R),\ t + \delta + \sigma_j(R)] = [\lambda_s(B) - \sigma_j(R),\ \lambda_r(B) + \sigma_j(R)],$$

что и требовалось доказать. $\square$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы показать, что теорема Кахана о кластеризованных собственных значениях может быть получена как следствие из теоремы 3. Для этого мы воспользуемся следующим результатом общего характера.

**Лемма 1.** *Пусть* $= \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$, $k \geqslant 1$, *и* $\beta_1 \geqslant \beta_2 \geqslant \cdots \geqslant \beta_n$, $n \geqslant k$, *– заданные последовательности вещественных чисел. Для любого числа* $\gamma \geqslant 0$ *следующие два утверждения равносильны:*

(i) *существуют* $k$ *различных индексов* $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$, *таких что*

$$|\beta_{s_i} - \alpha_i| \leqslant \gamma, \quad i = 1, \dots, k;$$

(ii) *для любых* $i$ *и* $j$, *удовлетворяющих условиям* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, *существуют* $j - i + 1$ *различных индексов* $s_i < s_{i+1} < \cdots < s_j$, *таких что*

$$\beta_{s_p} \in [\alpha_j - \gamma,\ \alpha_i + \gamma], \quad p = i, \dots, j.$$

**Доказательство.** Поскольку (ii) тривиально следует из (i), нам необходимо лишь убедиться, что (ii) влечет (i). С этой целью мы применим индукцию по $k$. В случае $k = 1$, условия (i) и (ii) очевидно равносильны, что дает базу для индукции. Поэтому предположим, что импликация $(ii) \Longrightarrow (i)$ уже доказана в случае $1 \leqslant k \leqslant r-1$, и рассмотрим случай $k = r$. По индукционному предположению найдутся такие индексы $s_2 < \cdots < s_r$, что

$$|\beta_{s_i} - \alpha_i| \leqslant \gamma, \quad i = 2, \ldots, r. \tag{2.16}$$

Возможны два случая. Либо при некотором $i_*$ имеет место неравенство

$$\left|\beta_{s_{i_*}} - \alpha_{i_*-1}\right| > \gamma, \quad 2 \leqslant i_* \leqslant r, \tag{2.17}$$

либо

$$|\beta_{s_i} - \alpha_{i-1}| \leqslant \gamma, \quad i = 2, \ldots, r. \tag{2.18}$$

Если выполнено (2.17), то, в силу предположения индукции, найдутся такие различные индексы $t_1 < \cdots < t_{i_*-1}$, что

$$\left|\beta_{t_j} - \alpha_j\right| \leqslant \gamma, \quad j = 1, \ldots, i_* - 1. \tag{2.19}$$

Из (2.16) при $i = i_*$, (2.17) и (2.19) при $j = i_* - 1$ следует неравенство

$$\beta_{s_{i_*}} < \beta_{t_{i_*-1}},$$

на основании которого мы заключаем, что

$$s_{i_*} > t_{i_*-1}. \tag{2.20}$$

Тем самым найдено $r$ различных индексов $t_1, \ldots, t_{i_*-1}, s_{i_*}, \ldots, s_r$, для которых имеют место неравенства (2.19) и (2.16), что и требовалось.

С другой стороны, пусть выполнено условие (2.18). В этом случае, в силу (ii), в интервале

$$[\alpha_r - \gamma, \ \alpha_1 + \gamma]$$

содержится по крайней мере $r$ различных элементов из множества $\{\beta_i\}_{i=1}^n$. Следовательно, найдется такой индекс $s$, что

$$s \neq s_i, \quad i = 2, \ldots, r,$$

и

$$\alpha_r - \gamma \leqslant \beta_s \leqslant \alpha_1 + \gamma.$$

Теперь следует рассмотреть три случая: либо

$$\exists\, i_* : s_{i_*} < s < s_{i_*+1}, \quad 2 \leqslant i_* \leqslant r-1, \tag{2.21}$$

либо

$$s < s_2, \tag{2.22}$$

либо

$$s > s_r. \tag{2.23}$$

Если имеет место (2.21), то

$$\beta_{s_{i_*+1}} \leqslant \beta_s \leqslant \beta_{s_{i_*}},$$

а тогда, в силу (2.16) с $i = i_*$ и (2.18) с $i = i_* + 1$, выполнено и неравенство

$$|\beta_s - \alpha_{i_*}| \leqslant \gamma.$$

Это неравенство, наряду с (2.16) и (2.18), показывает, что набор индексов $\{s_2, \dots, s_{i_*}, s, s_{i_*+1}, \dots, s_r\}$ обладает требуемыми свойствами.

В случаях (2.22) и (2.23) искомыми наборами могут служить $s < s_2 < \dots < s_r$ и $s_2 < s_3 < \dots < s_r < s$, соответственно. Нужные свойства этих наборов обеспечиваются условиями (2.18) для $i = 2$ и (2.16) для $i = 2, \dots, r$ в случае неравенства (2.22) или условиями (2.16) для $i = r$ и (2.18) для $i = 2, \dots, r$ в случае неравенства (2.23). $\square$

Пусть теперь выполнены условия теоремы 3. Тогда, полагая $j = 1$, имеем, что любой интервал вида

$$[\lambda_s(B) - \gamma,\ \lambda_r(B) + \gamma], \quad 1 \leqslant r \leqslant s \leqslant k,$$

где $\gamma = \|R\|$, $R = AX - XB$, содержит по крайней мере $s - r + 1$ собственное значение матрицы $A$, и применение леммы 1 немедленно приводит нас к теореме Кахана о кластеризованных собственных значениях.

**Теорема 4** [6] (см. также [2]). *Пусть $A \in H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$; $B \in H_k(\mathbb{C})$, $1 \leqslant k \leqslant n$, и пусть $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$, причем $X^*X = I_k$. Тогда найдутся индексы $i_1 < \dots < i_k$, такие что*

$$|\lambda_{i_j}(A) - \lambda_j(B)| \leqslant \|AX - XB\|, \quad j = 1, \dots, k.$$

**Замечание 1.** Как было отмечено выше, теорема 4 является следствием частного случая теоремы 3, соответствующего $j = 1$. С другой стороны, очевидно, что этот частный случай теоремы 3 тривиально следует из теоремы Кахана. Таким образом, теорема Кахана в действительности эквивалентна частному случаю теоремы 3. Кроме того, теорема Кахана может рассматриваться как обобщение неравенств (1.2) в случае $m = n$, вытекающих из неравенств (1.3).

**Замечание 2.** Теорема 4 в действительности допускает обобщение на случай произвольной $n \times k$-матрицы $X$ полного столбцового ранга. Как было установлено в [1] (и в соответствии с гипотезой, выдвинутой в [2]), в этом случае имеют место неравенства

$$|\lambda_{i_j}(A) - \lambda_j(B)| \leqslant \frac{\|AX - XB\|}{\sigma_k(X)}, \quad j = 1, \dots, k,$$

где все индексы $i_j$ различны. Попытки получить этот более общий результат, базируясь на неравенствах Вейля, пока остались безрезультатными.

Покажем теперь, что из следствия 1 нетрудно вывести обобщение теоремы о расширенных интервалах чередования, установленной в [3]. Доказательство этой теоремы, представленное в [3], существенно опирается на соображения размерности, аналогичные подходу, предложенному в [5] (см. также [7]). По замечанию авторов [3], доказательства, основанного непосредственно на применении классической теории возмущения и чередования, им найти не удалось. Доказательство, предлагаемое в данной работе и основанное на аддитивных неравенствах Вейля, как раз и является доказательством такого типа. Отличие представленной ниже теоремы 5 от исходной теоремы 1 работы [3] состоит лишь в замене главной подматрицы данной эрмитовой матрицы $A$ на блочное отношение Рэлея, которое является главной подматрицей матрицы, сопряженной с $A$ с помощью некоторой унитарной матрицы.

**Теорема 5.** *Пусть $A \in H_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 2$, и пусть столбцы матрицы $X \in \mathbb{C}^{n\times k}$ ортонормальны, т.е. $X^*X = I_k$. Фиксируем $r$ и $s$, $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant k$, положим*

$$t = \frac{\lambda_r(X^*AX) + \lambda_s(X^*AX)}{2}, \quad \delta = \frac{\lambda_r(X^*AX) - \lambda_s(X^*AX)}{2}, \quad (2.24)$$

*и определим интервал*

$$I(r, s, j) = \left[t - \sqrt{\delta^2 + \sigma_j^2(R)},\ t + \sqrt{\delta^2 + \sigma_j^2(R)}\right], \quad 1 \leqslant j \leqslant k,$$

*где* $R = AX - XX^*AX$. *Тогда интервал* $I(r, s, j)$ *содержит по крайней мере* $s - r - j + 2$ *собственных значения матрицы* $A$.

**Доказательство.** Следствие 1 (при $B = tI_k$, $i = 1$ и $j = p$) гарантирует выполнение неравенств

$$\sigma_{n-k+p}(A - tI_n) \leqslant \sigma_p[(A - tI_n)X], \quad 1 \leqslant p \leqslant k, \quad t \in \mathbb{C}. \tag{2.25}$$

В этом случае матрица $S$, определенная в (2.5), имеет вид

$$S = \begin{bmatrix} X^*AX - tI_k \\ Y^*AX \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad Y^*X = 0 \quad \text{и} \quad Y^*Y = I_{n-k},$$

а в силу соотношений (2.7) сингулярные значения матриц $(A - tI_n)X$ и $S$ совпадают. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sigma^2_{i+j-1}\left[(A - tI_n)X\right] = \sigma^2_{i+j-1}(S) \\ &= \lambda_{i+j-1}\left[(X^*AX - tI_k)^*(X^*AX - tI_k) + X^*AYY^*AX\right] \\ &\leqslant \lambda_i\left[(X^*AX - tI_k)^*(X^*AX - tI_k)\right] + \lambda_j\left(X^*AYY^*AX\right) \\ &= \sigma_i^2(X^*AX - tI_k) + \sigma_j^2(Y^*AX), \\ &1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad i + j \leqslant k + 1. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь мы воспользовались неравенствами Вейля (1.3), которые в случае эрмитовых неотрицательно определенных матриц $A$, $B$ и $A - B$ становятся неравенствами для собственных значений.

Из соотношений (2.7), соответствующих случаю, когда в (2.5) взята матрица $B = X^*AX$, легко следует, что

$$\sigma_j(Y^*AX) = \sigma_j(AX - XX^*AX) = \sigma_j(R), \quad 1 \leqslant j \leqslant k. \tag{2.27}$$

Учитывая (2.26) и (2.27), из неравенств (2.25) при $p = i + j - 1$ мы получаем неравенства

$$\begin{aligned} &\sigma_{n-k+i+j-1}(A - tI_n) \leqslant \left[\sigma_i^2(X^*AX - tI_k) + \sigma_j^2(R)\right]^{1/2}, \\ &1 \leqslant i, j \leqslant k, \quad i + j \leqslant k + 1. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Если теперь $t$ и $\delta$ определены в соответствии с (2.24), то, очевидно,

$$|\lambda_p(X^*AX) - t| \leqslant \delta, \quad p = r, \ldots, s.$$

Значит, поскольку сингулярные значения эрмитовой матрицы $X^*AX - tI_k$ совпадают с абсолютными величинами ее собственных значений,

$$\sigma_i(X^*AX - tI_k) \leqslant \delta, \quad i = k, \ldots, k - s + r. \tag{2.29}$$

Воспользовавшись (2.29) и положив в (2.28) $i = k - s + r$, мы приходим к заключению, что

$$\sigma_{n-s+r+j-1}(A - tI_n) \leqslant \left[\delta^2 + \sigma_j^2(R)\right]^{1/2}, \quad j \leqslant s - r + 1.$$

Но это неравенство как раз и означает, что по крайней мере $s - r - j + 2$ ближайших к $t$ собственных значения матрицы $A$ содержатся в интервале $I(r, s, j)$. $\square$

В заключение мы укажем соотношения между теоремами 3, 4 и 5, описывающими расположение собственных значений эрмитовых матриц. Теоремы 3 и 5 однотипны, и обе гарантируют, что при некотором значении $\gamma_j$, где $\gamma_j$ есть функция от $\sigma_j(R)$, каждый интервал вида

$$[\lambda_s(B) - \gamma_j,\ \lambda_r(B) + \gamma_j], \quad 1 \leqslant r \leqslant s \leqslant k,$$

содержит по крайней мере $s - r - j + 2$ собственных значения матрицы $A$. Теорема 3 позволяет описывать расположение собственных значений $A$ в терминах собственных значений произвольной эрмитовой $k \times k$-матрицы $B$, а теорема 5 дает уточнение теоремы 3 (при $r < s$) в случае, когда $B$ есть блочное отношение Рэлея для $A$.

Как было показано, теорема 4 является, ввиду леммы 1, следствием теоремы 3. А поскольку в случае $B = X^*AX$, $X^*X = I_k$, теорема 3 следует из теоремы 5, то и теорема 4 в этом частном случае является следствием теоремы 5.

## Литература


1. Zhi-hao Cao, Jin-jun Xie, and Ren-Cang Li, *A sharp version of Kahan's theorem on clustered eigenvalues.* — Linear Algebra Appl. **245** (1996), 147–155.
2. C. Davis, W. M. Kahan, and H. F. Weinberger, *Norm-preserving dilations and their applications to optimal error bounds.* — SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 445–469.
3. R. O. Hill, C. R. Johnson, and B. K. Kroschel, *Extended interlacing intervals.* — Linear Algebra Appl. **254** (1997), 227–239.
4. R. Horn and C. R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis.* Cambridge Univ. Press (1991).
5. Y. Ikebe, T. Inagaki, and S. Miyamoto, *The monotonicity theorem, Cauchy's interlace theorem, and the Courant–Fischer theorem.* — Amer. Math. Monthly, **94** (1987), 352–354.
6. W. Kahan, *Inclusion theorems for clusters of eigenvalues of Hermitian matrices.* — Technical Report, Computer Science Dept., Univ. of Toronto (1967).
7. Wasin So, *Commutativity and spectra of Hermitian matrices.* — Linear Algebra Appl. **212/213** (1994), 121–129.

Kolotilina L. Yu. A generalization of Weyl's inequalities with implications.

This paper suggests a generalization of additive Weyl's inequalities to the case of two square matrices of different orders. As a consequence of generalized Weyl's inequalities, a theorem describing the location of eigenvalues of a Hermitian matrix in terms of the eigenvalues of an arbitrary Hermitian matrix of smaller order is derived. It is demonstrated that the latter theorem provides a generalization of Kahan's theorem on clustered eigenvalues. Also it is shown that the theorem on extended interlacing intervals established in [3] is another consequence of the generalized additive Weyl inequalities suggested.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 17 апреля 1998 г.